

Інститут математики
Національної академії наук України

Геометрія, топологія та їх
застосування

Київ – 2009

Інститут математики
Національної академії наук України

Збірник Праць
Ін-ту математики НАН України
Т. 6, №2

Ч. I. Праці міжнародної конференції
“Геометрія в Одесі – 2008”

Редакційна рада:

В. В. Гольдберг, В. М. Кузаконь, О. Г. Кушнер,
В. В. Личагін, В. В. Шарко.

Ч. II. Праці Інституту математики
НАН України

Головний редактор:*А. М. Самойленко*

Редакційна рада: *М. Л. Горбачук, А. А. Дороговцев,*
Ю. А. Дрозд, Ю. Б. Зелінський, А. Н. Кочубей,
І. О. Луковський, В. Л. Макаров, А. Г. Нікітін,
В. В. Новицький, М. В. Працьовитий, О. Л. Ребенко,
А. С. Романюк, Ю. С. Самойленко, С. Г. Солодкий,
В. В. Шарко, О. М. Шарковський

Геометрія, топологія та їх застосування

УДК 517.938.5+512.6+519.41

Геометрія, топологія та їх застосування / Відп. ред. В. В. Шарко // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2009. – Т. 6, № 2. – 550 с.

ISSN 1815-2910

Перша частина збірника містить праці учасників Міжнародної конференції “Геометрія в Одесі – 2008”, що проходила з 19 по 24 травня 2008 року в м. Одеса (Україна). Їх роботи присвячені диференціальній геометрії, геометричній теорії диференціальних рівнянь, теорії тканин тощо.

В другу частину збірника входять статті співробітників Інституту математики НАН України. Більшість статей містить результати з маловимірної топології, теорії динамічних систем, алгебри та теорії диференціально-функціональних рівнянь.

Завдяки широкому колу висвітлюваних проблем збірник буде корисний для широкого кола студентів, аспірантів та спеціалістів з топології, геометрії, теорії динамічних систем, алгебри та інших областей математики.

Видавнича група збірника:

член-кореспондент НАН України В. В. Шарко (відп. ред.),
кандидат фіз.-мат наук О. Г. Кушнер, кандидат фіз.-мат наук
С. І. Максименко, кандидат фіз.-мат наук Є. О. Полулях.

Рецензенти:

член-кореспондент НАН України Ю. Ю. Трохимчук
доктор фіз.-мат. наук, професор В. В. Кириченко

© Інститут математики НАН України, 2009

Зміст

Частина I. Праці міжнародної конференції “Геометрія в Одесі-2008”

Коновенко Н. Г. Алгебры дифференциальных инвариантов геометрических величин на проективной прямой	10-34
Прокіп В. М. Про трикутні унітальні ділянки многочленних матриць над факторіальною областю	35-46
Федченко Ю. С. Нескінченно малі геодезичні деформації метрики ds^2	47-55
Величко И. Г., Гургенидзе М. А., Стеганцева П. Г. Подмногообразия грассманова многообразия плоскостей псевдоевклидова пространства	56-76
Кожухарь Д. В. Пример поворотно-конформного отображения псевдосферы со свойством взаимности	77-81
Кузаконь В. М. Дифференциальные инварианты расслоения кривых на плоскости Лобачевского	82-90
Кушнер А. Г. Геометрия уравнений Монжа-Ампера, телеграфное уравнение и уравнение Гельмгольца	91-122
Литвинов Г. Л., Шпиз Г. Б. Деквантование Маслова, тропическая математика, идемпотентная математика и геометрия	123-151
Милка А. Д., Горькавый В. А. Изгибания правильных многогранников с увеличением объема	152-182
Паньженский В. И. Римановы пространства постоянной кривизны с кручением	183-194

Синюкова Е. Н. О геодезической однозначной определенности в целом некоторых специальных классов римановых пространств	195-206
Степанов С. Е., Гордеева И. А. О существовании псевдокиллинговых и псевдогармонических векторных полей на многообразиях Римана-Картана	207-222
Степанов С. Е., Шелепова В. Н. Инфинитезимальные гармонические преобразования и солитоны Риччи	223-234
Стрельцова И. С. \mathbb{R} -конформная геометрия кривых на плоскости: алгебра дифференциальных инвариантов	235-246
Толстихина Г. А. О локально симметрической структуре, связанной с обобщенной левой три-тканью Бола $B_l(p, q, q)$	247-255
Шелехов А. М. О достаточном условии боловости многомерной три-ткани	256-263
Cooper J. B., Russell T. On Samuelson Submanifolds in Four Space	264-275
Goldberg V. V., Lychagin V. V. Hyperplanar Webs and Euler Equations	276-287
Lychagin V. V. Feedback Equivalence of 1-dimensional Control Systems of the 1-st Order	288-302
Roulstone I., Banos B., Gibbon J. D., Roubtsov V. N. Kähler Geometry and Burgers' Vortices	303-321

Частина II. Праці Інституту математики НАН України

Бахтина Г. П., Подвысоцкий Р. В. Разделяющее преобразование и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегающих областях	323-332
Бондаренко В. М., Степочкина М. В. О сильной (min, max)-эквивалентности ч. у. множеств с инволюцией	333-339
Будницька Н. В. Реалізація замкненої 1-форми з замкненими рекурентними кривими на замкнених поверхнях	340-348
Будницька Т. В. Топологічна класифікація дробово-лінійних перетворень	349-358
Вельгач А. В. Періодичні розв'язки систем лінійних диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу і їх властивості	359-372
Власенко И. Ю. Особенности динамики бесконечнократных внутренних по Трохимчуку эпиморфизмов	373-389
Грушка Я. І. Узагальнення теореми про рівномірну збіжність підгрупи до одиничного оператора	390-399
Качурівський Р. І., Пелюх Г. П. Про існування періодичних розв'язків систем диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу .	400-416
Лукова Н. В. Топологічна класифікація функцій без критичних точок на тривимірних многовидах з межею	417-425
Лычак Д. П. Послойная эквивалентность гладких функций на поверхностях с изолированными критическими точками	426-439

Міщенко К. І., Пришляк О. О. Топологічна класифікація некомпактних поверхонь з краєм	440-449
Сівак О. А. Про існування неперервних при $t \in r$ розв'язків систем лінійних функціонально-різницевих рівнянь і їх властивості	450-459
Юрчук І. А. PPO - та PCO -еквівалентності неперервних відображень заданих на $S^1 \vee S^1$	460-469
Bondarenko V. M. On connections between representations of semigroups $\mathcal{S}(I, J)$ and representations of quivers	470-473
Bondarenko V. M., Pereguda Yu. M. On P -numbers of quadratic forms	474-477
Bondarenko V. M., Tertychna O. M. On representations of the semigroups $\mathcal{S}(I, J)$ with acyclic quiver	478-483
Eftekharinasab K. Curvature forms and Curvature functions for 2-manifolds with boundary	484-488
Maksymenko S. Reparametrizations of vector fields and their shift maps	489-498
Makyuta Yu. M., Obikhod T. V. High energy physics and algebraic geometry	499-504
Polulyakh Ye. On conjugate pseudo-harmonic functions	505-517
Sharko V. V. Morse-Bott functions on manifolds with semi-free circle action	518-523
Solodky S. G., Volynets E. A. On the efficient method of solving ill-posed problems by adaptive discretization	524-549

ЧАСТИНА I

Труды Международной конференции

“ГЕОМЕТРИЯ В ОДЕССЕ – 2008”

19-24 мая 2008 г.

Международный научный комитет конференции:

Лычагин В. В. (Норвегия) – председатель,
Алексеевский Д. В. (Великобритания), Гандель Ю. В. (Украина), Гольдберг В. В. (США), Дискант В. И. (Украина), Евтушик Л. Е. (Россия), Заричный М. М. (Украина), Ибрагимов Н. Х. (Швеция), Кириченко В. Ф. (Россия), Коновенко Н. Г. (Украина), Красильщик И. С. (Россия), Кузаконь В. М. (Украина), Кушнер А. Г. (Россия), Лейко С. Г. (Украина), Мантуров О. В. (Россия), Машков О. А. (Украина), Милка А. Д. (Украина), Пришляк А. О. (Украина), Рахула М. О. (Эстония), Roger С. (Франция), Рубцов В. Н. (Франция), Straume E. (Норвегия), Стриха М. В. (Украина), Фоменко А. Т. (Россия), Фоменко В. Т. (Россия), Хруслов Е. Я. (Украина), Шарко В. В. (Украина).

Н. Г. Коновенко

Одеська національна академія харчових технологій, Одеса
E-mail: Konovenko@ukr.net

Алгебри диференціальних інваріантів геометричних величин на проєктивній прямій

В статті описуються одномірні однорідні розшарування на проєктивній прямій і знаходяться алгебри їхніх диференціальних інваріантів. Ми знаходимо нормальні форми локальної sl_2 -дії, класифікуємо одномірні проєктивні величини, застосовуємо ці результати до інтегрування звичайних диференціальних рівнянь, що мають sl_2 -симетрії й знаходимо нові класи диференціальних рівнянь, що інтегруються у квадратурах.

В этой статье мы описываем одномерные однородные расслоения на проективной прямой и находим алгебры их дифференциальных инвариантов. Мы находим нормальные формы локального sl_2 -действия и классифицируем одномерные проективные величины. Мы применяем эти результаты к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющих sl_2 -симметрии и находим новые классы дифференциальных уравнений интегрируемых в квадратурах.

In this paper we describe 1-dimensional homogeneous bundles of the projective line and find algebras of their differential invariants. We find normal forms of local sl_2 -actions and classify 1-dimensional projective quantities. We apply these results to integration of ordinary differential equations equipped with sl_2 -symmetry and find new classes of differential equations integrable in quadratures.

Ключові слова: *проєктивні структури, геометричні величини, диференціальні інваріанти, інваріантне диференціювання.*

1. ВСТУП

Згідно Ерлангенської програми Ф. Клейна [3] проєктивна геометрія прямої складається у вивченні інваріантів проєктивної (дробно-лінійної) дії групи Лі $SL_2(\mathbb{R})$. Ми конкретизуємо це положення й вивчаємо диференціальні інваріанти цієї дії. Із цією метою ми розглядаємо однорідні розшарування над проєктивною прямою. На перерізах цих розшарувань, які ми називаємо геометричними проєктивними величинами [1], [2], природно діє група $SL_2(\mathbb{R})$.

В цій роботі ми даємо повний опис одномірних однорідних розшарувань і алгебр їхніх диференціальних інваріантів (Теорема 1,2,3,4). Маючи на увазі застосування до звичайних диференціальних рівнянь, ми розглядаємо задачу класифікації проєктивних геометричних величин локально.

В якості групи, що класифікується ми розглядаємо локальні точкові дифеоморфізми, що зберігають структуру розшарування геометричних величин. У цьому випадку проєктивні геометричні величини розпадаються на три класи, які ми позначаємо через R, S, T . Більш детальна класифікація усередині цих класів наведена в теоремі 5. Вона містить 8 підкласів.

Зауважимо, що знайдені Софусом Лі дії $sl_2(\mathbb{R})$ на площині містяться усередині цієї класифікації, але не збігаються з нею, тому що класифікаційна група для геометричних величин строго менше групи всіх локальних дифеоморфізмів площини. У теоремі 1 дано детальний опис цих класів і відповідних дій алгебри Лі $sl_2(\mathbb{R})$.

У теоремах 2, 3, 4 дається повний опис диференціальних інваріантів для даних sl_2 -дій у термінах базисних диференціальних інваріантів і їхніх інваріантних похідних. Цей опис використовується потім для інтегрування звичайних диференціальних рівнянь, що мають sl_2 алгебру точкових симетрій. А саме, кожне таке рівняння, якщо записати у диференціальних інваріантах може бути інтегроване "по-кроково". Спочатку ми інтегруємо рівняння для базового диференціального інваріанта,

а потім отримані розв'язки розглядаємо як звичайні диференціальні рівняння порядку, що ≤ 3 та володіють sl_2 -симетрією. Ми описуємо випадки, коли ці рівняння, у свою чергу, можуть бути проінтегровані у квадратурах. Відзначимо, що конструктивне інтегрування рівнянь для базового диференціального інваріанта може бути проведене при наявності симетрій, які, у термінах споконвічного диференціального рівняння, є нелокальними симетріями типу Беклунда. Відзначимо також, що застосування цього методу до звичайних диференціальних рівнянь, що володіють 2-мірною розв'язною алгеброю симетрій "ax + b", а також зв'язаною з нею афінною геометрією, можна знайти в [5].

2. РОЗШАРУВАННЯ ПРОЕКТИВНИХ ГЕОМЕТРИЧНИХ ВЕЛИЧИН

Геометрія проективної прямої $\mathbb{R}P^1$, або проективна геометрія, визначається структурною групою $SL_2(\mathbb{R})$ і її дією дробно-лінійними перетвореннями на $\mathbb{R}P^1$:

$$\lambda_A : [x : y] \mapsto \frac{a_{11}x + a_{12}y}{a_{21}x + a_{22}y},$$

де $A = \|a_{ij}\| \in SL_2(\mathbb{R})$. Відповідно, в афінній карті $[x : 1]$, цій дії групи Лі, відповідає дія, або зображення алгебри Лі $sl_2(\mathbb{R})$ у векторних полях на \mathbb{R} :

$$\begin{bmatrix} h & a \\ b & -h \end{bmatrix} \in sl_2(\mathbb{R}) \mapsto (a + 2hx - bx^2)\partial_x \in D(\mathbb{R}).$$

Проективні геометричні величини суть перетину однорідних розшарувань $\pi : E \rightarrow \mathbb{R}P^1$ над проективною прямою [1], [2], [3]. У цій роботі ми вивчаємо локальну структуру таких розшарувань. Тому замість проективної прямої $\mathbb{R}P^1$ ми обмежимося деякою областю афінної карти $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}P^1$. Більше того, ми вивчаємо одномірні проективні величини. Для них розшарування π , (локально) має вигляд

$$\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \pi : (x, u) \mapsto x,$$

а однорідність цього розшарування означає, що стандартна дія алгебри Лі $sl_2(\mathbb{R})$ на прямій піднята в розшарування π . Іншими словами, векторні поля

$$X = \partial_x, \quad Y = x^2 \partial_x, \quad H = x \partial_x,$$

які утворюють базис в $sl_2(\mathbb{R})$ і задовольняють наступні комутаційні співвідношення

$$[X, H] = X, \quad [Y, H] = -Y, \quad [X, Y] = 2H,$$

підняті до векторних полів в \mathbb{R}^2

$$(1) \quad \begin{aligned} \bar{X} &= \partial_x + a(x, u) \partial_u, \\ \bar{Y} &= x^2 \partial_x + b(x, u) \partial_u, \\ \bar{H} &= x \partial_x + h(x, u) \partial_u, \end{aligned}$$

так щоб вони задовольняли комутаційним співвідношенням алгебри $sl_2(\mathbb{R})$, тобто

$$(2) \quad \begin{aligned} [\bar{X}, \bar{H}] &= \bar{X}, \\ [\bar{Y}, \bar{H}] &= -\bar{Y}, \\ [\bar{X}, \bar{Y}] &= 2\bar{H}. \end{aligned}$$

Ці співвідношення у свою чергу еквівалентні диференціальним рівнянням на функції $a(x, u)$, $b(x, u)$, $h(x, u)$

$$(3) \quad \begin{aligned} -a - xa_x - ha_u + h_x + ah_u &= 0, \\ b - xb_x - hb_u + x^2 h_x + bh_u &= 0, \\ -2h - x^2 a_x - ba_u + b_x + ab_u &= 0. \end{aligned}$$

Для рішення цієї системи диференціальних рівнянь введемо допоміжні функції A , B , H , так щоб

$$\begin{aligned} a &= A, \\ h &= H + xA, \\ b &= B + 2xH + x^2 A. \end{aligned}$$

Тоді система (3), як система диференціальних рівнянь щодо допоміжних функцій A, B, H має вигляд:

$$(4) \quad \begin{aligned} H_x + AH_u - HA_u &= 0, \\ B - HB_u + BH_u &= 0, \\ B_x + AB_u - BA_u &= 0. \end{aligned}$$

Відзначимо, що у випадку, коли $H = 0, B = 0$, довільна гладка функція A задовольняє систему рівнянь (4).

Подання, що відповідають випадку, коли $H = 0, B = 0$ і $A(x, u)$ — будь-яка функція, ми відносимо до класу, який позначаємо через T .

Нехай тепер $H \neq 0$. Перепишемо перше рівняння системи (4) у вигляді:

$$(5) \quad \left(\frac{1}{H}\right)_x + \left(\frac{A}{H}\right)_u = 0.$$

Тоді, існує функція $\varphi(x, u)$, така що

$$(6) \quad H = \frac{1}{\varphi_u}, \quad A = -\frac{\varphi_x}{\varphi_u}.$$

Якщо ж $B = 0$, то

$$(7) \quad A = -\frac{\varphi_x}{\varphi_u}, \quad H = \frac{1}{\varphi_u}$$

є розв'язком системи (4).

Якщо ж $B \neq 0$, то третє рівняння системи (4) можна записати у вигляді:

$$(8) \quad \left(\frac{1}{B}\right)_x + \left(\frac{A}{B}\right)_u = 0.$$

Отже, існує функція $\psi(x, u)$, така що

$$(9) \quad B = \frac{1}{\psi_u}, \quad A = -\frac{\psi_x}{\psi_u}.$$

У цьому випадку друге рівняння (4) системи набуде вигляду:

$$\frac{1}{B} + \left(\frac{H}{B}\right)_u = 0.$$

Тому, $\left(\psi + \frac{H}{B}\right)_u = 0$, або $\frac{H}{B} + \psi = \alpha(x)$. Підставляючи значення (6) і (9) у це рівняння, одержуємо:

$$\frac{\psi_u}{\varphi_u} = \alpha(x) - \psi \quad \text{або} \quad \frac{\psi_u}{\alpha - \psi} = \varphi_u.$$

Звідси

$$-\ln(\alpha - \psi) = \varphi + \widetilde{\beta(x)} \quad \text{або} \quad \alpha - \psi = e^{-\varphi} \cdot \beta(x),$$

і остаточно

$$\psi = \alpha(x) + \beta(x)e^{-\varphi}.$$

Крім того, зі співвідношень (6) і (9), матимемо

$$A = -\frac{\varphi_x}{\varphi_u} = -\frac{\psi_x}{\psi_u},$$

або

$$\frac{\varphi_x}{\varphi_u} = \frac{\alpha' + \beta'e^{-\varphi} - \beta\varphi_x e^{-\varphi}}{-\beta\varphi_u e^{-\varphi}}.$$

Звідки

$$\alpha'\varphi_u + \beta'e^{-\varphi}\varphi_u - \beta\varphi_x\varphi_u e^{-\varphi} = -\beta\varphi_x\varphi_u e^{-\varphi},$$

або $(\alpha' + \beta'e^{-\varphi})\varphi_u = 0$. Але, оскільки $\varphi_u \neq 0$, тоді $\alpha' + \beta'e^{-\varphi} = 0$, й отже,

$$\alpha, \beta = \text{const.}$$

Отже, ми маємо три типи розв'язків системи рівнянь (3):

- 1) $a = a(x, u)$, $b = x^2 a(x, u)$, $h = xa(x, u)$, де $a(x, u)$ — довільна, гладка функція.
- 2) $a = -\frac{\varphi_x}{\varphi_u}$; $b = \frac{2x-x^2\varphi_x}{\varphi_u}$; $h = \frac{1-x\varphi_x}{\varphi_u}$, де $\varphi(x, u)$ — довільна, гладка функція.
- 3) $a = -\frac{\varphi_x}{\varphi_u}$, $b = \frac{2x\beta-x^2\beta\varphi_x-e^\varphi}{\beta\varphi_u}$, $h = \frac{1-x\varphi_x}{\varphi_u}$, де $\varphi(x, u)$ — довільна, гладка функція, а $\beta \in \mathbb{R} \setminus 0$.

Отже, ми отримали наступний результат.

Теорема 1. *Локально всі одномірні проєктивні величини розпадаються на 3 класи, що відповідають наступним поданням алгебри Лі $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$:*

T

$$\begin{aligned}\overline{X} &= \partial_x - \frac{\varphi_x}{\varphi_u} \partial_u, \\ \overline{H} &= x\partial_x - \frac{x\varphi_x}{\varphi_u} \partial_u, \\ \overline{Y} &= x^2\partial_x - \frac{x^2\varphi_x}{\varphi_u} \partial_u.\end{aligned}$$

S

$$\begin{aligned}\overline{X} &= \partial_x - \frac{\varphi_x}{\varphi_u} \partial_u, \\ \overline{H} &= x\partial_x + \frac{1-x\varphi_x}{\varphi_u} \partial_u, \\ \overline{Y} &= x^2\partial_x + \frac{2x-x^2\varphi_x}{\varphi_u} \partial_u.\end{aligned}$$

R

$$\begin{aligned}\overline{X} &= \partial_x - \frac{\varphi_x}{\varphi_u} \partial_u, \\ \overline{H} &= x\partial_x + \frac{1-x\varphi_x}{\varphi_u} \partial_u, \\ \overline{Y} &= x^2\partial_x + \frac{2x\beta - x^2\beta\varphi_x - e^\varphi}{\beta\varphi_u} \partial_u,\end{aligned}$$

де $\varphi = \varphi(x, u)$ — гладка функція, $\varphi_u \neq 0$, а $\beta \in \mathbb{R} \setminus 0$ — константа.

Зауваження 1. *k -тензори, як коваріантні так і контраваріантні, відповідають проєктивним величинам класу (S) коли $\varphi = -\frac{1}{k} \ln |u|$, для коваріантних k -тензорів, і $\varphi = \frac{1}{k} \ln |u|$, для контраваріантних k -тензорів.*

Зауваження 2. *Проективні величини класу (T) відповідають перерізам одномірного розшарування π , в якому задана (нелінійна) зв'язність. Підняття дії алгебри Лі $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ відповідає горизонтальному ліфту векторних полів.*

Теорема 1 справедлива в області, де $\varphi(x, u)$ — гладка функція й $\varphi_u \neq 0$. Дійсно, як буде показано нижче, ці подання в багатьох випадках допускають продовження в ті точки, де

$\varphi_u = 0$, або φ , не визначена, або не диференційовна. Детальне дослідження нормальних форм sl_2 -подань буде дане в п. 4.

Якщо ж $\varphi_u \neq 0$, то пошарове відображення

$$(x, u) \mapsto (x, \varphi(x, u))$$

є локальним дифеоморфізмом і переводить зазначені подання T , R і S в ті ж подання, що відповідають функції $\varphi = u$, або будь-якій функції $\varphi = f(u)$, де $f' \neq 0$.

Якщо взяти $\varphi = \ln |u|$, ми одержимо наступні реалізації, які ми позначимо через T_o , S_o , R_o :

T_o

$$\overline{X} = \partial_x, \quad \overline{Y} = x^2 \partial_x, \quad \overline{H} = x \partial_x,$$

S_o

$$\overline{X} = \partial_x, \quad \overline{Y} = x^2 \partial_x + 2ux \partial_u, \quad \overline{H} = x \partial_x + u \partial_u,$$

R_o

$$\overline{X} = \partial_x, \quad \overline{Y} = x^2 \partial_x + (2ux - \alpha x^2) \partial_u, \quad \overline{H} = x \partial_x + u \partial_u,$$

де $\alpha = \beta^{-1}$.

Відзначимо так само, що подання T_o , S_o , R_o суть подання алгебри Лі $sl_2(\mathbb{R})$ на площині знайдені С. Лі [11].

Відповідні дії sl_2 -дії інтегруються й ми приходимо до наступних модельних дій групи Лі $SL_2(\mathbb{R})$:

T_o

$$\overline{\lambda}_A : (x, u) \mapsto \left(\frac{a_{11}x + a_{12}}{a_{21}x + a_{22}}, u \right),$$

S_o

$$\overline{\lambda}_A : (x, u) \mapsto \left(\frac{a_{11}x + a_{12}}{a_{21}x + a_{22}}, \frac{u}{a_{21}x + a_{22}} \right),$$

R_o

$$\overline{\lambda}_A : (x, u) \mapsto \left(\frac{a_{11}x + a_{12}}{a_{21}x + a_{22}}, \frac{1}{a_{21}x + a_{22}} \cdot \frac{u}{a_{21}(x - \alpha u) + a_{22}} \right),$$

де $A = \|a_{ij}\| \in SL_2(\mathbb{R})$.

3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ІНВАРІАНТИ ПРОЕКТИВНИХ ГЕОМЕТРИЧНИХ ВЕЛИЧИН

У цьому розділі ми знаходимо алгебри диференціальних інваріантів для одновірних проєктивних геометричних величин. Класифікаційна Теорема 1 дозволяє зробити цей опис конструктивним.

На початку нагадаємо [1], [9], [15], що функція

$$f \in C^\infty(J^k \pi),$$

задана в просторі k -джетів розшарування геометричних величин $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, називається диференціальним інваріантом порядку $\leq k$ для заданої дії алгебри $sl_2(\mathbb{R})$, якщо

$$\overline{X}^{(k)}(f) = \overline{Y}^{(k)}(f) = \overline{H}^{(k)}(f) = 0,$$

де $\overline{X}^{(k)}, \overline{Y}^{(k)}, \overline{H}^{(k)}$ — k -е продовження векторних полів $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{H}$.

Зауважимо, що при $k = 0$, функція φ є диференціальним інваріантом для геометричних величин класу (T) , а тому локально будь-який інваріант нульового порядку має вигляд $F(\varphi)$, де F — гладка функція. Неважко також бачити, що для геометричних величин класу (S) й (R) диференціальних інваріантів нульового порядку немає.

3.1. Інваріанти проєктивних геометричних величин класу (T) . Як ми вже бачили функція φ , що входить в опис подань алгебри Лі $sl_2(\mathbb{R})$, для геометричних величин класу (T) є диференціальним інваріантом. З іншої сторони безпосередні обчислення показують, що розмірність $sl_2(\mathbb{R})$ -орбіт у просторі 2-джетів $J^2(\pi)$ дорівнює 3. А оскільки $\dim J^2(\pi) = 4$, то диференціальних інваріантів порядку ≤ 2 , за винятком функції φ , немає. Для того, щоб знайти інваріанти третього порядку нагадаємо, що точкове перетворення $(x, u) \rightarrow (x, \varphi(x, u))$ переводить стандартну реалізацію алгебри $sl_2(\mathbb{R})$, що відповідає $\varphi = u$ в поданні $sl_2(\mathbb{R})$ типу (T) , що відповідає функції $\varphi(x, u)$.

Для стандартної реалізації легко перевірити, що додатковий інваріант третього порядку дається похідною Шварца оберненої функції:

$$\frac{2u_1u_3 - 3u_2^2}{2u_1^4}.$$

Тому, як легко перевірити, у випадку довільної функції $\varphi(x, u)$ диференціальним інваріантом порядку 3 є функція

$$I = \frac{2\frac{d\varphi}{dx}\frac{d^3\varphi}{dx^3} - 3\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)^2}{2\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^4}.$$

З міркувань розмірності слідує, що починаючи з порядку $k = 3$, при переході від k -джетів до $(k + 1)$ -джетів, ми додаємо рівно один диференціальний інваріант і рівно один інваріант ми одержуємо, використовуючи похідну Трессе. Отже, маємо наступний результат:

Теорема 2. *Алгебра диференціальних інваріантів для геометричних величин класу (T) , локально породжена диференціальним інваріантом нульового порядку*

$$I = \varphi(x, u),$$

диференціальним інваріантом третього порядку J , а також всіма похідними Трессе

$$\frac{D^k J}{DI^k} \quad k = 1, 2, \dots$$

Інакше кажучи, локально всякий диференціальний інваріант порядку k має вигляд:

$$F\left(I, J, \frac{DJ}{DI}, \dots, \frac{D^{k-3}J}{DI^{k-3}}\right),$$

де F — гладка функція.

3.2. Інваріанти проєктивних геометричних величин класу (S) . Насамперед зауважимо, що для геометричних величин класу (S) нетривіальних диференціальних інваріантів порядку ≤ 1 немає.

Для знаходження диференціальних інваріантів другого порядку необхідно розв'язати систему рівнянь

$$(10) \quad \overline{X}^{(2)}(F) = \overline{Y}^{(2)}(F) = \overline{H}^{(2)}(F) = 0$$

відносно функції $F \in C^\infty(J^2\pi)$. Тут $\overline{X}^{(2)}$, $\overline{Y}^{(2)}$, $\overline{H}^{(2)}$ — другі продовження векторних полів \overline{X} , \overline{Y} , \overline{H} . Спочатку розглянемо випадок, коли $\varphi = u$. Тоді в стандартних координатах (x, u, u_1, u_2) на $J^2(\pi)$, маємо:

$$\begin{aligned} \overline{X}^{(2)} &= \partial_x, \\ \overline{Y}^{(2)} &= x^2\partial_x + 2x\partial_u - 2(xu_1 - 1)\partial_{u_1} + 2(2xu_2 - u_1)\partial_{u_2}, \\ \overline{H}^{(2)} &= x\partial_x + \partial_u - u_1\partial_{u_1} - 2u_2\partial_{u_2}. \end{aligned}$$

Безпосередні обчислення показують, що загальний розв'язок F цієї системи рівнянь (10) є функцією від

$$e^{2u}(2u_2 + u_1^2).$$

Але, оскільки локальне точкове пошарове перетворення,

$$(x, u) \mapsto (x, \varphi(x, u)),$$

переводить це, модельне, подання в загальне, що відповідає довільній функції $\varphi(x, u)$, то можна чекати, що функція

$$I = e^{2\varphi} \left(2 \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 \right)$$

є розв'язком системи (10).

Безпосередня перевірка показує, що це дійсно так. Тепер з того, що розмірності sl_2 -орбіт у $J^2(\pi)$ дорівнюють 3, а $\dim J^2(\pi) = 4$, випливає, що локально будь-який розв'язок (10) є функцією від I .

Для знаходження інваріантів вищого порядку знайдемо інваріантне диференціювання, скориставшись наступною лемою.

Лема 1. *Для того, щоб диференціювання*

$$\nabla = \lambda \frac{d}{dx} : C^\infty(J^\infty \pi) \longrightarrow C^\infty(J^\infty \pi),$$

де $\lambda \in C^\infty(J^k(\pi))$, було комутативним із продовженням векторних полів \bar{X} , \bar{Y} , \bar{H} , тобто було інваріантним диференціюванням проєктивних геометричних величин, необхідно і достатньо, щоб функція λ задовольняла наступній системі диференціальних рівнянь:

$$(11) \quad \bar{X}^{(k)}(\lambda) = 0, \quad \bar{Y}^{(k)}(\lambda) = 2x\lambda, \quad \bar{H}^{(k)}(\lambda) = \lambda.$$

Доведення.

Нехай V векторне поле на \mathbb{R}^2 :

$$V = A\partial_x + B\partial_u$$

і $\psi = B - Au_1$ його похідна функція, тоді його k -е продовження має вигляд [6, 13]:

$$V^{(k)} = \psi \frac{\partial}{\partial u} + \frac{d\psi}{dx} \frac{\partial}{\partial u_1} + \dots + \frac{d^k \psi}{dx^k} \frac{\partial}{\partial u_k} + A \left(\frac{\partial}{\partial x} + u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + \dots + u_{k+1} \frac{\partial}{\partial u_k} \right).$$

Ми розглянемо нескінченне продовження векторного поля V , як формальне диференціювання вигляду

$$V^\bullet = \Theta_\psi + A \frac{d}{dx} : C^\infty(J^\infty \pi) \longrightarrow C^\infty(J^\infty \pi),$$

де $\Theta_\psi = \psi \frac{\partial}{\partial u} + \frac{d\psi}{dx} \frac{\partial}{\partial u_1} + \dots + \frac{d^k \psi}{dx^k} \frac{\partial}{\partial u_k} + \dots$ — еволюційне диференціювання [6].

Тоді $V^\bullet(F) = V^k(F)$, якщо $F \in C^\infty(J^k)$.

Пряме обчислення показує, що

$$\left[\lambda \frac{d}{dx}, V^\bullet \right] = \left(V^\bullet(\lambda) - \lambda \frac{dA}{dx} \right) \frac{d}{dx}.$$

Інакше кажучи, диференціювання $\lambda \frac{d}{dx}$ комутує з нескінченним продовженням V^\bullet тоді й тільки тоді, коли

$$V^\bullet(\lambda) = \lambda \frac{dA}{dx}.$$

Якщо взяти за векторне поле V наші поля \bar{X} й \bar{Y} ми одержимо твердження леми.

Розв'язуючи систему (11) при $k = 0$, ми отримуємо, що

$$\nabla = e^\varphi \frac{d}{dx}$$

є інваріантним диференціюванням для геометричних величин класу (S) . Підрахунок розмірів показує, що починаючи з порядку $k = 2$ при переході від k -джетів до $(k + 1)$ -джетів додається рівно один диференціальний інваріант, який ми можемо одержати за допомогою інваріантного диференціювання, тому ми приходимо до наступного результату:

Теорема 3. *Алгебра диференціальних інваріантів для проєктивних геометричних величин класу (S) , локально породжена базисним інваріантом другого порядку*

$$I = 2\psi \frac{d^2\psi}{dx^2} - \left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2,$$

і його інваріантними похідними

$$\nabla^k(I) \quad k = 1, 2, \dots,$$

де $\psi = e^\varphi$ й $\nabla = \psi \frac{d}{dx}$. Інакше кажучи, локально диференціальні інваріанти порядку k геометричних величин класу (S) мають вигляд:

$$F\left(I, \nabla I, \dots, \nabla^{(k-2)}(I)\right),$$

де F - гладка функція.

3.3. Інваріанти проєктивних геометричних величин класу (R) . Прямий підрахунок показує, що у геометричних величин класу (R) немає нетривіальних диференціальних інваріантів нульового й першого порядку. Для системи диференціальних рівнянь

$$(12) \quad \overline{X}^{(2)}(F) = \overline{Y}^{(2)}(F) = \overline{H}^{(2)}(F) = 0$$

ми використаємо аналогічний прийом, що й у випадку геометричних величин класу (S) . А саме, розглянемо спочатку випадок коли $\varphi = u$, тоді

$$\begin{aligned} \overline{X}^{(2)} &= \partial_x, \\ \overline{Y}^{(2)} &= x^2 \partial_x + \left(2x - \frac{\epsilon^u}{\beta}\right) \partial_u + \left(2 - 2xu_1 - \frac{\epsilon^u}{\beta} u_1\right) \partial_{u_1} - \\ &\quad - \left(2u_1 + 4xu_2 + \frac{\epsilon^u}{\beta} u_1^2 + \frac{\epsilon^u}{\beta} u_2\right) \partial_{u_2}, \\ \overline{H}^{(2)} &= x \partial_x + \partial_u - u_1 \partial_{u_1} - 2u_2 \partial_{u_2}. \end{aligned}$$

Розв'язуючи систему (12) для цього випадку, знаходимо, що загальний розв'язок є функцією від

$$\frac{(u_2 - u_1^2)e^{2u} + 6\beta u_1 e^u - 4\beta^2}{\left(\beta - u_1 e^u\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Тому, також як і для геометричних величин класу (S) , ми робимо висновок, що функція

$$I = \frac{\psi \frac{d^2 \psi}{dx^2} - 2 \left(\widehat{A}(\varphi)\right)^2 + 6\beta \frac{d\psi}{dx} - 4\beta^2}{\left(\beta - \frac{d\psi}{dx}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

де $\psi = e^\varphi$, є розв'язком системи (12) і всі диференціальні інваріанти 2-го порядку суть функції I .

Для знаходження інваріантів вищого порядку ми використаємо інваріантне диференціювання. Розв'язуючи систему рівнянь (11) для $k = 1$ знаходимо інваріантне диференціювання

$$\nabla = \frac{\psi}{\sqrt{\beta - \frac{d\psi}{dx}}} \widehat{A}(\varphi).$$

Отже, одержуємо наступний результат:

Теорема 4. *Алгебра диференціальних інваріантів геометричних величин класу (R) локально породжена диференціальним інваріантом другого порядку (I) і всіма інваріантними похідними $\nabla^k(I)$, де $k = 1, 2, \dots$. Іншими словами, будь-який диференціальний інваріант порядку k можна подати у вигляді*

$$F\left(I, \nabla I, \dots, \nabla^{(k-3)}(I)\right),$$

де F — гладка функція.

Приклад 1. *Застосовуючи оператор ∇ до інваріанта I ми знаходимо, диференціальний інваріант третього порядку:*

$$\nabla(I) = \frac{\psi^2 \frac{d^3\psi}{dx^3}}{\left(\beta - \frac{d\psi}{dx}\right)^2} + \frac{3\psi^2 \left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2}{2\left(\beta - \frac{d\psi}{dx}\right)^3},$$

де $\psi = e^\varphi$.

4. НОРМАЛЬНІ ФОРМИ Й ДІЇ АЛГЕБРИ ЛІ $sl_2(\mathbb{R})$

В цьому розділі ми приводимо локальну класифікацію 1-мірних геометричних величин над проективною прямою. А саме ми класифікуємо локальні дії алгебри Лі $sl_2(\mathbb{R})$ в розшаруванні геометричних величин $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ відносно псевдогрупи точкових пошарових перетворень, тобто перетворень виду:

$$(x, u) \mapsto (x, F(x, u)).$$

Відзначимо, що локальна класифікація дій алгебри Лі $sl_2(\mathbb{R})$ відносно псевдогрупи всіх локальних дифеоморфізмів \mathbb{R}^2 , була знайдена Софусом Лі [11], і вона складається з трьох класів T_0 , S_0 , R_0 .

Зауважимо, що векторне поле \overline{X} трансверсальне шарам розшарування π , і отже локально має перший інтеграл $h(x, u)$ такий, що $h_u \neq 0$. Вибравши локальний пошаровий дифеоморфізм

$$(x, u) \mapsto (x, h(x, u)),$$

ми переведемо векторне поле \overline{X} в ∂_x . У цьому випадку векторні поля \overline{Y} , \overline{H} набудуть вигляду (1), де $A \equiv 0$.

З рівнянь (4) маємо, що $B_x = H_x = 0$, і функції

$$B = B(u), \quad H = H(u)$$

задовольняють співвідношенню:

$$(13) \quad B - HB_u + H_u B = 0.$$

Відзначимо, що при $B \equiv 0$, довільна функція $H(u)$ задовольняє рівнянню (13).

У цьому випадку

$$\begin{aligned} \overline{X} &= \partial_x, \\ \overline{Y} &= x^2 \partial_x + 2xH \partial_u, \\ \overline{H} &= x \partial_x + H \partial_u, \end{aligned}$$

а класифікація sl_2 -дій зводиться до класифікації векторних полів $H(u)\partial_u$ щодо локальних дифеоморфізмів

$$u \mapsto F(u).$$

Як добре відомо, одномірні ненульові векторні поля в околі точки $u = 0$ локально еквівалентні (відносно псевдогрупи локальних дифеоморфізмів прямої) векторним полям з наступного переліку

$$\partial_u, \quad \lambda u \partial_u, \quad \pm u^k \partial_u, \quad \alpha(u) \partial_u,$$

где $\lambda \in \mathbb{R} \setminus 0$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, а $\alpha(u)$ — плоска в нулі функція. Тому, у цьому випадку, в околі точки $(x = 0, u = 0)$, ми одержуємо наступні нормальні форми:

- 1) $\overline{H} = x\partial_x$,
якщо $H = 0$.
- 2) $\overline{H} = x\partial_x + \partial_u$,
якщо $H(0) \neq 0$.
- 3) $\overline{H} = x\partial_x + \lambda u\partial_u$,
якщо $H(0) = 0$, але $H'(0) = \lambda \neq 0$.
- 4) $\overline{H} = x\partial_x + u^{2k}\partial_u$,
якщо $H(0) = \dots = H^{2k-1}(0) = 0$, але $H^{(2k)}(0) \neq 0$.
- 5) $\overline{H} = x\partial_x \pm u^{2k+1}\partial_u$,
якщо $H(0) = \dots = H^{2k}(0) = 0$, але $H^{(2k+1)}(0) \neq 0$.
- 6) $\overline{H} = x\partial_x + \lambda u\partial_u$,
якщо $\lambda(u)$ плоска в нулі функція, тобто $\lambda^{(i)}(0) = 0$, $i = 0, 1, \dots$.

Нехай тепер $B \neq 0$, і $H(0) \neq 0$. Тоді векторне поле $H(u)\partial_u$ локальним дифеоморфізмом зводиться до вигляду ∂_u ; тобто ми можемо вважати $H \equiv 1$. Тоді $B - B_u = 0$, і $B = Ce^u$. Трансляцією $u \mapsto u + \text{const}$ ми можемо перевести функцію $B = Ce^u$ у функцію $\pm e^u$ й отже

$$\begin{aligned}\overline{H} &= x\partial_x + \partial_u, \\ \overline{Y} &= x^2\partial_x + (\pm e^u + 2x)\partial_u.\end{aligned}$$

Нарешті, якщо $H(0) = 0$, але $B(0) \neq 0$, то подавши функцію H у вигляді $H = \psi B$, одержуємо $B\psi_u + 1 = 0$, або

$$B = -\frac{1}{\psi_u}, \quad H = -\frac{\psi}{\psi_u}.$$

Ми розглянемо тільки випадок, коли векторне поле $H(u)\partial_u$ має нуль кінцевого порядку. У цьому випадку векторне поле $H(u)\partial_u$ можна звести до нормальної форми $\lambda u\partial_u$, якщо $H'(0) = \lambda \neq 0$, або до вигляду $\pm u^k\partial_u$, якщо

$$H(0) = \dots = H^{(k-1)}(0) = 0, \quad H^{(k)}(0) \neq 0, \quad k \geq 0.$$

Інтегруючи рівняння $H = -\frac{\psi}{\psi_u}$ відносно ψ , і припускаючи, що ψ має одну із зазначених вище нормальних форм, ми одержуємо:

$$\psi(u) = Ce^{-\int \frac{du}{H}}$$

і

$$B = -\frac{1}{\psi_u} = \frac{1}{C}He^{-\int \frac{du}{H}}.$$

Отже, гладкий розв'язок $B(u)$ існує тільки у випадку, коли $H(u)$ має нуль першого порядку, тобто

$$H(u) = \lambda u, \quad \lambda \neq 0.$$

Тоді

$$\psi(u) = Cu^{-\frac{1}{\lambda}},$$

і

$$B = \frac{\lambda}{C}u^{1+\frac{1}{\lambda}}.$$

Отже, для того щоб функція $B(u)$ була гладкою в нулі показник степеня $(1 + \frac{1}{\lambda})$ повинен бути натуральним числом.

Нехай $n = 1 + \frac{1}{\lambda} \in \mathbb{N}$, тоді

$$\lambda = \frac{1}{n-1}, \quad H(u) = \frac{u}{n-1}, \quad B(u) = Cu^n,$$

$n = 0, 2, 3, \dots$ Масштабні перетворення

$$u \mapsto tu, \quad t \neq 0,$$

зберігають векторне поле $H(u)\partial_u$, але переводять поле

$$B(u)\partial_u = Cu^n\partial_u$$

в поле $Ct^{n-1}u^n\partial_u$. Тому, залежно від парності n , векторне поле $B(u)\partial_u$ може бути переведене в поле $u^n\partial_u$, якщо n - парне, або в поле $\pm u^n\partial_u$, якщо n - непарне.

Інакше кажучи, ми одержуємо наступні нормальні форми:

$$\bar{H} = x\partial_x + \frac{u}{n-1}\partial_u, \quad \bar{Y} = x^2\partial_x + (u^n + \frac{2ux}{n-1})\partial_u,$$

якщо n - парне, і

$$\bar{H} = x\partial_x + \frac{u}{n-1}\partial_u, \quad \bar{Y} = x^2\partial_x + (\pm u^n + \frac{2ux}{n-1})\partial_u,$$

якщо n — непарне, і $n \neq 1$.

Для того, щоб виключити з розгляду випадки плоских векторних полів (тобто випадки, коли функція $H(u)$ — плоска в нулі) ми обмежимося тільки геометричними величинами кінцевого порядку, тобто тими випадками, коли функція $H(u)$ має нуль кінцевого порядку. Для таких величин ми одержуємо наступний класифікаційний результат.

Теорема 5. *Проективні геометричні величини кінцевого порядку в околі точки $(0,0)$ локально еквівалентні, відносно псевдогрупи поширових точкових перетворень, геометричним величинам, що відповідають поданням алгебри Лі $sl_2(\mathbb{R})$ з наступного списку:*

$$\begin{array}{lll} T_1) & \bar{X} = \partial_x, \quad \bar{Y} = x^2\partial_x, & \bar{H} = x\partial_x, \\ S_1) & \bar{X} = \partial_x, \quad \bar{Y} = x^2\partial_x + 2x\partial_u, & \bar{H} = x\partial_x + \partial_u, \\ S_2) & \bar{X} = \partial_x, \quad \bar{Y} = x^2\partial_x + 2\lambda x\partial_u, & \bar{H} = x\partial_x + \lambda u\partial_u, \\ & & \text{де } \lambda \neq 0. \\ S_3) & \bar{X} = \partial_x, \quad \bar{Y} = x^2\partial_x + 2xu^{2k}\partial_u, & \bar{H} = x\partial_x + u^{2k}\partial_u, \\ & & \text{де } k \in \mathbb{N}. \\ S_4) & \bar{X} = \partial_x, \quad \bar{Y} = x^2\partial_x \pm 2xu^{2k+1}\partial_u, & \bar{H} = x\partial_x \pm u^{2k+1}\partial_u, \\ & & \text{де } k \in \mathbb{N}. \\ S_5) & \bar{X} = \partial_x, \quad \bar{Y} = x^2\partial_x + \left(\frac{2ux}{2k-1} + u^{2k}\right)\partial_u, & \bar{H} = x\partial_x + \frac{u}{2k-1}\partial_u, \\ & & \text{де } k \in \mathbb{N}. \\ S_6) & \bar{X} = \partial_x, \quad \bar{Y} = x^2\partial_x + \left(\frac{ux}{k} \pm u^{2k+1}\right)\partial_u, & \bar{H} = x\partial_x + \frac{u}{2k}\partial_u, \\ & & \text{де } k \in \mathbb{N}, \quad k > 0. \\ R_{\pm}) & \bar{X} = \partial_x, \quad \bar{Y} = x^2\partial_x + (2x \pm e^u)\partial_u, & \bar{H} = x\partial_x + \partial_u, \end{array}$$

5. ЗАСТОСУВАННЯ ДО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

У цьому розділі ми обговоримо застосування описаних вище структур алгебр диференціальних інваріантів до звичайних диференціальних рівнянь. Насамперед відзначимо, що функція φ , що входить в опис $sl_2(\mathbb{R})$ -подань класів R, S, T , є першим інтегралом векторного поля \overline{X} . З іншого боку, співвідношення $[\overline{H}, \overline{X}] = \overline{X}$ показує, що розподіл на площині \mathbb{R}^2 , породжуваний векторним полем \overline{X} , допускає симетрію. Для подань класів R і S векторні поля $\overline{X}, \overline{H}$ лінійно незалежні, і тому інтеграли \overline{X} , можуть бути знайдені квадратурами [10]. Тим самим дія групи Лі $SL_2(\mathbb{R})$ для подань класів R і S знаходиться квадратурами. Для подань класу T це справедливо, якщо відомо перший інтеграл векторного поля \overline{X} .

5.1. Проективні геометричні величини класу (T) . У цьому випадку кожний диференціальний інваріант

$$F\left(I, J, \frac{DJ}{DI}, \dots, \frac{D^k J}{DI^k}\right)$$

порядку $(k + 3)$ визначає звичайне диференціальне рівняння

$$(14) \quad F\left(I, J, \frac{DJ}{DI}, \dots, \frac{D^k J}{DI^k}\right) = \text{const.}$$

Алгебра Лі $sl_2(\mathbb{R})$, разом з поданням класу T , є алгеброю точкових симетрій (14). Ми будемо припускати, що перші інтеграли векторного поля \overline{X} відомі, і тому відома дія групи $SL_2(\mathbb{R})$. Це означає, що для розв'язків (14) загального положення, тобто таких розв'язків, які не є інваріантними щодо ненульових елементів алгебри $sl_2(\mathbb{R})$, ми можемо за допомогою квадратур вказати 3 - параметричне сімейство розв'язків (14). А саме, $sl_2(\mathbb{R})$ -орбіту обраного розв'язку.

Припустимо, що рівняння (14), як диференціальне рівняння в похідних Трессе, має розв'язок:

$$(15) \quad J = F(I).$$

Це співвідношення можна розглядати, як диференціальне рівняння $J - F(I) = 0 \subset J^3(\pi)$ 3-го порядку для проєктивних геометричних величин класу T . Розмір простору розв'язків такого рівняння дорівнює 3, і тому знання одного частинного розв'язку разом з $SL_2(\mathbb{R})$ -дією, дозволяє знайти загальний розв'язок рівняння (15).

Вибравши координати (x, u) таким чином, щоб $\varphi(x, u) = u$, ми можемо записати це рівняння у вигляді:

$$(16) \quad \tilde{S}(y) = F(y),$$

де

$$\tilde{S}(y) = \frac{y'y''' - \frac{3}{2}y''^2}{y'^4},$$

та $u = y(x)$. Оскільки $y' \neq 0$, то, принаймні локально, ми можемо перейти до оберненої функції $x = x(y)$.

Неважко перевірити, що

$$\tilde{S}(y) = -S(x),$$

де $S(x) = \frac{x'x''' - \frac{3}{2}x''^2}{x'^2}$ — похідна Шварца, тому рівняння (16) для оберненої функції $x = x(y)$ має вигляд

$$(17) \quad S(x) = -F(y).$$

З іншого боку, теорема Шварца [8] стверджує, що загальний розв'язок рівняння (17) має вигляд

$$x(y) = \frac{z_1(y)}{z_2(y)},$$

де $z_1(y)$ й $z_2(y)$ - лінійно незалежні розв'язки лінійного рівняння Шрьодінгера:

$$z'' = \frac{1}{2}F(y)z.$$

Таким чином, інтегрування диференціальних рівнянь виду (15) еквівалентно інтегруванню лінійних рівнянь Шрьодінгера з потенціалом $-\frac{1}{2}F$. Зокрема, якщо потенціал інтегруємо (у змісті [6]), то інтегрування (15) може бути зведене до квадратур.

Це наприклад так, коли потенціал є розв'язком стаціонарного рівняння Кортвега-де Вріза, або його вищих аналогів [12].

Твердження 1. *Припустимо, що диференціальне рівняння (14), для проєктивних величин класу T , як диференціальне рівняння в похідних Трессе, є стаціонарним рівнянням Кортвега-де Вріза, або його вищим аналогом. Тоді рівняння (14), як рівняння на проєктивні геометричні величини, інтегрується у квадратурах.*

Приклад 2. *Диференціальне рівняння 6-ого порядку*

$$u_1^3(u_1u_6 - 15u_2u_5) + u_1^2(99u_2^2 - 16u_1u_3)u_4 + \\ + u_1u_2u_3(96u_1u_3 - 390u_2^2) + 234u_2^5 = 0$$

допускає $sl_2(\mathbb{R})$ -алгебру симетрії класу T і $\varphi = u$. Якщо записати його в диференціальних інваріантах, то воно зводиться до рівняння Кортвега-де Вріза:

$$\frac{D^3 J}{DI^3} + 6J \frac{DJ}{DI} = 0$$

і тому інтегрується у квадратурах.

5.2. Проєктивні геометричні величини класів (R) и (S) .

Для геометричних величин класів (R) і (S) кожний диференціальний інваріант

$$F(J, \nabla J, \dots, \nabla^k J)$$

визначає диференціальне рівняння порядку $(k + 2)$

$$(18) \quad F(J, \nabla J, \dots, \nabla^k J) = const,$$

яке допускає алгебру Лі $sl_2(\mathbb{R})$, як алгебру точкових симетрій.

Зауважимо, що у випадку геометричних величин класів (R) і (S) дія алгебри Лі $sl_2(\mathbb{R})$ інтегрується у квадратурах, і тим самим дія групи Лі $SL_2(\mathbb{R})$ може бути знайдена у квадратурах.

Тому, диференціальні рівняння 3-го порядку

$$(19) \quad F(J, \nabla J) = C$$

можуть бути проінтегровані у квадратурах, якщо відомі частинні розв'язки (19).

Такі розв'язки можна знайти таким способом.

Диференціальні рівняння 2-ого порядку

$$(20) \quad J = C_1$$

допускають 3-мірну алгебру симетрій $sl_2(\mathbb{R})$, і тому будь-яка 2-мірна розв'язна підалгебра (скажемо, підалгебра, що породжена \overline{X} і \overline{H}) дозволяє проінтегрувати (20) у квадратурах [10].

Тому, ми можемо шукати частинні розв'язки рівняння (19) серед розв'язків рівнянь (20), за умови, що постійні C і C_1 зв'язані співвідношенням:

$$F(C_1, 0) = C.$$

Метод інтегрування загальних рівнянь (18) полягає в знаходженні загального розв'язку (18), розглянутого як рівняння щодо інваріантного диференціювання ∇ , у вигляді (20).

Для цього введемо проєктивний параметр s , що назвемо проєктивним параметром, так, щоб $\nabla = \frac{d}{ds}$. Тоді рівняння (18) можна формально записати у вигляді:

$$(21) \quad F\left(J, \frac{dJ}{ds}, \dots, \frac{d^k J}{ds^k}\right) = C.$$

Припустимо, що $J = f(s)$ є розв'язком (21), тоді, диференціюючи, одержуємо

$$J = f(s), \quad \nabla J = f'(s),$$

і виключаючи s , приходимо до рівняння виду (20), що вже інтегрується у квадратурах.

Приклад 3. *Класичні рівняння Чазі (Chazy) (див. наприклад [7]) мають вигляд (19) для випадку проєктивних геометричних величин класу (R), при відповідному виборі функції*

φ и параметра β . Тому рівняння виду (19) як для геометричних величин класу (R) так і для величин класу (T) ми називаємо узагальненими рівняннями Чазі. Як було показано вище ці рівняння інтегруються у квадратурах, якщо рівняння $F(C_1, 0) = C$ мають розв'язки відносно постійної C_1 .

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Д. В. Алексеевский, А. М. Виноградов, В. В. Лычагин. Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. // Геометрия-1, Т.28. — Москва, — 1988.
- [2] О. Веблен, Дж. Уайтхед. Основания дифференциальной геометрии // М., ИЛ, — 1949.
- [3] Ф. Клейн. Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований // В кн.: Об основаниях геометрии, Рр.399–434.
- [4] Н. Г. Коновенко. Алгебры дифференциальных инвариантов на проективной прямой // Геометрия в Астрахани - 2007, Тезисы докладов II Международного семинара "Симметрии: теоретический и методический аспекты", Изд. дом "Астраханский университет", — 2007, Рр.33–35.
- [5] Н. Г. Коновенко. Алгебры дифференциальных инвариантов геометрических величин на аффинной прямой // в печати.
- [6] И. С. Красильщик, В. В. Лычагин, А. В. Виноградов. Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений // Москва, "Наука" — 1986.
- [7] P. A. Clarkson, P. J. Olver. Symmetry and Chazy equation. // Journal of Diff. equations, vol. 124 — 1996, Рр. 225-246.
- [8] E. Hill. Ordinary Differential Equations in Complex Domain //, John Willey, N.Y. — 1976.
- [9] A. Kumpera. Invariants différentiels d'un pseudogroupe de Lie. I-II. // J. Differential Geometry **10** (1975), no. 2, 289–345; **10** (1975), no. 3, Рр.347–416.
- [10] A. Kushner, V. Lychagin, V. Roubtsov. Contact geometry and non-linear differential equations // Cambridge University Press — 2007.
- [11] S. Lie. Klassifikation und Integration von gewöhnlichen x, y, die eine Gruppe von Transformationen gestatten I,II // Math. Ann. **32** (1888) Рр.213-281.
- [12] V. V. Lychagin, O. V. Lychagina. Finite dimensional dynamics for evolutionary equations // Nonlinear Dynamics (2007) **48** Рр.29-48.

-
- [13] *P. Olver*. Applications of Lie groups to differential equations // Graduate Texts in Mathematics, **107**, Springer-Verlag, New York — 1986.
 - [14] *L. V. Ovsianikov*. Group analysis of differential equations // Russian: Nauka, Moscow — 1978; Engl. transl.: Academic Press, New York — 1982.
 - [15] *A. Tresse*. Sur les invariants différentiels des groupes continus de transformations// Acta Math. **18** — 1894, 1–88.

В. М. Прокіп

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
НАН України, м. Львів
E-mail: vprokip@mail.ru*

Про трикутні унітальні дільники многочленних матриць над факторіальною областю

Встановлено умови існування унітальних трикутних дільників многочленних матриць над факторіальною областю.

Установлены условия существования унитарных треугольных делителей многочленных матриц над факториальной областью.

We establish conditions for existence of monic triangular divisors of polynomial matrices over a factorial domain.

Ключові слова: *monic divisor, polynomial matrix, factorial domain*

Нехай R факторіальна область з одиницею e , $R_{n,m}$ і $R_{n,m}[x]$ множини $n \times m$ матриць над кільцем R та над кільцем многочленів $R[x]$ відповідно; I_n – одинична матриця порядку n . Надалі через LR_n та $LR_n[x]$ позначатимемо кільця $n \times n$ нижніх трикутних матриць над R та $R[x]$ відповідно, а під записом (a, b) будемо розуміти найбільший спільний дільник (н.с.д.) ненульових елементів $a, b \in R$.

В даній статті розглядається задача про зображення неособливої матриці $A(x) \in R_{n,n}[x]$ у вигляді добутку

$$A(x) = B(x)C(x), \quad (1)$$

© В. М. Прокіп, 2009

де

$$B(x) = \begin{bmatrix} b_1(x) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ b_{21}(x) & b_2(x) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1}(x) & b_{n2}(x) & \dots & b_{n,n-1}(x) & b_n(x) \end{bmatrix} \in LR_n[x] \quad (2)$$

– нижня трикутна унітальна многочленна матриця степеня r ($1 \leq r \leq \deg A(x)$), тобто $b_i(x)$ унітальні многочлени степеня r для всіх $i = 1, 2, \dots, n$ і $\deg b_{ij}(x) < \deg b_i(x)$ для всіх $j < i$, $j = 1, 2, \dots, n-1$. Нагадаємо, що матрицю $B(x)$ можна записати у вигляді $B(x) = I_n x^r + B_1 x^{r-1} + \dots + B_r$, де $B_l \in LR_n$ для всіх $l = 1, 2, \dots, r$. Очевидно також, що $\det B(x) = b_1(x)b_2(x) \dots b_n(x)$.

В такій постановці дана задача є надзвичайно складною в розумінні вказання необхідних та достатніх умов існування такої факторизації (див. [1]). В цій статті встановлено умови, за яких для неособливої матриці $A(x) \in R_{n,n}[x]$ існує факторизація виду (1) з умовою (2), у випадку, коли матриці $B(x)$ і $C(x)$ мають взаємно прості визначники. Крім цього вказано умови, за яких для неособливої матриці $A(x)$ існують блочно-трикутні унітальні дільники. Відзначимо, що дана стаття є продовженням досліджень, які розпочаті в роботах [2], [3].

Матриці $A(x) \in R_{n,n}[x]$ поставимо у відповідність матриці

$$A_1(x) = [a_{11}(x) \quad a_{12}(x) \quad \dots \quad a_{1n}(x)] \in R_{1,n}[x],$$

$$A_k(x) = \begin{bmatrix} & A_{k-1}(x) & \\ a_{k1}(x) & a_{k2}(x) & \dots & a_{kn}(x) \end{bmatrix} \in R_{k,n}[x],$$

де $1 < k \leq n$. Тепер через $a_i(x)$ позначимо н.с.д. мінорів i -го порядку матриць $A_i(x)$ для всіх $i = 1, 2, \dots, n$. Очевидно, що $A_n(x) = A(x)$ і $a_n(x) = \det A(x)$.

Нехай для неособливої матриці $A(x) \in R_{n,n}[x]$ існує факторизація (1) з умовою (2). Неважко переконатись в тому, що

$$\begin{cases} a_1(x) = b_1(x)c_1(x), \\ a_k(x) = a_{k-1}(x)b_k(x)c_k(x), \quad k = 2, 3, \dots, n; \end{cases} \quad (3)$$

де $b_k(x) = x^r + b_{k1}x^{r-1} + \dots + b_{kr} \in R[x]$ і $1 \leq r \leq \deg A(x)$.

Зрозуміло, що виконання умов (3) є необхідною умовою існування для матриці $A(x)$ факторизації (1) з умовою (2). В цьому зв'язку об'єктом нашого дослідження будуть неособливі матриці $A(x)$ із $R_{n,n}[x]$, для яких має місце система рівностей (3). Матриці $A(x) \in R_{n,n}[x]$, яку запишемо у вигляді $A(x) = A_0x^s + A_1x^{s-1} + \dots + A_s$, та многочлену $d(x) = x^{rn} + d_1x^{rn-1} + \dots + d_{rn}$ поставимо у відповідність матриці

$$M = \left[\begin{array}{cccccc} A_0 & A_1 & \dots & A_s & & \\ & A_0 & A_1 & \dots & A_s & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & A_0 & A_1 & \dots & A_s \\ I_n & I_n d_1 & \dots & I_n d_{nr} & & & \\ & I_n & I_n d_1 & \dots & I_n d_{nr} & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & & I_n & I_n d_1 & \dots & I_n d_{nr} \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \vphantom{\left[\right.} \\ \vphantom{\left[\right.} \\ \vphantom{\left[\right.} \\ \vphantom{\left[\right.} \\ \vphantom{\left[\right.} \\ \vphantom{\left[\right.} \\ \vphantom{\left[\right.} \end{array} \right\} \begin{array}{l} (n-1)r \\ \\ \\ s-r \\ \end{array} \right\} ,$$

$$N = \left[\begin{array}{cccccc} A_0 d_1 - A_1 & \dots & A_0 d_s - A_s & A_0 d_{s+1} & \dots & A_0 d_{rn} & \underbrace{O \dots O}_t \end{array} \right],$$

де $t = nr + s - r - \max\{s, rn\}$, O – нульова матриця порядку n . На незаповнених місцях в матриці M знаходяться нулі (див. також [2]).

Теорема 1. *Припустимо, що для неособливої матриці $A(x) \in R_{n,n}[x]$ виконуються умови*

$$\begin{cases} a_1(x) = b_1(x)c_1(x), \\ a_k(x) = a_{k-1}(x)b_k(x)c_k(x), \quad k = 2, 3, \dots, n; \end{cases}$$

де $b_k(x) = x^r + b_{k1}x^{r-1} + \dots + b_{kr} \in R[x]$. Нехай, далі,

$$d(x) = b_1(x)b_2(x) \dots b_n(x).$$

Якщо $(b_i(x), c_j(x)) = e$ для всіх $i = 1, 2, \dots, n$ та $j = 1, 2, \dots, n$, то для матриці $A(x)$ існує факторизація

$$A(x) = B(x)C(x)$$

така, що

$$B(x) = \begin{bmatrix} b_1(x) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ b_{21}(x) & b_2(x) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1}(x) & b_{n2}(x) & \dots & b_{n,n-1}(x) & b_n(x) \end{bmatrix} \in LR_n[x]$$

– унітальна многочленна матриця степеня $r \geq 1$ і

$$\deg b_{ij}(x) < \deg b_i(x)$$

для всіх $j < i$, тоді і тільки тоді, коли матричне рівняння $ZM = N$ розв'язне. Якщо ж шуканий дільник $B(x)$ існує, то він однозначно визначається набором многочленів $\{b_1(x), b_2(x), \dots, b_n(x)\}$.

Доведення. Необхідність випливає з теореми 1 роботи [2].

Достатність. Нехай рівняння $ZM = N$ розв'язне. На підставі теореми 1 із [2] для матриці $A(x)$ існує факторизація

$$A(x) = B(x)C(x)$$

така, що $B(x) \in R_{n,n}[x]$ – унітальна многочленна матриця степеня r із визначником

$$\det B(x) = d(x) = b_1(x)b_2(x) \cdots b_n(x).$$

Крім цього, матриця $B(x)$ однозначно визначається многочленом $d(x)$.

Оскільки R область цілісності, то R міститься в деякому полі P (зокрема в полі часток кільця R), тобто $R \subset P$. Для матриці $A(x) \in P_{n,n}[x]$ існує матриця $W(x) \in GL(n, P)$ така, що

$$A(x)W(x) = H(x) = \begin{bmatrix} h_{11}(x) & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ h_{21}(x) & h_{22}(x) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ h_{31}(x) & h_{32}(x) & h_{33}(x) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n1}(x) & h_{n2}(x) & h_{n3}(x) & \dots & h_{n,n-1}(x) & h_{nn}(x) \end{bmatrix} \in LR_n[x],$$

де $\deg h_{ij}(x) < \deg h_{ii}(x)$ для всіх $1 \leq j < i \leq n$, тобто матриця $H(x)$ є нормальною формою Ерміта матриці $A(x) \in P_{n,n}[x]$ (див. [4]).

Так як над матрицею $A(x) \in P_{n,n}[x]$ ми виконуємо елементарні перетворення з її стовпчиками, то неважко переконатись в тому, що многочлени $a_k(x)$ і $h_{kk}(x)$ асоційовані над полем P . Отже,

$$h_{kk}(x) = b_k(x)g_{kk}(x); \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Доведемо, що для матриці $H(x)$ існує факторизація

$$H(x) = D(x)G(x), \quad (4)$$

де

$$D(x) = \begin{bmatrix} b_1(x) & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ d_{21}(x) & b_2(x) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ d_{31}(x) & d_{32}(x) & b_3(x) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1}(x) & d_{n2}(x) & d_{n3}(x) & \dots & d_{n,n-1}(x) & b_n(x) \end{bmatrix} \in LR_n[x],$$

$$G(x) = \begin{bmatrix} g_{11}(x) & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ g_{21}(x) & g_{22}(x) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ g_{31}(x) & g_{32}(x) & g_{33}(x) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n1}(x) & g_{n2}(x) & g_{n3}(x) & \dots & g_{n,n-1}(x) & g_{nn}(x) \end{bmatrix} \in LR_n[x],$$

а $d_{ij}(x)$ та $g_{ij}(x)$ деякі многочлени із $P[x]$, причому

$$\deg d_{ij}(x) < \deg b_i(x)$$

для всіх $1 \leq j < i \leq n$.

Помноживши в правій частині рівності (4) $D(x)$ на перший стовпчик матриці $G(x)$ здобуємо систему рівностей

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1(x)g_{11}(x) = h_{11}(x), \\ d_{21}(x)g_{11}(x) + b_2(x)g_{21}(x) = h_{21}(x), \\ d_{31}(x)g_{11}(x) + d_{32}(x)g_{21}(x) + b_3(x)g_{31}(x) = h_{31}(x), \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ d_{n1}(x)g_{11}(x) + d_{n2}(x)g_{21}(x) + \dots + b_n(x)g_{n1}(x) = h_{n1}(x). \end{array} \right.$$

Так як $(b_1(x), g_{jj}(x)) = e$ для всіх $1 \leq j \leq n$, то ця система рівнянь розв'язна. Зрозуміло, що многочлени $d_{k1}(x)$ можна вибрати так, що $\deg d_{k1}(x) < \deg b_k(x)$ для всіх $2 \leq k \leq n$.

Продовжуючи аналогічні міркування з решту стовпчиками матриці $G(x)$ і враховуючи те, що $(b_i(x), g_{jj}(x)) = e$ для всіх $i = 1, 2, \dots, n$ та $j = 1, 2, \dots, n$, в кінцевому результаті здобуваємо, що матриця $H(x)$ допускає факторизацію

$$H(x) = D(x)G(x),$$

де

$$D(x) = \begin{bmatrix} b_1(x) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ d_{21}(x) & b_2(x) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1}(x) & d_{n2}(x) & \dots & d_{n,n-1}(x) & b_n(x) \end{bmatrix}$$

– нижня трикутна унітальна многочленна матриця степеня r з елементами $b_i(x)$ на головній діагоналі і

$$\deg d_{ij}(x) < \deg b_i(x), \quad j < i.$$

Так як $(\det D(x), \det G(x)) = e$, то на підставі наслідку 5 із [5] унітальна матриця $D(x) \in P_{n,n}[x]$ однозначно визначена многочленом

$$d(x) = b_1(x)b_2(x) \cdots b_n(x).$$

Отже, для матриці $A(x) \in P_{n,n}[x]$ існують факторизації

$$A(x) = B(x)C(x) = D(x)F(x),$$

де $F(x) = G(x)W^{-1}(x)$. Очевидно, що матриця $B(x)$ теж однозначно визначена многочленом $d(x)$ над полем P . На підставі наслідку 5 із [5] здобуваємо $B(x) = D(x) \in LR_n[x]$, що і доводить теорему. \square

Із доведення достатності теореми 1 отримуємо наступне твердження, які сформулюємо вигляді.

Наслідок 1. Припустимо, що для неособливої матриці $A(x) \in R_{n,n}[x]$ виконуються умови

$$\begin{cases} a_1(x) = b_1(x)c_1(x), \\ a_k(x) = a_{k-1}(x)b_k(x)c_k(x), \quad k = 2, 3, \dots, n; \end{cases}$$

де $b_k(x) = x^r + b_{k1}x^{r-1} + \dots + b_{kr} \in P[x]$ і $r \geq 1$. Якщо $(b_i(x), c_j(x)) = e$ для всіх $i = 1, 2, \dots, n$ та $j = 1, 2, \dots, n$, то для матриці $A(x)$ існує факторизація

$$A(x) = B(x)C(x)$$

така, що

$$B(x) = \begin{bmatrix} b_1(x) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ b_{21}(x) & b_2(x) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1}(x) & b_{n2}(x) & \dots & b_{n,n-1}(x) & b_n(x) \end{bmatrix} \in LP_n[x]$$

– унітальна многочленна матриця степеня r і

$$\deg b_{ij}(x) < \deg b_i(x)$$

для всіх $j < i$. Якщо ж шуканий дільник $B(x)$ існує, то він однозначно визначається набором многочленів

$$\{b_1(x), b_2(x), \dots, b_n(x)\}.$$

В роботах [2], [3] встановлені умови, за яких для неособливої матриці $A(x) \in R_{n,n}[x]$ існує унітальний дільник $B(x)$ із заданим визначником $\det B(x) = b(x)$. Нижче вкажемо умови, за яких для матриці $A(x)$ існують блочно-трикутні унітальні дільники.

Теорема 2. Нехай неособлива матриця $A(x) \in R_{n,n}[x]$ допускає факторизації

$$A(x) = \begin{bmatrix} B_1(x) & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{bmatrix} C_1(x) = B(x)C(x), \quad (5)$$

де $B_1(x) \in R_{k,k}[x]$ та $B(x) \in R_{n,n}[x]$ – унітальні многочленні матриці степеня r . Якщо $(\det B_1(x), \det C(x)) = e$, то

$$B(x) = \begin{bmatrix} B_1(x) & 0 \\ B_{21}(x) & B_2(x) \end{bmatrix},$$

де $B_2(x) \in R_{n-k,n-k}[x]$ – унітальна многочленна матриця степеня r .

Доведення. Так як $(\det B_1(x), \det C(x)) = e$, то з рівності (5) здобуваємо, що $\det B_1(x)$ є дільником $\det B(x)$, тобто

$$\det B(x) = b_2(x) \cdot \det B_1(x).$$

Матрицю $B(x)$ запишемо у вигляді

$$B(x) = \begin{bmatrix} B_{11}(x) & B_{12}(x) \\ B_{21}(x) & B_{22}(x) \end{bmatrix},$$

де $B_{11}(x) \in R_{k,k}[x]$, $B_{22}(x) \in R_{n-k,n-k}[x]$. Очевидно, що $B_{11}(x)$ і $B_{22}(x)$ – унітальні многочленні матриці степеня r . Тепер рівність (5) запишемо так

$$\begin{bmatrix} B_1(x) & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{bmatrix} C_1(x) = \begin{bmatrix} B_{11}(x) & B_{12}(x) \\ B_{21}(x) & B_{22}(x) \end{bmatrix} C(x).$$

Звідси здобуваємо

$$\begin{bmatrix} I_k \cdot \det B_1(x) & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{bmatrix} C_1(x) C^*(x) = \begin{bmatrix} B_1^*(x) & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11}(x) & B_{12}(x) \\ B_{21}(x) & B_{22}(x) \end{bmatrix} \det C(x), \quad (6)$$

де $C^*(x)$ та $B_1^*(x)$ взаємні матриці до матриць $C(x)$ та $B_1(x)$ відповідно. Оскільки $(\det B_1(x), \det C(x)) = e$, то з рівності (6) випливає

$$B_1^*(x) \cdot [B_{11}(x) \ B_{12}(x)] = 0 \pmod{\det B_1(x)}. \quad (7)$$

Так як $\deg B_1^*(x) = r(k-1)$ і $\deg B_1(x) > \deg B_{12}(x)$, то

$$\deg[B_1^*(x)B_{12}(x)] \leq kr - 1 < \deg \det B_1(x).$$

Отже, рівність (7) можлива лише у випадку, коли

$$B_{12}(x) = 0.$$

Оскільки $\deg[B_1^*(x)B_{11}(x)] = kr$, то з рівності

$$B_1^*(x)B_{11}(x) = 0 \pmod{\det B_1(x)}$$

отримуємо $B_1(x) = B_{11}(x)$. Поклавши $B_{22}(x) = B_2(x)$, матрицю $B(x)$ запишемо у вигляді $B(x) = \begin{bmatrix} B_1(x) & 0 \\ B_{21}(x) & B_2(x) \end{bmatrix}$, що і доводить теорему. \square

Теорема 3. *Нехай неособлива матриця $A(x) \in R_{n,n}[x]$ допускає факторизації*

$$A(x) = \begin{bmatrix} B_1(x) & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{bmatrix} C_1(x) = B(x)C(x),$$

де $B_1(x) \in R_{k,k}[x]$ та $B(x) \in R_{n,n}[x]$ – унітальні многочленні матриці степеня r . Нехай, далі,

$$(\det B_1(x), \det C_1(x), d_A(x)) = e,$$

$$(\det B(x), \det C(x), d_A(x)) = e,$$

де $d_A(x)$ – н.с.д. мінорів $(n-1)$ -го порядку матриці $A(x)$. Якщо $\det B_1(x)$ є дільником $\det B(x)$, тобто

$$\det B(x) = b_2(x) \cdot \det B_1(x),$$

то

$$B(x) = \begin{bmatrix} B_1(x) & 0 \\ B_{21}(x) & B_2(x) \end{bmatrix},$$

де $B_2(x) \in R_{n-k,n-k}[x]$ – унітальна многочленна матриця степеня r .

Доведення. Нехай P – поле, яке містить факторіальну область R , тобто $R \subset P$. Так як

$$(\det B_1(x), \det C_1(x), d_A(x)) = e,$$

$$(\det B(x), \det C(x), d_A(x)) = e$$

$$\det B(x) = b_2(x) \cdot \det B_1(x),$$

то на підставі теореми 2 із [6], матриця

$$\begin{bmatrix} B_1(x) & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{bmatrix} \in P_{n,n}[x]$$

є лівим дільником матриці $B(x) \in P_{n,n}[x]$, тобто

$$B(x) = \begin{bmatrix} B_1(x) & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{bmatrix} G(x).$$

Оскільки $B(x)$ та $B_1(x)$ – унітальні многочленні матриці, то з цієї рівності отримуємо, що $G(x) \in R_{n,n}[x]$.

Поклавши

$$B(x) = \begin{bmatrix} B_{11}(x) & B_{12}(x) \\ B_{21}(x) & B_{22}(x) \end{bmatrix}, \quad G(x) = \begin{bmatrix} G_{11}(x) & G_{12}(x) \\ G_{21}(x) & G_{22}(x) \end{bmatrix},$$

де $B_{11}(x), G_{11}(x) \in R_{k,k}[x]$ і $B_{22}(x), G_{22}(x) \in R_{n-k,n-k}[x]$, останню рівність запишемо так

$$\begin{bmatrix} B_{11}(x) & B_{12}(x) \\ B_{21}(x) & B_{22}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1(x) & 0 \\ 0 & I_{n-k,n-k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{11}(x) & G_{12}(x) \\ G_{21}(x) & G_{22}(x) \end{bmatrix}.$$

З даної рівності отримуємо

$$\begin{cases} B_{11}(x) = B_1(x)G_{11}(x), \\ B_{12}(x) = B_1(x)G_{12}(x). \end{cases} \quad (8)$$

Оскільки $B_{11}(x), B_1(x) \in R_{n,n}[x]$ – унітальні многочленні матриці степеня r , то з першої рівності системи (8) здобуємо $G_{11}(x) = I_k$. Так як $\deg B_{12}(x) < \deg B_1(x)$, то з другої рівності системи (8) випливає, що $G_{12}(x) = 0$. Поклавши $B_{22}(x) = B_2(x)$, матрицю $B(x)$ запишемо у вигляді

$$B(x) = \begin{bmatrix} B_1(x) & 0 \\ B_{21}(x) & B_2(x) \end{bmatrix}.$$

Теорему доведено. \square

Наслідок 2. Нехай $A(x) \in R_{n,n}[x]$ – неособлива многочленна матриця і $d_A(x) = \text{const}$. Нехай, далі, матриця $A(x)$ допускає

факторизації

$$A(x) = \begin{bmatrix} B_1(x) & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{bmatrix} C_1(x) = B(x)C(x),$$

де $B_1(x) \in R_{k,k}[x]$ та $B(x) \in R_{n,n}[x]$ – унітальні многочленні матриці степеня r . Якщо $\det B_1(x)$ є дільником $\det B(x)$, тобто $\det B(x) = b_2(x) \cdot \det B_1(x)$, то

$$B(x) = \begin{bmatrix} B_1(x) & 0 \\ B_{21}(x) & B_2(x) \end{bmatrix},$$

де $B_2(x) \in R_{n-k,n-k}[x]$ – унітальна многочленна матриця степеня r .

Відзначимо, що підставі [2], [3] та наведених вище результатів легко вказати умови існування розв’язків в трикутних матрицях для матричного многочленного рівняння

$$X^s A_0 + X^{s-1} A_1 + \dots + X A_{s-1} + A_s = 0,$$

де $A_i \in R_{n,n}$, а X – невідома матриця порядку n . Остання задача при певних обмеженнях досліджувалась в [7], [8].

ЛІТЕРАТУРА

- [1] *Казімірський П.С.* Розклад матричних многочленів на множники. - К.: Наукова думка, 1981. - 224 с.
- [2] *Прокіп В.М.* Многочленні матриці над факторіальною областю та їх розкладність на множники. //Укр. мат. журн. - 1998.- **50**. - С.1438-1440.
- [3] *Прокіп В.М.* Про дільники многочленних матриць над факторіальною областю. //Мат. методи та фіз.-мех. поля. - 2001.- **44**, №4. - С.22-26.
- [4] *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. - М.: Наука, 1966. - 576 с.
- [5] *Прокіп В.М.* Про єдиність унітального дільника матричного многочлена над довільним полем. //Укр. мат. журн. - 1993.- **45**. - С.803-809.
- [6] *Prokip V.* The multiplicativity of the Smith normal form. // Linear and Multilinear Algebra. - 1995.- **38**. - P.189-192.
- [7] *Кириллов А.Ф.* О числе решений уравнения $X^2 = 0$ в треугольных матрицах над конечным полем. //Функ. анализ и его приложения. - 1995.- **29**, № 1. - С.82-87.

- [8] *Ekhad Sh., Zeilberger D.* The number of solutions of $X^2 = 0$ in triangular matrices over $GF(q)$ // The Electronic Journal of Combinatorics. – 1996. – **3**, N.1. – P.25–26.

Ю. С. Федченко

Одеська національна академія харчових технологій, Одеса
E-mail: Fedchenko_Julia@ukr.net

Нескінченно малі геодезичні деформації метрики ds^2

В даній статті досліджуються нескінченно малі геодезичні деформації метрики ds^2 , встановлено розмірність простору розв'язків та знайдено вигляд метрики.

В данной статье исследуются бесконечно малые геодезические деформации метрики ds^2 , найдены размерность пространства решений и вид метрики.

Infinitesimal deformations of a metric ds^2 are investigated. The space dimension and the type of a metric are found.

Ключові слова: *геодезична деформація, метрика*

1. ВСТУП

Нагадаємо, що деформації при яких кожна геодезична крива переходить, в головному, в геодезичну криву називаються геодезичними або проєктивними (Р-деформації).

Інфінітезимальні геодезичні деформації поверхонь вперше були визначені в роботі Синюкова М. С. та Гаврильченка М. Л. [1] у 1971 році. В монографії [2] авторами показано, що якщо ріманів простір V_n допускає нетривіальні нескінченно малі деформації, то він допускає і нетривіальні геодезичні відображення, і навпаки. Основні рівняння нескінченно малої геодезичної деформації мають вигляд:

$$(1) \quad \nabla_k(\delta g_{ij}) = 2\delta\Psi_k g_{ij} + \delta\Psi_i g_{kj} + \delta\Psi_j g_{ki}$$

де δg_{ij} — варіація метричного тензора, Ψ_i — градієнтний вектор, ∇_k — знак коваріантної похідної. Слід зазначити, що геодезичні деформації допускають поверхні Ліувілля і лише вони. Поверхнями Ліувілля [3] є, наприклад, всі поверхні обертання, всі центральні поверхні 2-го порядку та інші.

Загалом геодезичні деформації є малодослідженими. Останні роки над даною темою плідно працює Фоменко В.Т.[4], який показав, що дослідження нескінченно малих геодезичних деформацій метрики

$$ds^2 = E(u, v)(du^2 + dv^2)$$

зводиться до вивчення питання про те, чи має розв'язки система лінійних диференціальних рівнянь \mathfrak{S} , до якої зводиться система основних рівнянь (1)

$$(2) \quad \begin{cases} X_u = Y_v, \\ X_v = -Y_u, \\ Z_u = 3((EY)_v + E_u X), \\ Z_v = 3((EY)_u + E_v X). \end{cases}$$

Тут

$$\begin{aligned} X &= \frac{\delta g_{11}}{E^2} - \frac{\delta g_{22}}{E^2}, \\ Y &= \frac{2\delta g_{12}}{E^2}, \\ Z &= \frac{\delta g_{11}}{E^2} + \frac{\delta g_{22}}{E^2}. \end{aligned}$$

Так, згідно з Фоменком В. Т., сфера S^2 "в цілому" допускає нетривіальне геодезичне відображення.

Основною метою даної роботи і є дослідження системи (2) та, як результат, визначити розмірність простору розв'язків, вказати умови формальної інтегровності системи (2).

2. ПОПЕРЕДНІ ВІДОМОСТІ

Систему диференціальних рівнянь (2) ми розглядаємо як підмноговид $\mathcal{E} \subset J^1(\pi)$

$$\begin{cases} x_1 - y_2 = 0, \\ x_2 + y_1 = 0, \\ z_1 - 3(E_v y + E y_2 + E_u x) = 0, \\ z_2 - 3(E_u y + E y_1 + E_v x) = 0. \end{cases}$$

у просторі 1-джетів $\pi : R^3 \times R^2 \rightarrow R^2$, де

$$\pi : (x, y, z, u, v) \rightarrow (u, v),$$

а $x, y, z, x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ — стандартні координати у просторі джетів.

Цей підмноговид корозмірності 4 і він визначає двомірне розшарування

$$\pi_{1,0} : \mathcal{E} \rightarrow J^0(\pi).$$

Перше продовження в стандартних координатах

$$\begin{aligned} x_{1,1} - y_{1,2} &= 0, \\ x_{1,2} - y_{2,2} &= 0, \\ x_{1,2} + y_{1,1} &= 0, \\ x_{2,2} + y_{1,2} &= 0, \\ -3E_{uv}y - 3E_u y_2 - 3E_{uu}x - 3E_u x_1 - 3E_v y_1 - 3E y_{1,2} + z_{1,1} &= 0, \\ -3E_{vv}y - 6E_v y_2 - 3E_{uv}x - 3E_u x_2 - 3E y_{2,2} + z_{1,2} &= 0, \\ -3E_{uu}y - 6E_u y_1 - 3E_{uv}x - 3E_v x_1 - 3E y_{1,1} + z_{1,2} &= 0, \\ -3E_{uv}y - 3E_v y_1 - 3E_{vv}x - 3E_v x_2 - 3E_u y_2 - 3E y_{1,2} + z_{2,2} &= 0 \end{aligned}$$

цієї системи $\mathcal{E}^{(1)} \subset J^2(\pi)$ має корозмірність 12 і визначає 1-мірне розшарування $\pi_{2,1} : \mathcal{E}^1 \rightarrow \mathcal{E}$, і нарешті, 2-е продовження

$$\begin{aligned} x_{1,1,1} - y_{1,1,2} &= 0, \\ x_{1,1,2} - y_{1,2,2} &= 0, \\ x_{1,2,2} - y_{2,2,2} &= 0, \\ x_{1,1,2} + y_{1,1,1} &= 0, \end{aligned}$$

$$x_{1,2,2} + y_{1,1,2} = 0,$$

$$x_{2,2,2} + y_{1,2,2} = 0,$$

$$\begin{aligned} & -3E_{uuu}y - 3E_{uu}y_2 - 3E_{uuu}x - 6E_{uu}x_1 - 6E_{uv}y_1 - \\ & -6E_{u}y_{1,2} - 3E_{u}x_{1,1} - 3E_{v}y_{1,1} - 3E_{y_{1,1,2}} + z_{1,1,1} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -3E_{vvv}y - 6E_{uv}y_2 - 3E_{uvv}x - 3E_{uv}x_2 - 3E_{u}y_{2,2} - \\ & -3E_{uv}x_1 - 3E_{vv}y_1 - 3E_{u}x_{1,2} - 6E_{v}y_{1,2} - 3E_{y_{1,2,2}} + z_{1,1,2} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -3E_{vvv}y - 9E_{vv}y_2 - 3E_{vvv}x - 6E_{uv}x_2 - 9E_{v}y_{2,2} - \\ & -3E_{u}x_{2,2} - 3E_{y_{2,2,2}} + z_{1,2,2} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -3E_{uuu}y - 9E_{uu}y_1 - 3E_{uvv}x - 6E_{uv}x_1 - 9E_{u}y_{1,1} - \\ & -3E_{v}x_{1,1} - 3E_{y_{1,1,1}} + z_{1,1,2} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -3E_{uvv}y - 6E_{uv}y_1 - 3E_{vvv}x - 3E_{uv}x_2 - 3E_{uu}y_2 - 6E_{u}y_{1,2} - \\ & -3E_{vv}x_1 - 3E_{v}x_{1,2} - 3E_{v}y_{1,1} - 3E_{y_{1,1,2}} + z_{1,2,2} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -3E_{vvv}y - 3E_{vv}y_1 - 3E_{vvv}x - 6E_{vv}x_2 - 6E_{uv}y_2 - 6E_{v}y_{1,2} - \\ & -3E_{v}x_{2,2} - 3E_{u}y_{2,2} - 3E_{y_{1,2,2}} + z_{2,2,2} = 0. \end{aligned}$$

$\mathcal{E}^{(2)} \subset J^3(\pi)$ має корозмірність 24 а проєкція $\pi_{3,2} : \mathcal{E}^{(2)} \rightarrow \mathcal{E}^{(1)}$ є дифеоморфізмом.

Геометрично, кожний елемент $\theta_3 \in \mathcal{E}^{(2)}$ можна розглядати як 2-мірну площину $L(\theta_3)$, яка дотикається продовження $\mathcal{E}^{(1)}$ у точці $\theta_2 = \pi_{3,2}(\theta_3)$. Іншими словами, 2-е продовження $\mathcal{E}^{(2)}$ можна розглядати як двомірний розподіл $C_{\mathcal{E}^{(2)}}$ на многовиді $\mathcal{E}^{(1)}$, або як зв'язність ∇ в 6-мірному векторному розшаруванні $\pi_2 : \mathcal{E}^{(1)} \rightarrow R^2$.

Умови інтегрування розподілу $C_{\mathcal{E}(2)}$ (або, що те саме, тривіальності зв'язності ∇) ми виразимо в термінах мультидужки (multi-brackets of differential operators), які були введені Личагіним В. В. та Кругліковим Б. С. [5]. Наведемо формулу для обчислення такої дужки, яка знайдена у наведеній роботі.

Нехай маємо систему з $n + 1$ лінійних диференціальних рівнянь на n невідомі функції:

$$\left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n+11} & a_{n+12} & \dots & a_{n+1n} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{array} \right\| = 0,$$

тут a_{ij} - лінійні диференціальні оператори. Тоді дужка

$$\{a_1, \dots, a_{n+1}\}$$

скалярних диференціальних операторів $a_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$ обчислюється за формулою

$$(3) \quad \{a_1, \dots, a_{n+1}\} = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} \text{Ndet}(A_i) a_i,$$

де A_i - матриці розміру $n \times n$, отримані з матриці $\|a_{ij}\|$, якщо викреслити i -тий рядок, а $\text{Ndet}(A_i)$ - некомутативний визначник матриці A_i .

Теорема 1. *Розподіл $C_{\mathcal{E}(2)}$ цілком інтегрований тоді й тільки тоді, коли обмеження дужки на друге продовження рівнянь \mathcal{E}^2 дорівнює нулю.*

3. НЕСКІНЧЕННО МАЛІ ГЕОДЕЗИЧНІ ДЕФОРМАЦІЇ МЕТРИКИ ds^2

Розглянемо на поверхні F^2 деяку метрику ds^2 класу C^1 . Як вище було сказано, дослідження геодезичних деформацій метрики ds^2 зводиться до вивчення системи (2). Справедлива

Теорема 2. 1) Розмірність простору розв'язків системи (2) не більше 6;

2) розмірність простору розв'язків системи (2) дорівнює 6 тоді і лише тоді, коли система рівнянь (2) формально інтегрована (сумісна), а функція $E(u, v) = C_3 e^{C_1 u + C_2 v}$.

3) для поверхонь нульової гаусової кривини і тільки для них розмірність простору нескінченно малих геодезичних деформацій дорівнює 6.

Доведення. Використаємо теорію дужок диференціальних операторів. Для цього систему (2) запишемо у вигляді

$$\left\| \begin{array}{ccc} \partial_u & -\partial_v & 0 \\ \partial_v & \partial_u & 0 \\ 3E_u & 3E_v + 3E\partial_v & -\partial_u \\ 3E_v & 3E_u + 3E\partial_u & -\partial_v \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} X \\ Y \\ Z \end{array} \right\| = 0.$$

Знайдемо $\text{Ndet}(A_i)$, $i = \overline{1, 4}$. Так як

$$\begin{aligned} \text{Ndet}(A_1) &= \begin{vmatrix} \partial_v & \partial_u & 0 \\ 3E_u & 3E_v + 3E\partial_v & -\partial_u \\ 3E_v & 3E_u + 3E\partial_u & -\partial_v \end{vmatrix} = \\ &= 9E_u \partial_u \partial_v + 6E_{uu} \partial_v + 3E \partial_u^2 \partial_v - 6E_v \partial_v^2 - 3E_{vv} \partial_v - 3E \partial_v^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ndet}(A_2) &= \begin{vmatrix} \partial_u & -\partial_v & 0 \\ 3E_u & 3E_v + 3E\partial_v & -\partial_u \\ 3E_v & 3E_u + 3E\partial_u & -\partial_v \end{vmatrix} = 9E_{uu} \partial_u + 9E_u \partial_u^2 - \\ &6E_u \partial_v^2 - 3E_{vu} \partial_v - 3E \partial_u \partial_v^2 + 3E_{uuu} + 3E \partial_u^3 + 3E_{vv} \partial_u + 3E_{vuv}, \end{aligned}$$

$$\text{Ndet}(A_3) = \begin{vmatrix} \partial_u & -\partial_v & 0 \\ \partial_v & \partial_u & 0 \\ 3E_v & 3E_u + 3E\partial_u & -\partial_v \end{vmatrix} = -\partial_u^2 \partial_v - \partial_v^3,$$

$$\text{Ndet}(A_4) = \begin{vmatrix} \partial_u & -\partial_v & 0 \\ \partial_v & \partial_u & 0 \\ 3E_u & 3E_v + 3E\partial_v & -\partial_u \end{vmatrix} = -\partial_u^3 - \partial_v^2 \partial_u,$$

$$a_1 = (\partial_u, -\partial_v, 0),$$

$$a_2 = (\partial_v, \partial_u, 0),$$

$$a_3 = (3E_u, 3E_v + 3E\partial_v, -\partial_u),$$

$$a_4 = (3E_v, 3E_u + 3E\partial_u, -\partial_v),$$

тоді ми, на основі (3), знаходимо рівняння третього порядку, яке є умовою формальної інтегрованості системи (2):

$$(4) \quad \begin{aligned} & -E_v x_{1,2,2} - 3E_{uu} x_{1,2} + E_u x_{2,2,2} - E_{uv} x_{2,2} - \\ & 2E_{uuu} x_2 - 2E_{uvv} x_2 - E_u x_{1,1,2} + 2E_{uv} x_{1,1} + \\ & E_{uvv} x_1 + E_v x_{1,1,1} + E_{vvv} x_1 - E_u y_{1,2,2} - \\ & 2E_{uu} y_{2,2} - 2E_v y_{2,2,2} - 5E_{vv} y_{2,2} + 3E_{uu} y_{1,1} + \\ & E_u y_{1,1,1} + E_{uv} y_{1,2} + 3E_{uuu} y_1 - E_{vv} y_{1,1} - \\ & E_{vvv} y_1 - 4E_{vvv} y_2 - E_{vvvv} y + E_{uuuu} y = 0 \end{aligned}$$

Знаходимо друге продовження системи (2) і використовуючи дужку (4) отримаємо наступне обмеження на вибір функції $E(u, v)$:

$$(5) \quad -E_v E_u + E_{uv} E = 0;$$

$$(6) \quad \begin{aligned} & -3(E_v)^3 + 6E E_v E_{vv} + 2E E_v E_{uu} + \\ & 2E E_u E_{uv} - 5(E_u)^2 E_v + E_{uvv} E^2 - 3E_{vvv} E^2 = 0; \end{aligned}$$

$$(7) \quad \begin{aligned} & -15(E_u)^3 + 6E E_v E_{uv} + 20E E_{uu} E_u + \\ & 4E E_u E_{vv} - 9(E_v)^2 E_u - 5E_{uuu} E^2 - E_{vvv} E^2 = 0; \end{aligned}$$

$$(8) \quad 5(E_u)^2 E_{uu} + 2E E_u E_{vvv} - 2E E_u E_{uuu} +$$

$$\begin{aligned}
& 2E E_v E_{vvv} - 2E E_v E_{uvv} + 2E E_{uu} E_{vv} + \\
& 3(E_v)^2 E_{uu} - 4E (E_{uu})^2 - 5(E_u)^2 E_{vv} + \\
& 2E (E_{vv})^2 - E_{vvvv} E^2 + E_{uuuu} E^2 - 3(E_v)^2 E_{vv} = 0.
\end{aligned}$$

Рівняння (5) запишемо у вигляді $(\ln E)_{uv} = 0$ звідки слідує, що $E = e^{a(u)} e^{b(v)}$ і тоді рівняння (6), (7), (8) набудуть такого вигляду:

$$(9) \quad a''(u) b'(v) - b''(v) b'(v) - b'''(v) = 0;$$

$$\begin{aligned}
(10) \quad & -2b'''(v) b'(v) + b''(v) (b'(v))^2 + 3a''(u) (b'(v))^2 + \\
& 2a''(u) b''(v) - 3a''(u) (a'(u))^2 - (a'(u))^2 b''(v) + \\
& 2a'''(u) a'(u) - (a''(u))^2 - (b''(v))^2 - b^{(4)}(v) + a^{(4)}(u) = 0;
\end{aligned}$$

$$(11) \quad -5a''(u) a'(u) - 3a'(u) b''(v) + 5a'''(u) = 0$$

З (9) та (11) слідує, що функції $a(u)$, $b(v)$ є лінійними функціями. Перевіркою можна переконатися, що такі функції задовольняють і рівняння (10). Отже, $E(u, v) = C_3 e^{C_1 u + C_2 v}$, C_1 , C_2 , C_3 - const.

Так як на J^0 у нас 3 степені свободи, на \mathfrak{S} -2, а на $\mathfrak{S}^{(1)}$ -1, то бачимо, що розмірність простору розв'язків дорівнює 6.

Як відомо, повна кривина може бути обчислена за формулою Гауса

$$K = \frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2},$$

або в розгорнутому вигляді

$$\begin{aligned}
& K = \frac{1}{(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)^2} \times \\
& \times \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}\partial_{uu}^2 g_{22} + \partial_{uv}^2 g_{12} - \frac{1}{2}\partial_{vv}^2 g_{11} & \frac{1}{2}\partial_u g_{11} & \partial_u g_{12} - \frac{1}{2}\partial_v g_{11} \\ \partial_v g_{12} - \frac{1}{2}\partial_u g_{22} & g_{11} & g_{12} \\ \frac{1}{2}\partial_v g_{22} & g_{12} & g_{22} \end{vmatrix} -
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)^2} \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}\partial_v g_{11} & \frac{1}{2}\partial_u g_{22} \\ \frac{1}{2}\partial_v g_{11} & g_{11} & g_{12} \\ \frac{1}{2}\partial_u g_{22} & g_{12} & g_{22} \end{vmatrix}$$

Враховуючи, що $g_{11} = g_{22} = E(u, v) = C_3 e^{C_1 u + C_2 v}$, $g_{12} = 0$ маємо, що $K = 0$.

Отже, при геодезичній деформації метрики ds^2 для поверхонь нульової гаусової кривини розмірність простору розв'язків дорівнює 6 і лише для них. Що і треба було довести. \square

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Синюков Н.С., Гаврильченко М.Л. Бесконечно малые геодезические деформации поверхностей //Третья респ. конференция математиков Белоруссии, Минск, - 1971.
- [2] Радулович Ж., Микеш Й, Гаврильченко М.Л. Геодезические отображения и деформации римановых пространств //Одесса, Оломоуц - 1997.- С.127
- [3] Каган В.Ф. Основы теории поверхностей //М.-Л.:ОГИЗ Гостехиздат - 1947.- т.1- 1948.- т.2
- [4] Фоменко В.Т. Об однозначной определенности замкнутых поверхностей относительно геодезических отображений //Доклады академии наук - 2006.- т.407, №4. - Рр.453-456.
- [5] Kruglikov B., Lychagin V. Multi-brackets of differential operators and compatibility of PDE systems//C. R. Acad. Sci. Paris,Ser.I - 2006.- 342 - Рр.557-561.

И. Г. Величко

Запорожский национальный университет, Запорожье
E-mail: phd@mail.zp.ua

М. А. Гургенидзе

Запорожский национальный университет, Запорожье
E-mail: mag83@list.ru

П. Г. Стеганцева

Запорожский национальный университет, Запорожье
E-mail: steg_pol@mail.ru

Подмногообразия грассманова многообразия плоскостей псевдоевклидова пространства

The smooth structure on the set of the nonisotropic and isotropic planes of the pseudo-Euclidean space 1R_4 was built. The metric in the local coordinates on this smooth structure was obtained.

Ключевые слова: *псевдоевклидово пространство, грассманово многообразие, стационарные углы, метрика*

Грассманово многообразии плоскостей евклидова пространства R_n изучалось многими геометрами. Основы внутренней геометрии грассманова многообразия этого пространства заложены в работах Вонга [10] и Лейхтвейса [5].

Основные результаты исследования стандартных грассмановых многообразий можно найти в обзорной статье А. А. Борисенко, Ю. А. Николаевского [2]. Грассмановы многообразия псевдоевклидова пространства изучались в работах И. Маазикаса [6] и С. Е. Козлова [4].

Одной из интересных является задача о восстановлении поверхности по ее грассманову образу, решением которой для евклидова пространства занимались, в частности, геометры харьковской школы, основанной А. В. Погореловым. Основные результаты их исследований изложены в монографии Ю. А. Аминова [1].

Представляет интерес решение аналогичной задачи для псевдоевклидова пространства, но этому должно предшествовать исследование геометрии грассманова многообразия псевдоевклидова пространства и его подмногообразий. Этому вопросу посвящена данная статья. В ней, в частности, определено понятие стационарных углов между плоскостями, введена гладкая структура на множествах неизотропных и изотропных плоскостей, построена метрика грассманова многообразия.

1. ПСЕВДОЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО

Псевдоевклидово четырехмерное пространство индекса 1, которое будем обозначать 1R_4 , можно определить как точечно-векторное пространство, в котором выполнены все аксиомы системы Вейля, за исключением аксиомы V_4 , которую заменим аксиомой V_4^* : существуют четыре линейно независимых вектора $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4$ таких, что $\bar{a}_1^2 < 0, \bar{a}_2^2 > 0, \bar{a}_3^2 > 0, \bar{a}_4^2 > 0$.

Векторы пространства 1R_4 , скалярные квадраты которых положительны (отрицательны), называются евклидовыми (псевдоевклидовыми) векторами. Ненулевые векторы, скалярные квадраты которых равны нулю, называются изотропными векторами.

Определение ортогональных векторов и длины вектора перенесем из евклидова пространства R_4 в пространство 1R_4 без изменения.

Очевидно, что два ненулевых ортогональных вектора линейно независимы. В пространстве 1R_4 возможны только такие пары ортогональных векторов: евклидов и псевдоевклидов, евклидов и изотропный, два евклидовых вектора.

Выберем в пространстве 1R_4 ортонормированный базис

$$(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4)$$

с матрицей Грама

$$E' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно показать, что в пространстве 1R_4 все ортонормированные базисы состоят из одного псевдоевклидова и трех евклидовых векторов, то есть имеет место закон инерции базисов. Но в подпространствах этого пространства существуют ортогональные базисы, содержащие изотропный вектор. Заметим, что ортогональные системы векторов, содержащие изотропный вектор, не могут быть построены до ортогонального базиса пространства 1R_4 .

Скалярное произведение векторов

$$\bar{x}^t = (x_1, x_2, x_3, x_4) \quad \text{и} \quad \bar{y}^t = (y_1, y_2, y_3, y_4),$$

заданных своими координатами относительно ортонормированного базиса, будет иметь вид

$$\bar{x}^t E' \bar{y} = -x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4,$$

а скалярный квадрат вектора

$$\bar{x}^t = (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

— вид

$$\bar{x}^t E' \bar{x} = -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2.$$

Если отложить все векторы пространства 1R_4 от начала координат, то концы изотропных векторов будут лежать на поверхности

$$-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0,$$

которую называют изотропным гиперконусом.

Концы евклидовых векторов лежат во внешней области, а концы псевдоевклидовых векторов — во внутренней области изотропного гиперконуса.

Прямые псевдоевклидова пространства 1R_4 делятся на евклидовы, псевдоевклидовы и изотропные соответственно типу направляющего вектора.

В пространстве 1R_4 есть двумерные плоскости (далее плоскости), в которых все векторы евклидовы (их называют евклидовыми плоскостями), плоскости, в которых есть векторы всех трёх типов (их называют псевдоевклидовыми плоскостями) и плоскости, в которых есть только евклидовы и изотропные векторы (они называются изотропными плоскостями). Евклидовы и псевдоевклидовы плоскости называются неизотропными. Тип плоскости будем распознавать по набору из двух ортогональных направляющих векторов \bar{a}_1, \bar{a}_2 .

Плоскость, содержащая вершину изотропного гиперконуса является евклидовой (псевдоевклидовой, изотропной), если она не имеет с изотропным гиперконусом других общих точек (пересекает изотропный гиперконус по двум образующим, касается изотропного гиперконуса). Вполне ортогональные неизотропные плоскости относятся к разным типам [7].

Будем использовать понятие матричной координаты плоскости. Так будем называть матрицу вида

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \\ a_1^3 & a_2^3 \\ a_1^4 & a_2^4 \end{pmatrix},$$

столбцами которой являются координаты направляющих векторов \bar{a}_1, \bar{a}_2 плоскости.

Рассмотрим трехмерное подпространство пространства 1R_4 . Выберем в нем ортогональный базис. Два вектора этого базиса будут евклидовыми. Классифицировать трехмерные пространства будем по типу третьего базисного вектора. Таким образом, можно выделить трехмерное евклидово пространство

R_3 , трехмерное псевдоевклидово пространство индекса 1 1R_3 и трехмерное изотропное пространство R_3^1 [7].

В пространстве 1R_4 любое трехмерное подпространство является либо евклидовым, либо псевдоевклидовым, либо изотропным. Пространства всех трех типов существуют.

Действительно, существование подпространств R_3 и 1R_3 непосредственно следует из типа ортонормированного базиса пространства 1R_4 . Существование изотропного подпространства R_3^1 следует из того, что ортогональным дополнением подпространства $\langle \bar{a} \rangle$, где \bar{a} — изотропный вектор, является подпространство $\langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \rangle$, где $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ — ортогональная система векторов, причем векторы \bar{b}, \bar{c} евклидовы.

2. СТАЦИОНАРНЫЕ УГЛЫ ПАРЫ ПЛОСКОСТЕЙ

В евклидовом пространстве R_4 взаимное расположение пары плоскостей π и τ однозначно задается набором углов φ_1, φ_2 со значениями из $[0, \pi/2]$. Эти углы определяются как стационарные значения углов между произвольными векторами $\bar{a} \in \pi$ и $\bar{b} \in \tau$ [10].

Мы не можем оставить без изменения определение стационарных углов в случае пространства 1R_4 , поскольку в этом пространстве векторы неравноправны и значения углов между ними не всегда можно сравнить между собой. В этом параграфе мы дадим определение и способы вычисления стационарных углов пары плоскостей одного типа псевдоевклидова пространства.

2.1. Случай неизотропных плоскостей. Пусть π и τ — две неизотропные плоскости одного типа пространства 1R_4 , проходящие через начало координат. Рассмотрим двумерную плоскость, проходящую через начало координат и перпендикулярную каждой из плоскостей π и τ . Угол между прямыми пересечения этой двумерной плоскости с плоскостями π и τ будем называть стационарным углом плоскостей π и τ , а саму двумерную плоскость — угловой плоскостью.

Теорема 1. *Для пары неизотропных плоскостей одного типа всегда существуют две вполне ортогональные угловые плоскости.*

Доказательство. Действительно, пусть плоскости π и τ заданы наборами направляющих векторов \bar{a}_1, \bar{a}_2 и \bar{b}_1, \bar{b}_2 соответственно. Тогда

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \\ a_1^3 & a_2^3 \\ a_1^4 & a_2^4 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_1^2 & b_2^2 \\ b_1^3 & b_2^3 \\ b_1^4 & b_2^4 \end{pmatrix}$$

— матричные координаты плоскостей π и τ . Произвольная двумерная плоскость, пересекающая данные, задается векторами \bar{c}_1, \bar{c}_2 и имеет матричную координату

$$C = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 \\ c_1^2 & c_2^2 \\ c_1^3 & c_2^3 \\ c_1^4 & c_2^4 \end{pmatrix},$$

где $\bar{c}_1 = A\Lambda$, $\bar{c}_2 = BM$, $\Lambda^t = (\lambda_1 \lambda_2)$, $M^t = (\mu_1 \mu_2)$. Будем искать ту двумерную плоскость, которая перпендикулярна каждой из плоскостей π и τ . В такой плоскости существуют векторы $\bar{d}_1 = \alpha_1 \bar{c}_1 + \alpha_2 \bar{c}_2$, $\bar{d}_2 = \beta_1 \bar{c}_1 + \beta_2 \bar{c}_2$ такие, что

$$(1) \quad \bar{d}_1^t E' \bar{a}_i = 0, \quad \bar{d}_2^t E' \bar{b}_i = 0 (i = 1, 2).$$

Систему (1) можно записать в матричном виде

$$\begin{aligned} (\alpha_1 A \Lambda + \alpha_2 B M)^t E' A &= 0, \\ (\beta_1 A \Lambda + \beta_2 B M)^t E' B &= 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \alpha_1 (A^t E' A) \Lambda + \alpha_2 (A^t E' B) M &= 0, \\ \beta_1 (B^t E' A) \Lambda + \beta_2 (B^t E' B) M &= 0 \end{aligned}$$

и рассматривать как систему линейных уравнений относительно элементов матриц Λ и M . Для существования ненулевого решения этой системы необходимо выполнение соотношения

$$\begin{vmatrix} \alpha_1(A^t E' A) & \alpha_2(A^t E' B) \\ \beta_1(B^t E' A) & \beta_2(B^t E' B) \end{vmatrix} = 0.$$

Мы можем упростить последнее уравнение, если выберем в данных плоскостях π и τ ортонормированные базисы. Тогда

$$(A^t E' A) = E_2, \quad (B^t E' B) = E_2,$$

где $E_2 = \text{diag}(1, 1)$ в случае евклидовых плоскостей и

$$(A^t E' A) = E'_2, \quad (B^t E' B) = E'_2,$$

где $E'_2 = \text{diag}(-1, 1)$ в случае псевдоевклидовых плоскостей. В случае евклидовых плоскостей имеем:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2(A^t E' B) \\ \beta_1(B^t E' A) & \beta_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Используя метод вычисления определителя блочной матрицы [3, с.59], получим, что последнее равенство равносильно следующему:

$$| \alpha_2 \beta_1 (A^t E' B)(B^t E' A) - \alpha_1 \beta_2 E | = 0.$$

В случае $\alpha_2 \beta_1 \neq 0$ это означает, что величины $\frac{\alpha_1 \beta_2}{\alpha_2 \beta_1}$ являются собственными значениями матрицы

$$W = (A^t E' B)(B^t E' A).$$

Эта матрица является матрицей самосопряженного оператора евклидовой плоскости.

Для псевдоевклидовых плоскостей матрица

$$W = E'_2 (A^t E' B) E'_2 (B^t E' A)$$

является матрицей самосопряженного оператора псевдоевклидовой плоскости. Эти матрицы являются частными случаями матрицы из работы Б. А. Розенфельда [9], в которой показано,

что собственные значения указанной матрицы являются квадратами косинусов стационарных углов. По каждому из этих значений можно определить нормированные векторы \bar{d}_1 и \bar{d}_2 , а значит и угловые плоскости, причем разным собственным значениям соответствуют вполне ортогональные угловые плоскости. Теорема доказана. \square

Угол между векторами \bar{d}_1 и \bar{d}_2 равен стационарному углу данных плоскостей. Заметим, что если базисы в плоскостях π и τ являются неортонормированными, то матрица W имеет вид

$$W = (A^t E' A)^{-1} (A^t E' B) (B^t E' B)^{-1} (B^t E' A).$$

Перейдем к вычислению величин стационарных углов плоскостей при различном их взаимном расположении. Пусть плоскости π и τ не имеют общих направлений. Так как угловые плоскости вполне ортогональны между собой, то, как указано в параграфе 1, одна из угловых плоскостей будет псевдоевклидовой, а вторая евклидовой и стационарные углы плоскостей определяются из равенств

$$(2) \quad (\bar{d}_1, \bar{d}_2) = ch\varphi_1,$$

$$(3) \quad (\vec{d}_1, \vec{d}_2) = \cos \varphi_2.$$

Пусть теперь направляющие подпространства плоскостей π и τ имеют общее направление. Если эти плоскости псевдоевклидовы, то они могут пересекаться по евклидовой, псевдоевклидовой или изотропной прямой. В каждом из этих случаев они вложены в пространство 1R_3 . Если общее направление является евклидовым (псевдоевклидовым), то один из стационарных углов равен нулю, а второй находится по формуле (2) (соответственно (3)). Теперь рассмотрим случай, когда общее направление плоскостей π и τ изотропное. Пусть вектор \bar{c} —

общий изотропный вектор. Если \bar{a}_1, \bar{b}_1 — направляющие псевдоевклидовы нормированные векторы плоскостей π и τ соответственно, то ортогональные им направляющие векторы этих плоскостей имеют вид: $\bar{a}_2 = \frac{1}{(\bar{a}_1, \bar{c})} \bar{c} - \bar{a}_1$ и $\bar{b}_2 = \frac{1}{(\bar{b}_1, \bar{c})} \bar{c} - \bar{b}_1$.

Квадратное уравнение для нахождения собственных значений матрицы W имеет вид

$$(4) \quad \lambda^2 - (TrW)\lambda + |W| = 0.$$

Можно показать, что $|W| = |(A^t B)|^2$, а $TrW = -2|(A^t B)|$. Вычисления показывают, что определитель матрицы $(A^t B)$ не зависит от выбора плоскостей, имеющих общую изотропную прямую, и равен -1. Получаем, что уравнение (4) имеет вид $(\lambda - 1)^2 = 0$, то есть собственные значения $\lambda_{1,2} = 1$. Значит оба стационарных угла равны нулю, что кажется удивительным, поскольку плоскости различны.

Этот факт можно объяснить следующим образом. В пространстве 1R_3 , определяемом заданными плоскостями, не существует плоскости, перпендикулярной каждой из двух плоскостей с общей изотропной прямой, так как в псевдоевклидовой плоскости не существует вектора, ортогонального изотропному, кроме него самого. Вместе с тем существует евклидова плоскость пространства 1R_4 , ортогональная общему изотропному вектору двух псевдоевклидовых плоскостей. Она пересекает пространство 1R_3 , определяемое данными плоскостями, по прямой. Будем считать эту прямую второй угловой плоскостью (вырожденной) и, соответственно, второй стационарный угол тоже равным нулю.

Очевидно, в евклидовом пространстве такой факт не имеет места для несовпадающих плоскостей.

Две пересекающиеся евклидовы плоскости могут быть вложены в одно из пространств: R_3 , 1R_3 , или R_3^1 . Если они принадлежат пространству R_3 , то один из стационарных углов равен нулю, а второй реализуется в евклидовой плоскости и вычисляется по формуле (3).

Если плоскости находятся в пространстве 1R_3 , то невырожденная угловая плоскость является псевдоевклидовой и соответствующий ей стационарный угол вычисляется по формуле (2).

Если эти плоскости принадлежат пространству R_3^1 , то невырожденная угловая плоскость является изотропной и соответствующий ей стационарный угол находится как угол между евклидовыми векторами изотропной плоскости [9].

2.2. Случай изотропных плоскостей. Пусть π и τ — изотропные плоскости, натянутые на векторы \bar{a}_1, \bar{a}_2 и \bar{b}_1, \bar{b}_2 соответственно, причем векторы \bar{a}_1 и \bar{b}_1 — изотропные, \bar{a}_2 и \bar{b}_2 — евклидовы. Для нахождения стационарных углов между ними уже нельзя использовать матрицу

$$W = (A^t E' A)^{-1} (A^t E' B) (B^t E' B)^{-1} (B^t E' A),$$

поскольку матрицы $(A^t E' A)$ и $(B^t E' B)$ являются вырожденными. Определим значения стационарных углов между изотропными плоскостями π и τ как предельные значения стационарных углов между евклидовыми плоскостями π_1 и τ_1 , когда π_1 стремится к π , а τ_1 — к τ .

Выберем единичный евклидов вектор \bar{x} , ортогональный векторам \bar{a}_2 и \bar{b}_2 , существование которого легко доказывается. Рассмотрим векторы $\bar{a}'_1 = \bar{a}_1 + \lambda \bar{x}$ и $\bar{b}'_1 = \bar{b}_1 + \lambda \bar{x}$, где λ — параметр. При стремлении λ к 0 плоскость π_1 , определяемая векторами \bar{a}'_1, \bar{a}_2 , стремится к плоскости π , а плоскость τ_1 , определяемая векторами \bar{b}'_1, \bar{b}_2 , стремится к плоскости τ .

Тогда элементы матрицы $W = (w_{ij})$ будут иметь вид:

$$\begin{aligned} w_{11} &= \frac{((\bar{a}_1, \bar{b}_1) + \lambda((\bar{a}_1, \bar{x}) + (\bar{b}_1, \bar{x})) + \lambda^2)^2}{(\lambda(\bar{a}_1, \bar{x}) + \lambda^2)(\lambda(\bar{b}_1, \bar{x}) + \lambda^2)} + \frac{(\bar{a}_1, \bar{b}_2)^2}{\lambda(\bar{a}_1, \bar{x}) + \lambda^2}, \\ w_{12} &= \frac{((\bar{a}_1, \bar{b}_1) + \lambda((\bar{a}_1, \bar{x}) + (\bar{b}_1, \bar{x})) + \lambda^2)(\bar{a}_2, \bar{b}_1)}{(\lambda(\bar{a}_1, \bar{x}) + \lambda^2)(\lambda(\bar{b}_1, \bar{x}) + \lambda^2)} + \frac{(\bar{a}_1, \bar{b}_2)(\bar{a}_2, \bar{b}_2)}{\lambda(\bar{a}_1, \bar{x}) + \lambda^2}, \\ w_{21} &= \frac{((\bar{a}_1, \bar{b}_1) + \lambda((\bar{a}_1, \bar{x}) + (\bar{b}_1, \bar{x})) + \lambda^2)(\bar{a}_2, \bar{b}_1)}{(\lambda(\bar{b}_1, \bar{x}) + \lambda^2)} + (\bar{a}_1, \bar{b}_2)(\bar{a}_2, \bar{b}_2), \end{aligned}$$

$$w_{22} = \frac{(\bar{a}_2, \bar{b}_1)^2}{(\lambda(\bar{b}_1, \bar{x}) + \lambda^2)} + (\bar{a}_2, \bar{b}_2)^2.$$

Считая λ малым, получим выражения для собственных значений μ_1 и μ_2 матрицы W в виде

$$\mu_{1,2} = \frac{2((\bar{a}_1, \bar{b}_1)(\bar{a}_2, \bar{b}_2) - (\bar{a}_1, \bar{b}_2)(\bar{a}_2, \bar{b}_1))^2 \lambda + O(\lambda^2)}{((\bar{a}_1, \bar{b}_1)^2 \pm (\bar{a}_1, \bar{b}_1)^2) \lambda + O(\lambda^2)}.$$

Переходя к пределу при $\lambda \rightarrow 0$, получим собственные значения матрицы W для изотропных плоскостей π и τ :

$$\mu_1 = \infty,$$

$$\mu_2 = \left(\frac{(\bar{a}_1, \bar{b}_1)(\bar{a}_2, \bar{b}_2) - (\bar{a}_1, \bar{b}_2)(\bar{a}_2, \bar{b}_1)}{(\bar{a}_1, \bar{b}_1)} \right)^2.$$

Тогда стационарному углу φ_1 можно приписать значение ∞ , а второй стационарный угол находится по формуле

$$\cos \varphi_2 = \frac{(\bar{a}_1, \bar{b}_1)(\bar{a}_2, \bar{b}_2) - (\bar{a}_1, \bar{b}_2)(\bar{a}_2, \bar{b}_1)}{(\bar{a}_1, \bar{b}_1)}.$$

В частном случае две изотропные плоскости могут иметь общее направление. Если плоскости π и τ имеют общее евклидово направление, то ненулевой стационарный угол равен бесконечности, а если общее направление изотропное, то один из углов, определяемый собственным значением μ_2 , вычисляется по формуле $\cos \varphi = (\bar{a}_2, \bar{b}_2)$, а второму углу припишем значение 0 (как углу между совпавшими изотропными векторами).

3. ГЛАДКАЯ СТРУКТУРА НА МНОЖЕСТВЕ ПЛОСКОСТЕЙ

Как известно, множество плоскостей евклидова пространства R_4 , проходящих через начало координат, можно превратить в гладкое многообразие, которое называют грассмановым. В работе [2] приведены два способа введения локальных координат плоскости этого многообразия. Ниже предлагается способ введения локальных координат на множествах плоскостей разных типов псевдоевклидова пространства.

Рассмотрим в 1R_4 множество всех плоскостей, проходящих через начало координат. Будем, по аналогии с евклидовым пространством, называть это множество грассмановым многообразием. В пространстве 1R_4 в грассмановом многообразии естественно рассматривать три подмножества: псевдоевклидовых плоскостей, евклидовых плоскостей и изотропных плоскостей, которые будем обозначать ${}^PG(2,4)$, ${}^EG(2,4)$ и ${}^{Is}G(2,4)$ соответственно.

Рассмотрим множество псевдоевклидовых плоскостей. Зададим в каждой из них два линейно независимых ортогональных вектора. Тогда параметрические уравнения плоскости примут вид

$$x^i = \alpha_j^i t^j, i = 1, \dots, 4, j = 1, 2,$$

где коэффициенты α_j^i удовлетворяют условиям

$$-\alpha_m^1 \alpha_n^1 + \sum_{i=2}^4 \alpha_m^i \alpha_n^i = \varepsilon_m \delta_{mn},$$

где $\varepsilon_1 = -1, \varepsilon_m = 1, m > 1, m, n = 1, 2$.

Зафиксируем псевдоевклидову плоскость π_0 и рассмотрим множество M псевдоевклидовых плоскостей, проектирующихся без вырождения на плоскость π_0 . Ортонормированный базис $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4)$ пространства 1R_4 выберем так, чтобы плоскость π_0 определялась базисными векторами \bar{e}_1, \bar{e}_2 . Тогда уравнения плоскости π_0 имеют вид $x^{2+\mu} = 0, \mu = 1, 2$. Бесконечно близкую к π_0 плоскость π можно задать системой уравнений

$$(5) \quad \begin{cases} x^3 = \xi_1^1 x^1 + \xi_2^1 x^2, \\ x^4 = \xi_1^2 x^1 + \xi_2^2 x^2. \end{cases}$$

Набор действительных чисел $\{\xi_j^\mu\}, j = 1, 2$ будем называть локальными координатами псевдоевклидовой плоскости π и задавать матрицей $Z = \{\xi_j^\mu\}$. Следовательно, размерность подмногообразия ${}^P G(2, 4)$ равна четырем. Аналогично можно ввести локальные координаты евклидовой плоскости пространства ${}^1 R_4$.

Рассмотрим и второй способ введения локальных координат плоскости пространства ${}^1 R_4$. Пусть π — псевдоевклидова плоскость и \bar{f}_1, \bar{f}_2 — ортонормированный базис в ней, специализированный условиями $(\bar{f}_i, \bar{e}_j) = (\bar{f}_j, \bar{e}_i), i, j = 1, 2$. Относительно этого базиса матричные координаты G и F плоскости имеют такой же вид как и в пространстве R_4 [2], но условие ортонормированности базиса запишется следующим образом: $F^t E' F = E'_2$. Если Q — матрица перехода от системы локальных координат $\{\xi_j^\mu\}$ к системе $\{\eta_i^\beta\}$, то

$$F = \begin{pmatrix} E_2 \\ Z \end{pmatrix} \cdot Q.$$

Тогда

$$\begin{aligned} E'_2 &= F^t E' F = Q^t \cdot \begin{pmatrix} E_2 & Z^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E'_2 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_2 \\ Z \end{pmatrix} \cdot Q = \\ &= Q^t \cdot \begin{pmatrix} E'_2 & Z^t E_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_2 \\ Z \end{pmatrix} \cdot Q = Q^t (E'_2 + Z^t Z) Q. \end{aligned}$$

Отсюда получим связь между матрицами Q и Z в виде

$$Q E'_2 Q^t = (E'_2 + Z^t Z)^{-1}.$$

Для случая евклидовой плоскости базис выберем так, чтобы векторы (\bar{f}_3, \bar{f}_4) лежали в плоскости, а векторы (\bar{f}_1, \bar{f}_2) были ей ортогональны. Тогда матричная координата G будет иметь вид

$$G = \begin{pmatrix} Z \\ E \end{pmatrix}.$$

И, соответственно, матричная координата этой плоскости после специализации базиса имеет вид

$$F = \begin{pmatrix} Z \\ E_2 \end{pmatrix} \cdot Q.$$

Аналогичное условие для матрицы Q имеет вид

$$QQ^t = (E_2 + Z^t E_2' Z)^{-1}.$$

Перейдем к построению гладкой структуры на множестве ${}^{Is}G(2, 4)$.

В пространстве 1R_4 рассмотрим изотропный гиперконус. Касательное пространство в каждой точке гиперконуса является трехмерным изотропным пространством, ортонормированный базис которого состоит из одного изотропного вектора и двух евклидовых. В касательном пространстве изотропные плоскости образуют пучок, осью которого является образующая гиперконуса.

Таким образом, множество изотропных плоскостей является множеством всех касательных плоскостей изотропного гиперконуса и, следовательно, ${}^{Is}G(2, 4)$ можно рассмотреть как касательное расслоение. Базой этого расслоения будет изотропный гиперконус как линейчатое многообразие, а типовым слоем над точкой — пучок касательных плоскостей в точке гиперконуса. Тогда локальные координаты плоскости из ${}^{Is}G(2, 4)$ можно записать в виде (u, v, α) , где координаты u, v определяют образующую гиперконуса, α — параметр пучка. Отметим, что размерность подмногообразия ${}^{Is}G(2, 4)$ равна трем.

4. ПОГРУЖЕНИЕ ГРАССМАНОВА МНОГООБРАЗИЯ

4.1. Плюккерovy координаты плоскости. Каждую плоскость π , проходящую через фиксированную точку, можно задать плюккеровыми координатами. Для этого рассмотрим ортонормированный базис плоскости π , состоящий из векторов

$$\bar{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4), \bar{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4),$$

заданных своими координатами относительно ортонормированного базиса пространства 1R_4 . Составим миноры второго порядка (2×4) -матрицы, строками которой есть координаты базисных векторов плоскости π , и обозначим их символами p_{ij}

$$p_{ij} = \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix}, i, j = 1, \dots, 4, i < j.$$

Упорядоченный набор p_{ij} называют плюккеровыми координатами плоскости [1]. Плюккеровы координаты кососимметричны и удовлетворяют соотношению Плюккера

$$(6) \quad p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23} = 0.$$

Плюккеровы координаты псевдоевклидовой, евклидовой и изотропной плоскостей удовлетворяют соотношениям

$$(7) \quad -(p_{12}^2 + p_{13}^2 + p_{14}^2) + p_{23}^2 + p_{24}^2 + p_{34}^2 = -1,$$

$$(8) \quad -(p_{12}^2 + p_{13}^2 + p_{14}^2) + p_{23}^2 + p_{24}^2 + p_{34}^2 = 1,$$

$$(9) \quad -(p_{12}^2 + p_{13}^2 + p_{14}^2) + p_{23}^2 + p_{24}^2 + p_{34}^2 = 0$$

соответственно.

В четырехмерном псевдоевклидовом пространстве 1R_4 плоскость задается шестью плюккеровыми координатами

$$p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24}, p_{34},$$

которые можно считать координатами точки в аффинном пространстве A_6 . Определим в A_6 скалярное произведение векторов $\bar{p} = (p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24}, p_{34})$ и $\bar{q} = (q_{12}, q_{13}, q_{14}, q_{23}, q_{24}, q_{34})$ формулой

$$(\bar{p}, \bar{q}) = -(p_{12}q_{12} + p_{13}q_{13} + p_{14}q_{14}) + p_{23}q_{23} + p_{24}q_{24} + p_{34}q_{34}.$$

Это равносильно введению в A_6 структуры псевдоевклидова пространства 3R_6 . Числа $p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24}, p_{34}$ являются

декартовыми координатами в 3R_6 относительно ортонормированного базиса с матрицей Грама $\text{diag}(-1, -1, -1, 1, 1, 1)$ [9].

Условие (7) означает, что ${}^P G(2, 4)$ лежит на пятимерной сфере мнимого радиуса пространства 3R_6 , из условия (8) следует, что подмногообразии ${}^E G(2, 4)$ принадлежит сфере действительного радиуса пространства 3R_6 , а из условия (9) вытекает, что ${}^{Is} G(2, 4)$ лежит на изотропном гиперконусе пространства 3R_6 .

4.2. Случай неизотропных плоскостей. Алгебраическая поверхность пространства 3R_6 , изображающая подмногообразии ${}^P G(2, 4)$, задается уравнениями (6) и (7). Нормалью к поверхности, заданной неявно уравнением $F(x_1, \dots, x_n) = 0$ в евклидовом пространстве, является вектор

$$\text{grad}F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right).$$

В пространстве 3R_6 нормалью к поверхности, заданной уравнением $F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 0$, будет вектор

$$P\text{grad}F = \left(-\frac{\partial F}{\partial x_1}, -\frac{\partial F}{\partial x_2}, -\frac{\partial F}{\partial x_3}, \frac{\partial F}{\partial x_4}, \frac{\partial F}{\partial x_5}, \frac{\partial F}{\partial x_6} \right),$$

который будем называть псевдоградиентом. Поэтому нормальными к подмногообразию ${}^P G(2, 4)$ являются линейные комбинации линейно независимых векторов

$$\begin{aligned} \bar{p} &= (p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24}, p_{34}), \\ \bar{q} &= (-p_{34}, p_{24}, -p_{23}, p_{14}, -p_{13}, p_{12}). \end{aligned}$$

Непосредственно проверяется, что эти нормали ортогональны и $\bar{p}^2 = -1, \bar{q}^2 = 1$.

Подмногообразии ${}^E G(2, 4)$ можно погрузить в 3R_6 в виде алгебраической поверхности с уравнениями (6) и (8). Векторы \bar{p} и \bar{q} являются нормальными к этой поверхности, причем $\bar{p}^2 = 1, \bar{q}^2 = -1$.

Так как нормальные плоскости к алгебраическим поверхностям, изображающим подмногообразия ${}^P G(2, 4)$ и ${}^E G(2, 4)$, являются псевдоевклидовыми, то метрика каждой из этих поверхностей имеет сигнатуру $(- - ++)$.

4.3. Случай изотропных 2-плоскостей. Подмногообразие ${}^{Is} G(2, 4)$ является трехмерным, поэтому его погружение в виде алгебраической поверхности в пространство ${}^3 R_6$ нужно задать $6 - 3 = 3$ уравнениями. В качестве таких уравнений можно взять

$$\begin{aligned} F_1 &= -(p_{12}^2 + p_{13}^2 + p_{14}^2) + p_{23}^2 + p_{24}^2 + p_{34}^2 = 0, \\ F_2 &= p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23} = 0, \end{aligned}$$

и, например, соотношение

$$F_3 = p_{12}^2 + p_{13}^2 + p_{14}^2 + p_{23}^2 + p_{24}^2 + p_{34}^2 - 1 = 0,$$

которое будем называть условием нормировки. Псевдоградиенты функций F_1, F_2, F_3 имеют вид

$$\begin{aligned} \text{Pgrad}F_1 &= (p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24}, p_{34}), \\ \text{Pgrad}F_2 &= (-p_{34}, p_{24}, -p_{23}, p_{14}, -p_{13}, p_{12}), \\ \text{Pgrad}F_3 &= (-p_{12}, -p_{13}, -p_{14}, p_{23}, p_{24}, p_{34}) \end{aligned}$$

и являются нормальными к подмногообразию ${}^{Is} G(2, 4)$.

Перейдем к следующей ортогональной системе нормалей:

$$\begin{aligned} \bar{n}_1 &= (0, 0, 0, p_{23}, p_{24}, p_{34}), \\ \bar{n}_2 &= (p_{12}, p_{13}, p_{14}, 0, 0, 0), \\ \bar{n}_3 &= (-p_{34}, p_{24}, -p_{23}, p_{14}, -p_{13}, p_{12}), \end{aligned}$$

в которой $\bar{n}_1^2 > 0$, $\bar{n}_2^2 < 0$, $\bar{n}_3^2 = 0$.

Так как ортогональный базис касательного пространства к гиперконусу (9) состоит из двух псевдоевклидовых, двух евклидовых и изотропного вектора, то алгебраическая поверхность, изображающая подмногообразие ${}^{Is} G(2, 4)$, имеет метрику сигнатуры $(- + 0)$.

5. МЕТРИКА В МНОГООБРАЗИИ ПЛОСКОСТЕЙ

В евклидовом пространстве в грассмановом многообразии метрика определяется как сумма квадратов стационарных углов [10].

Покажем, что в грассмановом многообразии псевдоевклидова пространства можно ввести метрику, которая также связана со стационарными углами.

5.1. Случай неизотропных плоскостей. Метрику на грассмановом многообразии неизотропных плоскостей псевдоевклидова пространства 1R_4 определим формулой

$$(10) \quad ds^2 = Tr[(E_2 + ZE_2'Z^t)^{-1}dZ(E_2' + Z^tZ)^{-1}dZ^t]$$

для псевдоевклидовых плоскостей и формулой

$$(11) \quad ds^2 = Tr[(E_2' + ZZ^t)^{-1}dZ(E_2 + Z^tE_2'Z)^{-1}dZ^t]$$

для евклидовых плоскостей.

Покажем, что данные определения являются естественными, и в этой метрике квадрат расстояния между достаточно близкими плоскостями выражается через квадраты стационарных углов.

Рассмотрим две псевдоевклидовы плоскости. Пусть стационарные углы между ними равны φ_1, φ_2 . Зафиксируем одну из плоскостей и рассмотрим такое однопараметрическое семейство плоскостей, которое содержит две данные плоскости и стационарные углы между произвольной плоскостью семейства и фиксированной плоскостью пропорциональны. Такие семейства называют геликоидами [8].

Выберем ортонормированный базис $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4$ аналогично тому, как описано в работе [1, с.300]. В угловых плоскостях выберем векторы \bar{e}_1, \bar{e}_2 , лежащие в фиксированной плоскости семейства, и ортогональные им векторы \bar{e}_3, \bar{e}_4 .

Так как угловые плоскости вполне ортогональны, то получим набор попарно ортогональных векторов. Тогда направляющие векторы произвольной плоскости семейства псевдоевклидовых плоскостей имеют вид

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= \operatorname{ch}(\varphi_1 t)\bar{e}_1 + \operatorname{sh}(\varphi_1 t)\bar{e}_3, \\ \bar{x}_2 &= \cos(\varphi_2 t)\bar{e}_2 + \sin(\varphi_2 t)\bar{e}_4, t \in [0, 1].\end{aligned}$$

В выбранном базисе матричная координата A и матрица Z локальных координат произвольной плоскости семейства имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(\varphi_1 t) & 0 \\ 0 & \cos(\varphi_2 t) \\ \operatorname{sh}(\varphi_1 t) & 0 \\ 0 & \sin(\varphi_2 t) \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} \operatorname{th}(\varphi_1 t) & 0 \\ 0 & \operatorname{tg}(\varphi_2 t) \end{pmatrix}.$$

После подстановки матрицы Z в формулу (10) получаем $ds^2 = (-\varphi_1^2 + \varphi_2^2)dt^2$, а значит

$$(12) \quad s = \int_0^1 \sqrt{-\varphi_1^2 + \varphi_2^2} dt = \sqrt{-\varphi_1^2 + \varphi_2^2}.$$

Для семейства евклидовых плоскостей базис выберем так, чтобы направляющие векторы произвольной плоскости имели вид

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= \operatorname{ch}(\varphi_1 t)\bar{e}_3 + \operatorname{sh}(\varphi_1 t)\bar{e}_1, \\ \bar{x}_2 &= \cos(\varphi_2 t)\bar{e}_4 + \sin(\varphi_2 t)\bar{e}_2.\end{aligned}$$

Аналогичные вычисления опять приводят к (12).

5.2. Случай изотропных плоскостей. В подмногообразии изотропных плоскостей метрику определим следующей формулой

$$(13) \quad ds^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \operatorname{Tr}[(E_2'' + ZE_2''Z^t)^{-1}dZ(E_2'' + Z^tE_2''Z)^{-1}dZ^t],$$

где $E_2'' = \operatorname{diag}(k, 1)$.

Покажем, что эту метрику можно выразить через стационарные углы. Рассмотрим множество изотропных плоскостей, направляющие векторы которых имеют вид

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= f(t)\bar{e}_1 + g(t)\bar{e}_3, \\ \bar{x}_2 &= \cos(\varphi_2 t)\bar{e}_2 + \sin(\varphi_2 t)\bar{e}_4,\end{aligned}$$

где условие $-f^2(t) + g^2(t) = 0$ обеспечивает изотропность вектора \bar{x}_1 . Это возможно относительно базиса пространства, векторы \bar{e}_2, \bar{e}_4 которого расположены в евклидовой угловой плоскости, а векторы \bar{e}_1, \bar{e}_3 — в ее ортогональном дополнении.

Матричная координата плоскости будет иметь вид

$$A = \begin{pmatrix} f(t) & 0 \\ 0 & \cos(\varphi_2 t) \\ g(t) & 0 \\ 0 & \sin(\varphi_2 t) \end{pmatrix},$$

а матрица локальных координат — вид

$$Z = \begin{pmatrix} p(t) & 0 \\ 0 & tg(\varphi_2 t) \end{pmatrix},$$

где $p(t) = \frac{f(t)}{g(t)}$. Подставляя матрицу Z в формулу (13), получаем формулу

$$s = \varphi_2$$

для расстояния между изотропными плоскостями.

Таким образом, как и в случае грассманова многообразия евклидова пространства, в подмногообразиях ${}^P G(2, 4)$, ${}^E G(2, 4)$, ${}^{Is} G(2, 4)$ имеем метрику, связанную со стационарными углами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Аминов Ю.А. Геометрия подмногообразий // К.: Наукова думка, — 2002.— 467с.
- [2] Борисенко А.А., Николаевский Ю.А Многообразия Грассмана и грассманов образ подмногообразий. //УМН — 1991. — **46(2)**. — С.41-80.
- [3] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц // — М.: Наука — 1967. — 575с.

- [4] *Козлов С.Е.* Топология и Лоренц-инвариантная псевдориманова метрика многообразия направлений в физическом пространстве // Зап. науч. семин. ПОМИ – 1997. – **246**. – С.141-151.
- [5] *Leichtweiss K.* Zur Riemannschen Geometrie in Grassmannschen Mannigfaltigkeiten. // Math.Z. – 1961 – **76 (4)**. – Pp. 334 – 366.
- [6] *Маазикас И.* К римановой геометрии грассмановых многообразий неизотропных подпространств псевдоевклидова пространства // Ученые записки Тартуского университета – 1974. – **342**. – С.76-82.
- [7] *Рашиевский* Риманова геометрия и тензорный анализ // М.: Наука. – 1967. – 664С.
- [8] *Розенфельд Б.А.* Метрика и аффинная связность в пространствах плоскостей, сфер и квадрик. // ДАН СССР. – 1947. – **57(2)**. – С.543–546.
- [9] *Розенфельд Б.А.* Неевклидовы пространства, // М.: Наука. – 1969. – 547С.
- [10] *Wong Y. C.* Differential geometry of Grassman manifolds. // Proc. Math.Acad. Sci. USA. – 1967 – **51(6)**. – Pp. 589 – 594.

Д. В. Кожухарь

*Одесский Национальный Университет им. И. И. Мечникова,
Одесса
E-mail: manx2@yandex.ru*

Пример поворотно-конформного отображения псевдосферы со свойством взаимности

В статье рассмотрено специальное конформное отображение псевдосферы и показано что оно обладает свойством переводить геодезические линии в специальные линии — решения вариационной изопериметрической задачи. Показано что обратное отображение обладает аналогичным свойством.

Ключевые слова: *конформное отображение, псевдосфера*

1. В статье мы рассмотрим специальное отображение и покажем что оно является конформным и поворотным со свойством взаимности.

Поворотность отображения означает, что при отображении геодезические линии переходят в изопериметрические экстремали, то есть в кривые, являющиеся решением вариационной задачи по нахождению прямейших среди кривых одинаковой длины, соединяющих две фиксированные точки. Свойство взаимности означает, что при обратном отображении геодезические линии также переходят в кривые описанного вида.

Впервые поворотное отображение было рассмотрено в работах С. Г. Лейко [2]. Показано, что на двумерных поверхностях кривая является изопериметрической экстремалью поворота если вдоль неё кривизна Френе k и гауссова кривизна K пропорциональны: $k = cK$. Показано, что отображение является поворотным тогда и только тогда, когда существуют два

инварианта λ и ψ таких, что в общей по отображению системе координат выполняются следующие равенства:

$$(1) \quad \begin{aligned} \nabla_j \psi_i &= \psi_i \left(\psi_j + \frac{K_j}{K} \right) + K(Ae^\psi + 1)g_{ij}, \\ P_{ij}^h &= \Gamma_{ij}^h - \bar{\Gamma}_{ij}^h = \lambda_i \delta_j^h + \lambda_j \delta_i^h + \psi^h g_{ij}, \end{aligned}$$

где $\nabla_j \psi_i$ — ковариантная производная в метрике g_{ij} и A — некоторая константа.

2. Рассмотрим псевдосферу в \mathbb{E}^3 , которая задана параметрическими уравнениями:

$$(2) \quad x = r \sin \alpha, \quad y = r \cos \alpha, \quad z = \sqrt{1 - r^2} - \sec h^{-1}(r).$$

Здесь параметр r представляет расстояние от точки псевдосферы до оси вращения, а α — угол поворота точки поверхности от плоскости yz . Данная параметризация представляет собой результат обращения трактрисы вокруг оси z . В такой параметризации метрическая форма поверхности принимает вид:

$$(3) \quad ds^2 = r^{-2} dr^2 + r^2 d\alpha^2.$$

Компоненты связности в этой метрике имеют вид:

$$(4) \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = 0, \Gamma_{12}^2 = r^{-1}, \Gamma_{11}^1 = -r^{-1}, \Gamma_{22}^1 = -r^3.$$

Гауссова кривизна поверхности постоянна и равна -1 .

Рассмотрим отображение, сохраняющее угол α , но «вытягивающее» точки от оси в направлении к краю поверхности по правилу:

$$(5) \quad \bar{r} = r(1 - r)^{-1}.$$

При этом точки, соответствующие параметру r в промежутке значений $(0; 0.5)$, вытянутся на промежуток значений $(0; 1)$. Обратное отображение характеризуется следующим правилом:

$$(6) \quad r = \bar{r}(1 + \bar{r})^{-1}$$

и, соответственно, совершает обратное «стягивание» точек всей поверхности на часть поверхности.

3. Покажем, что отображения (5) и (6) обладают свойством переводить геодезические линии в изопериметрические экстремали поворота.

Теорема 1. *Отображение (5) псевдосферы (2) является поворотно-конформным со свойством взаимности.*

Доказательство. Подставив выражение, связывающее новые и старые параметры точки, в метрическую форму псевдосферы, и переобозначая параметры, мы получим выражение для метрики второй поверхности в общих по отображению координатах:

$$(7) \quad d\bar{s}^2 = (1-r)^{-2}r^{-2}dr^2 + (1-r)^{-2}r^2d\alpha^2.$$

Метрические формы пропорциональны с точностью до множителя:

$$(8) \quad \bar{g}_{ij} = e^{2\psi} g_{ij},$$

где $e^{2\psi} = (1-r)^{-2}$, что означает конформность отображения.

Для удобства примем r за первую координату и α — за вторую: $x_1 = r$, $x_2 = \alpha$. Будем обозначить дифференцирования по ним соответствующими нижними знаками.

А. Покажем, что отображение удовлетворяет условиям поворотности (1). В случае конформного отображения псевдосферы эти условия принимают вид:

$$(9) \quad \nabla_j \psi_i = \psi_i \psi_j - (Ae^\psi + 1)g_{ij},$$

С учетом условия конформности отображения (8) уравнения поворотности приобретают вид:

$$(10) \quad \begin{aligned} \nabla_1 \psi_1 &= (1-r)^{-2} - (A(1-r)^{-1} + 1)r^{-2}, \\ \nabla_2 \psi_1 &= 0, \\ \nabla_1 \psi_2 &= 0, \\ \nabla_2 \psi_2 &= - (A(1-r)^{-1} + 1)r^2. \end{aligned}$$

Вычислим ковариантные производные в левой части равенства при помощи значений компонент связности (4):

$$\nabla_1\psi_1 = \frac{\partial\psi_1}{\partial r} - \psi_1\Gamma_{11}^1 = (1-r)^{-2} - (1-r)^{-1}(-r^{-1}),$$

$$\nabla_2\psi_1 = \frac{\partial\psi_1}{\partial x_2} - \psi_1\Gamma_{12}^1 = 0,$$

$$\nabla_1\psi_2 = \frac{\partial\psi_2}{\partial x_1} - \psi_2\Gamma_{21}^1 = 0,$$

$$\nabla_2\psi_2 = \frac{\partial\psi_2}{\partial x_2} - \psi_2\Gamma_{22}^1 = -(1-r)^{-1}(-r^3).$$

Подставим эти значения в уравнения поворотности (10). Тогда второе и третье уравнения выполняются тождественно, а первое и четвертое уравнения приводят к одному уравнению:

$$(11) \quad -(1-r)^{-1}(-r^{-1}) = -(A(1-r)^{-1} + 1)r^{-2}.$$

Оно тождественно выполняется при $A = -1$. Таким образом, поворотность отображения доказана.

Б. Для доказательства того, что обратное отображение также поворотное сделаем на второй поверхности (7) замену переменных (6): $\bar{r} = R(1+R)^{-1}$. И на первой поверхности (3) сделаем замену переменных: $r = \bar{R}(1+\bar{R})^{-1}$. Тогда обратное отображение $R \rightarrow \bar{R}$, $\alpha \rightarrow \bar{\alpha}$ примет вид отображения поверхности с метрикой

$$(12) \quad d\bar{s}^2 = R^{-2}dR^2 + R^2d\alpha^2$$

на поверхность с метрикой

$$(13) \quad d\bar{s}^2 = (1+\bar{R})^{-2}\bar{R}^{-2}d\bar{R}^2 + (1+\bar{R})^{-2}\bar{R}^2d\bar{\alpha}^2.$$

Не сложно проверить выполнение уравнений поворотности (9). Мы получим единственное уравнение, аналогичное уравнению (11):

$$(14) \quad (1+R)^{-1}R^{-1} = (\bar{A}(1+R)^{-1} + 1)R^{-2},$$

которое тождественно выполняется при $\bar{A} = -1$. Теорема доказана. \square

Пример поворотно-конформного отображения псевдосферы 81

4. Отметим, что уравнения поворотности для отображения (9) удовлетворяют уравнениям конциркулярных отображений, исследованных К. Яно [4], а значит рассматриваемое отображение переводит геодезические окружности в геодезические окружности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. Ф. Каган, *Основы теории поверхностей, ч.1-2.* - М.-Л.: ГИТТЛ, 1947-1948.
- [2] С. Г. Лейко, *Поворотные диффеоморфизмы на поверхностях евклидова пространства*, Матем. Заметки. Москва, Наука, 1990. Т.47, №3. С.52-57.
- [3] А. П. Норден, *Теория поверхностей.* М., ГИТТЛ, 1956.
- [4] К. Яно, *Concircular geometry, I-IV.* Proc. Imp. Acad., Tokyo, Volume 16, 195-200, 354-360, 442-448, 505-511 (1940).

В. М. Кузаконь

*Одесская национальная академия пищевых технологий,
Одесса*

E-mail: kuzakon_v@ukr.net

Дифференциальные инварианты расслоения кривых на плоскости Лобачевского

В работе дается полное описание алгебры дифференциальных инвариантов расслоения кривых на плоскости Лобачевского относительно группы движений. Показано, что дифференциальные инварианты любого порядка получаются из дифференциальных инвариантов второго порядка при помощи дифференцирования последних вдоль инвариантных векторных полей.

Ключевые слова: *расслоения кривых, дифференциальные инварианты, джеты, инвариантные дифференцирования*

1. ВВЕДЕНИЕ

В работах [5,6] мы построили алгебру скалярных дифференциальных инвариантов расслоения кривых на плоскости Минковского. В этой работе мы рассмотрим плоскость Лобачевского.

В качестве модели плоскости Лобачевского мы выберем модель Пуанкаре: верхнюю открытую полуплоскость

$$\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$$

с метрикой

$$(1) \quad ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Геодезическими в этой модели являются вертикальные лучи, а также дуги окружностей с центром на оси x .

© В. М. Кузаконь, 2009

Инфинитезимальные симметрии метрики (1) имеют вид

$$X = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y = \frac{x^2 - y^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} + xy \frac{\partial}{\partial y}, \quad Z = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}.$$

Сдвиги вдоль траекторий этих векторных полей порождают группу движений на плоскости Лобачевского.

Пусть $\varphi : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ — расслоение кривых. В координатах такое расслоение можно задать с помощью некоторой гладкой (класса C^∞) функцией двух переменных $u = f(x, y)$, такой, что ее дифференциал $df \neq 0$. Линии уровня этой функции совпадают с кривыми расслоения φ .

Функция f определена с точностью до калибровочного преобразования $f \rightarrow F(f)$, где $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — произвольная гладкая функция. Калибровочное преобразование порождается векторными полями вида

$$H = h(u) \frac{\partial}{\partial u}.$$

Движения полуплоскости вместе с калибровочным преобразованием прямой порождают псевдогруппу Ли G , действующую в полупространстве $\mathbb{R}_+^3 = \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}$ с координатами x, y, u .

Найдем алгебру дифференциальных инвариантов этого расслоения относительно группы движений.

Рассмотрим расслоение

$$\pi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2, \quad \pi : (u, x, y) \mapsto (x, y).$$

Пусть $J^k(\pi)$ — многообразие k -джетов локальных сечений расслоения π . Введем на $J^k(\pi)$ следующие (локальные) координаты:

$$x, y, u, u_{1,0}, u_{0,1}, \dots, u_{s,t}, \dots, u_{0,k}.$$

Здесь координата $u_{s,t}$ отвечает частной производной

$$\frac{\partial^{s+t} u}{\partial x^s \partial y^t}, \quad (0 \leq s + t \leq k).$$

Продолжения векторных полей X, Y, Z и H в пространство 2-джетов $J^2(\pi)$ имеют вид:

$$\begin{aligned}
X^{(2)} &= \frac{\partial}{\partial x}, \\
Y^{(2)} &= Y - (xu_{1,0} + yu_{0,1}) \frac{\partial}{\partial u_{1,0}} + (yu_{1,0} - xu_{0,1}) \frac{\partial}{\partial u_{0,1}} - \\
&\quad - (u_{1,0} + 2xu_{2,0} + 2yu_{1,1}) \frac{\partial}{\partial u_{2,0}} + (yu_{2,0} - u_{0,1} - \\
&\quad - 2xu_{1,1} - yu_{0,2}) \frac{\partial}{\partial u_{1,1}} + (u_{1,0} + 2yu_{1,1} - 2xu_{0,2}) \frac{\partial}{\partial u_{0,2}}, \\
Z^{(2)} &= Z - u_{1,0} \frac{\partial}{\partial u_{1,0}} - u_{0,1} \frac{\partial}{\partial u_{0,1}} - \\
&\quad - 2u_{2,0} \frac{\partial}{\partial u_{2,0}} - 2u_{1,1} \frac{\partial}{\partial u_{1,1}} - 2u_{0,2} \frac{\partial}{\partial u_{0,2}}, \\
H^{(2)} &= H + h'u_{1,0} \frac{\partial}{\partial u_{1,0}} + h'u_{0,1} \frac{\partial}{\partial u_{0,1}} + (h''u_{1,0}^2 + h'u_{2,0}) \frac{\partial}{\partial u_{2,0}} + \\
&\quad + (h''u_{0,1}u_{1,0} + h'u_{1,1}) \frac{\partial}{\partial u_{1,1}} + (h''u_{0,1}^2 + h'u_{0,2}) \frac{\partial}{\partial u_{0,2}}.
\end{aligned}$$

Простые арифметические вычисления показывают, что первые дифференциальные инварианты расслоения φ возникают в пространстве 2-джетов $J^2(\pi)$.

Вычислим эти дифференциальные инварианты. Для этой цели мы используем инвариантные дифференцирования псевдогруппы Ли G .

2. ИНВАРИАНТНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Пусть $J^\infty(\pi)$ — пространство бесконечных джетов расслоения π , \mathcal{G} — алгебра Ли псевдогруппы Ли G и \mathcal{G}_∞ — поднятие \mathcal{G} в $J^\infty(\pi)$.

Дифференциальный оператор

$$\nabla : C^\infty(J^\infty(\pi)) \rightarrow C^\infty(J^\infty(\pi))$$

будем называть *инвариантным дифференцированием* псевдогруппы Ли G если он коммутирует с любым элементом $X^* \in \mathcal{G}_\infty$, то есть

$$(2) \quad X^* \circ \nabla = \nabla \circ X^*.$$

С расслоением φ , заданном функцией $u = f(x, y)$ связаны два векторных поля на \mathbb{R}_+^2 : поля единичных векторов касательных и нормальных к кривым расслоения. Эти векторные поля имеют вид

$$A = \frac{y}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}} \left(f_y \frac{\partial}{\partial x} - f_x \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

и

$$B = \frac{y}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}} \left(f_x \frac{\partial}{\partial x} + f_y \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

соответственно. Они инвариантны относительно движений плоскости и калибровочного преобразования и порождают инвариантные дифференцирования

$$\nabla_t = \frac{y}{\sqrt{u_{1,0}^2 + u_{0,1}^2}} \left(u_{0,1} \frac{d}{dx} - u_{1,0} \frac{d}{dy} \right)$$

и

$$\nabla_n = \frac{y}{\sqrt{u_{1,0}^2 + u_{0,1}^2}} \left(u_{1,0} \frac{d}{dx} + u_{0,1} \frac{d}{dy} \right)$$

на $C^\infty(J^\infty(\pi))$. Здесь

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} &= \frac{\partial}{\partial x} + u_{1,0} \frac{\partial}{\partial u} + u_{2,0} \frac{\partial}{\partial u_{1,0}} + u_{1,1} \frac{\partial}{\partial u_{0,1}} + u_{3,0} \frac{\partial}{\partial u_{2,0}} + \dots \\ \frac{d}{dy} &= \frac{\partial}{\partial y} + u_{0,1} \frac{\partial}{\partial u} + u_{1,1} \frac{\partial}{\partial u_{1,0}} + u_{0,2} \frac{\partial}{\partial u_{0,1}} + u_{2,1} \frac{\partial}{\partial u_{2,0}} + \dots \end{aligned}$$

— операторы полного дифференцирования по переменным x и y соответственно.

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ

Построенные инвариантные дифференцирования порождают два дифференциальных инварианта второго порядка псевдогруппы Ли G . Действительно, не трудно заметить, что коммутатор операторов ∇_t и ∇_n линейно выражается через эти операторы:

$$(3) \quad [\nabla_t, \nabla_n] = I_1 \nabla_t + I_2 \nabla_n$$

Коэффициенты $I_1, I_2 \in C^\infty(J^2(\pi))$ и являются этими дифференциальными инвариантами.

Укажем их координатное представление:

$$I_1 = \frac{yu_{2,0}u_{0,1}^2 + yu_{0,2}u_{1,0}^2 - u_{0,1}^3 - u_{0,1}u_{1,0}^2 - 2yu_{0,1}u_{1,0}u_{1,1}}{(u_{1,0}^2 + u_{0,1}^2)^{3/2}}$$

и

$$I_2 = \frac{1}{(u_{1,0}^2 + u_{0,1}^2)^{3/2}} (u_{1,0}^3 + u_{1,0}u_{0,1}^2 + yu_{1,0}^2u_{1,1} - yu_{1,0}u_{0,1}u_{2,0} + yu_{1,0}u_{0,1}u_{0,2} - yu_{1,1}u_{0,1}^2).$$

Пусть I — дифференциальный инвариант k -го порядка псевдогруппы Ли G и ∇ — инвариантное дифференцирование.

По определению инвариантного дифференцирования, функция $\nabla(I)$ является дифференциальным инвариантом $(k+1)$ -го порядка. Действительно, в силу (2) мы получаем:

$$X^{(k+1)}(\nabla(I)) = \nabla(X^{(k)}(I)) = 0.$$

Здесь $X^{(k)}$ — k -е продолжение векторного поля $X \in \mathcal{G}$.

Таким образом, функции

$$I_{1,1} = \nabla_t(I_1), I_{1,2} = \nabla_n(I_1), I_{2,1} = \nabla_t(I_2) \quad \text{и} \quad I_{2,2} = \nabla_n(I_2)$$

являются дифференциальными инвариантами третьего порядка.

Записанные в координатах, они имеют следующий вид:

$$I_{1,1} = -\frac{y^2}{(u_{1,0}^2 + u_{0,1}^2)^3} (-u_{0,1}^5 u_{3,0} + (3u_{2,0}u_{1,1} + 3u_{1,0}u_{2,1})u_{0,1}^4 - \\ - u_{1,0}((u_{3,0} + 3u_{1,2})u_{1,0} + 6u_{1,1}^2 - 3u_{2,0}(u_{2,0} - u_{0,2}))u_{0,1}^3 + \\ + u_{1,0}^2((u_{0,3} + 3u_{2,1})u_{1,0} - 9u_{1,1}(u_{2,0} - u_{0,2}))u_{0,1}^2 - \\ - 3u_{1,0}^3(u_{1,0}u_{1,2} - 2u_{1,1}^2 - u_{0,2}(u_{2,0} - u_{0,2}))u_{0,1} + u_{1,0}^5 u_{0,3} - \\ - 3u_{1,1}u_{1,0}^4 u_{0,2}),$$

$$I_{1,2} = \frac{-2}{(u_{1,0}^2 + u_{0,1}^2)^3} (y((-1/2 y u_{2,1} - 1/2 u_{2,0})u_{0,1}^5 + \\ + (((-1/2 u_{3,0} + u_{1,2})y + 1/2 u_{1,1})u_{1,0} + 1/2 y(u_{2,0}u_{0,2} + \\ + 2u_{1,1}^2))u_{0,1}^4 - 3u_{1,0}(((1/6 u_{2,1} + 1/6 u_{0,3})y + 1/3 u_{2,0})u_{1,0} + \\ + yu_{1,1}(u_{0,2} - u_{2,0}))u_{0,1}^3 + 1/2 u_{1,0}^2((-u_{3,0} + u_{1,2})y + \\ + 2u_{1,1})u_{1,0} + 3y(-8/3 u_{1,1}^2 - 4/3 u_{2,0}u_{0,2} + u_{0,2}^2 + u_{2,0}^2))u_{0,1}^2 + \\ + 3u_{1,0}^3(((1/3 u_{2,1} - 1/6 u_{0,3})y - 1/6 u_{2,0})u_{1,0} + \\ + yu_{1,1}(u_{0,2} - u_{2,0}))u_{0,1} - 1/2 u_{1,0}^4((yu_{1,2} - u_{1,1})u_{1,0} - \\ - y(u_{2,0}u_{0,2} + 2u_{1,1}^2))),$$

$$I_{2,1} = \frac{2}{(u_{1,0}^2 + u_{0,1}^2)^3} (y((-1/2 u_{1,1} - 1/2 y u_{1,2})u_{1,0}^5 + \\ + ((u_{2,1} - 1/2 u_{0,3})y + 1/2 u_{2,0})u_{0,1} - 1/2 (-u_{1,1}^2 + \\ + u_{0,2}(u_{0,2} - u_{2,0}))y)u_{1,0}^4 + \\ + 1/2 u_{0,1}((-u_{3,0} + u_{1,2})y - 2u_{1,1})u_{0,1} + \\ + 8yu_{1,1}(-1/2 u_{2,0} + u_{0,2})u_{1,0}^3 \\ - 1/2 (((-u_{2,1} + u_{0,3})y - 2u_{2,0})u_{0,1} - \\ - 2(-5u_{1,1}^2 + (u_{0,2} - u_{2,0})^2)y)u_{0,1}^2 u_{1,0}^2 + \\ + u_{0,1}^3 (((-1/2 u_{3,0} + u_{1,2})y - 1/2 u_{1,1})u_{0,1} - \\ - 2yu_{1,1}(-2u_{2,0} + u_{0,2}))u_{1,0} - 1/2 u_{0,1}^4 ((-u_{2,0} + yu_{2,1})u_{0,1} - \\ - y(u_{1,1}^2 + u_{2,0}(u_{0,2} - u_{2,0}))))),$$

$$\begin{aligned}
I_{2,2} = & -\frac{y^2}{(u_{1,0}^2 + u_{0,1}^2)^3} (-u_{2,1}u_{1,0}^5 + ((u_{3,0} - 2u_{1,2})u_{0,1} - \\
& - u_{1,1}(-2u_{2,0} + u_{0,2}))u_{1,0}^4 - u_{0,1}((-u_{2,1} + u_{0,3})u_{0,1} - 6u_{1,1}^2 + \\
& + (u_{0,2} - u_{2,0})(-2u_{2,0} + u_{0,2}))u_{1,0}^3 - ((-u_{3,0} + u_{1,2})u_{0,1} - \\
& - 9u_{1,1}(u_{0,2} - u_{2,0}))u_{0,1}^2u_{1,0}^2 - u_{0,1}^3((-2u_{2,1} + u_{0,3})u_{0,1} - \\
& - u_{2,0}^2 + 6u_{1,1}^2 + 3u_{2,0}u_{0,2} - 2u_{0,2}^2)u_{1,0} + \\
& + (u_{0,1}u_{1,2} - 2u_{1,1}(-1/2u_{2,0} + u_{0,2}))u_{0,1}^4).
\end{aligned}$$

Этими инвариантами исчерпываются все дифференциальные инварианты третьего порядка.

Действительно, размерность пространства дифференциальных инвариантов — это коразмерность регулярных орбит продолжения псевдогруппы Ли G в расслоение $J^k(\pi)$. Например, размерность пространства 1-джетов $J^1(\pi)$ равна пяти. Орбита общего положения порождена продолжениями $X^{(1)}, Y^{(1)}, Z^{(1)}$ векторных полей X, Y, Z в $J^k(\pi)$, а также продолжениями в $J^k(\pi)$ векторных полей $\frac{\partial}{\partial u}$ и $u\frac{\partial}{\partial u}$ и поэтому тоже имеет размерность пять.

Таким образом, у расслоения кривых φ не существует дифференциальных инвариантов первого порядка. Размерность орбиты общего положения в $J^k(\pi)$ равна $k+4$, а размерность пространства $J^k(\pi)$ равна $2+C_{k+2}^k$. Поэтому коразмерность орбиты равна

$$(4) \quad \nu(k) = C_{k+2}^k - k - 2.$$

Это число совпадает с числом функционально независимых дифференциальных инвариантов, порядок которых не выше k .

Таким образом, число $\mu(k)$ инвариантов k -го порядка можно вычислить по формуле:

$$(5) \quad \mu(k) = \nu(k) - \nu(k-1) = k.$$

В частности, число функционально независимых дифференциальных инвариантов порядка не выше 3 равно пяти.

Приведенные рассуждения показывают, что инварианты I_1 , I_2 , $I_{1,1}$, $I_{1,2}$, $I_{2,1}$ и $I_{2,2}$ функционально зависимы. Поэтому между построенными инвариантами должно быть одно соотношение (типа уравнения Gala в [5]).

Инварианты четвертого порядка можно получить из инвариантов третьего порядка также применяя к ним операторы ∇_t и ∇_n . В силу формулы (3) композиции операторов $\nabla_t \circ \nabla_n$ и $\nabla_n \circ \nabla_t$ порождают одни и те же инварианты по модулю инвариантов более низкого порядка.

Мы получаем 6 инвариантов 4-порядка. Всего же мы получили 12 инвариантов порядка не менее 4. Поэтому число функционально независимых инвариантов порядка не менее четырех равно девяти и между построенными инвариантами должны существовать три соотношения. Одно из них — соотношение, о котором мы упоминали выше. Два других мы получаем, применяя к нему операторы ∇_t и ∇_n .

Аналогично мы можем получить дифференциальные инварианты любого порядка.

Итак, мы получаем следующую теорему, которая описывает структуру дифференциальных инвариантов расслоения кривых на плоскости Лобачевского.

Теорема 1. *Все дифференциальные инварианты расслоения кривых на плоскости Лобачевского относительно группы движений порождены дифференциальными инвариантами второго порядка I_1 и I_2 и их всевозможными производными по ∇_t и ∇_n .*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Алексеевский Д.В., Виноградов А.М., Лычагин В.В. Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т.28. М., 1988.

-
- [2] Виноградов А.М., Красильщик И.С., Лычагин В.В. Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. М., "Наука" 1986. 336 стр.
- [3] Кузаконь В. М. Диференціальні інваріанти субмерсій многовидів // Вісн. держ. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Прикл. математика. – 1999. – № 364. – С. 295–298.
- [4] Кузаконь В.М. Вычисление дифференциальных инвариантов второго порядка субмерсий евклидовых пространств // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2005. 48, №4. – С. 95–99
- [5] Кузаконь В.М., Стрельцова И.С. *Дифференциальные инварианты расслоений кривых на плоскости Минковского.*, Науковий журнал Математичні методи та фізико-механічні поля. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача, т. 50, №4. - Львів; 2007. - С. 49–55.
- [6] Кузаконь В.М., Стрельцова И.С. *Расслоения кривых на плоскости Минковского*, "Симметрии: теоретический и методический аспекты" Сборник научных трудов II международного семинара, (12 – 14 сентября 2007 г., Астрахань), Астрахань, 2007. С. 53 – 58.

А. Г. Кушнер

*Астраханский государственный университет, Астрахань и
Институт проблем управления РАН, Москва
E-mail: kushnera@mail.ru*

Нормальные формы для уравнений Монжа-Ампера: телеграфное уравнение и уравнение Гельмгольца

Приводится решение проблемы локальной контактной эквивалентности уравнений Монжа-Ампера линейным уравнениям с постоянными коэффициентами. Построены нормальные формы: телеграфное уравнение и уравнение Гельмгольца.

We solve a problem of local contact equivalence of Monge-Ampère equations to linear equations with constant coefficients. We find normal forms for such equations: the telegraph equation and the Helmholtz equation.

Ключевые слова: *эффективные дифференциальные формы, инварианты Лапласа, контактные преобразования*

1. ВВЕДЕНИЕ

Классическое уравнение Монжа-Ампера имеет следующий вид:

$$(1) \quad Av_{xx} + 2Bv_{xy} + Cv_{yy} + D(v_{xx}v_{yy} - v_{xy}^2) + E = 0,$$

где A, B, C, D, E — функции от независимых переменных x, y , неизвестной функции $v = v(x, y)$ и ее первых производных v_x, v_y .

Уравнения этого типа на протяжении последних полутора столетий привлекали внимание геометров.

Класс уравнений Монжа-Ампера выделяется из всего многообразия уравнений второго порядка тем, что он замкнут относительно контактных преобразований и содержит квазилинейные уравнения.

Этот факт был известен еще Софусу Ли. В 1870-х и 1880-х годах он изучал проблемы классификации уравнений Монжа-Ампера относительно (псевдо)группы контактных преобразований [21, 22].

Сам Софус Ли нашел условия приведения гиперболических уравнений Монжа-Ампера к волновому уравнению $v_{xy} = 0$ при наличии у них двух промежуточных интегралов¹, но доказательства этого результата он так и не опубликовал. Заметим, однако, что проверка наличия промежуточных интегралов у общего уравнения Монжа-Ампера, а тем более их построение, является не простой задачей.

В 1978 г. Лычагин [24] предложил геометрическое описание широкого класса дифференциальных уравнений второго порядка на гладких многообразиях. Если размерность многообразия равна двум, то этот класс совпадает с классом уравнений Монжа-Ампера (1).

Основная идея Лычагина [24, 25] заключается в представлении уравнений Монжа-Ампера и их многомерных аналогов дифференциальными формами на пространстве 1-джетов функций на гладком многообразии.

Преимуществом такого подхода перед классическим является редукция порядка пространства джетов: используется более простое пространство 1-джетов J^1M вместо пространства 2-джетов J^2M , в котором, будучи уравнениями второго порядка, *ad hoc* должны лежать уравнения Монжа-Ампера.

¹Промежуточным интегралом уравнения Монжа-Ампера называется дифференциальное уравнение первого порядка, каждое решение которого является решением уравнения Монжа-Ампера

Такая интерпретация уравнений Монжа-Ампера позволила по-новому взглянуть на проблему их классификации и послужила толчком к появлению множества работ других авторов (см., например, [6, 11, 29]).

В 1983 году Лычагиным и Рубцовым [27] была решена проблема приводимости невырожденных уравнений (1) к уравнениям Монжа-Ампера с постоянными коэффициентами в случае когда коэффициенты A, B, C, D, E не зависят от переменной v . В 1996 г. Туницкий снял это ограничение и решил проблему для уравнений Монжа-Ампера общего вида [29].

Проблема локальной эквивалентности общих уравнений Монжа-Ампера гиперболического, эллиптического и переменного типов, коэффициенты которых не зависят от v , была решена в работах Кругликова [4–6] и автора [8–11]. Позднее автор решил эту проблему для уравнений общего вида [12], а также проблему приведения уравнений Монжа-Ампера гиперболического и эллиптического типов контактными преобразованиями к линейным уравнениям [13–16].

Подробное описание истории уравнений Монжа-Ампера и их классификации, а также старые и новые результаты, можно найти в монографии [19] и в работе [18].

В предлагаемой работе мы рассматриваем проблему контактной эквивалентности уравнений Монжа-Ампера линейным уравнениям с постоянными коэффициентами. Результаты по гиперболическим уравнениям были анонсированы в работе [17].

Опишем основные идеи работы.

Как известно [26], невырожденные уравнения Монжа-Ампера порождают на пяти-мерном пространстве 1-джетов $J^1\mathbb{R}^2$ три распределения: два двумерных C_+ и C_- и одно одномерное l . Для гиперболических уравнений эти распределения вещественные, а для эллиптического — комплексные. Прямая сумма

подпространств $C_+(a), C_-(a)$ и $l(a)$ в точке $a \in J^1\mathbb{R}^2$ совпадает или со всем касательным пространством $T_a J^1\mathbb{R}^2$ (для гиперболических уравнений), или с его комплексификацией (для уравнений эллиптических).

Это разложение, в свою очередь, порождает разложение в прямую сумму комплекса де Рама на многообразии 1-джетов. Применяя это разложение, мы построили четыре тензорных поля типа (2,1) на пространстве 1-джетов [12].

Построенные тензорные поля позволяют определить две дифференциальные 2-формы λ_+ и λ_- , которые являются контактными инвариантами уравнений.

Примечательно, что коэффициенты этих форм, вычисленных для линейных гиперболических уравнений, представляют собой классические инварианты Лапласа [20]. Поэтому формы λ_+ и λ_- мы называем *формами Лапласа* [13].

Классические инварианты Лапласа имеют давнюю историю. В 1770 г. Эйлер [2] при решении проблемы интегрирования линейных гиперболических уравнений вида

$$(2) \quad v_{xy} = a(x, y)v_x + b(x, y)v_y + c(x, y)v$$

ввел функции $h = ab + c - a_x$ и $k = ab + c - b_y$. Эти функции являются относительными инвариантами при преобразованиях независимых переменных x, y и переменной v , которые не меняют вида уравнения (2). Такие преобразования имеют следующий вид:

$$(3) \quad (x, y, v) \mapsto (X(x), Y(y), Z_1(x, y)v + Z_2(x, y)),$$

где X, Y, Z_1, Z_2 — некоторые гладкие функции. Функции h и k умножаются на $X'(x)Y'(y)$ при таких преобразованиях. Оказалось, что уравнение (2) эквивалентно волновому уравнению

$$v_{xy} = 0$$

тогда и только тогда, когда инварианты h и k равны нулю и в этом случае уравнение (2) может быть проинтегрировано. Если же в нуль обращается только один из этих инвариантов, то

дифференциальный оператор, отвечающий правой части уравнения (2), раскладывается в композицию двух дифференциальных операторов первого порядка и уравнение также можно решить.

Позднее, в 1773 г., Лаплас [20] существенно развил идеи Эйлера, создав так называемый "каскадный метод" интегрирования уравнений. Инварианты h и k играют в нем ключевую роль.

В 1890-х годах Дарбу усовершенствовал метод Лапласа и назвал функции h и k *инвариантами Лапласа*. Линейное гиперболическое уравнение может быть решено методом Дарбу в замкнутой форме тогда и только тогда, когда последовательность инвариантов Лапласа, ассоциированная с уравнением, обрывается.

В 2004 г. Ибрагимов [3] описал структуру алгебры дифференциальных инвариантов линейных гиперболических уравнений (2) и показал, что любой их дифференциальный инвариант относительно преобразований (3) является функцией от инвариантов Лапласа и функций, полученных из последних путем применения к ним инвариантных дифференцирований.

Аналоги инвариантов Лапласа для линейных эллиптических уравнений были построены Коттоном в 1990 г. [1].

Подчеркнем, что построенные нами дифференциальные 2-формы λ_+ и λ_- , в отличие от классических инвариантов Лапласа и Коттона, являются абсолютными дифференциальными инвариантами относительно контактных преобразований.

2. Подход Лычагина к уравнениям Монжа-Ампера

2.1. Эффективные дифференциальные формы. Пускай M — n -мерное гладкое многообразие, $J^k M$ — многообразие k -джетов гладких функций на M , а $D(J^k M)$ и $\Omega^s(J^k M)$ —

$C^\infty(J^k M)$ -модули векторных полей и дифференциальных s -форм на $J^k M$ соответственно. $(2n+1)$ -мерное гладкое многообразие 1-джетов $J^1 M$ снабжено естественной контактной структурой — распределением Картана

$$C : J^1 M \ni a \mapsto C(a) \subset T_a(J^1 M),$$

задаваемым дифференциальной 1-формой Картана U . Подпространство $C(a) = \ker U_a$ касательного пространства $T_a(J^1 M)$ называется *подпространством Картана*.

В канонических локальных координатах Дарбу

$$(q, u, p) = (q_1, \dots, q_n, u, p_1, \dots, p_n)$$

на $J^1 M$ форма Картана имеет вид

$$U = du - pdq = du - p_1 dq_1 - \dots - p_n dq_n.$$

Ограничение дифференциала формы Картана на подпространство Картана не вырождено на нем и определяет симплектическую структуру Ω_a .

Всякая дифференциальная n -форма $\omega \in \Omega^n(J^1 M)$ определяет нелинейный дифференциальный оператор

$$\Delta_\omega : C^\infty(M) \rightarrow \Omega^n(M),$$

действующий на функцию $v \in C^\infty(M)$ по следующему правилу [25]:

$$(4) \quad \Delta_\omega(v) = \omega|_{j_1(v)(M)}.$$

Здесь $j_1(v)(M) \subset J^1 M$ — график 1-джета $j_1(v)$ и $\omega|_{j_1(v)(M)}$ — ограничение дифференциальной формы ω на этот график.

Оператор Δ_ω называется *оператором Монжа-Ампера*, а уравнение

$$E_\omega \stackrel{\text{def}}{=} \{\Delta_\omega(v) = 0\} \subset J^2 M$$

— *уравнением Монжа-Ампера*.

Заметим, что соответствие между дифференциальными n -формами на J^1M и операторами Монжа-Ампера не является взаимно-однозначным. Для установления взаимно-однозначного соответствия между дифференциальными формами и операторами необходимо ограничиться только так называемыми эффективными формами.

Дифференциальные n -формы на J^1M , исчезающие на любом интегральном многообразии распределения Картана, и поэтому порождающие нулевой дифференциальный оператор, образуют градуированный идеал $I^* = \bigoplus_{s \geq 0} I^s$ ($I^s \subset \Omega^s(J^1M)$) во внешней алгебре $\Omega^*(J^1M)$. Элементы фактор-модуля

$$\Omega_\varepsilon^s(J^1M) = \Omega^s(J^1M) / I^s.$$

называются *эффективными s -формами* ($s \leq n$), а сам модуль — модулем *эффективных дифференциальных форм*.

Имея в виду классические уравнения Монжа-Ампера (1), далее мы ограничимся случаем $n = 2$. Для любого элемента фактор-модуля Ω_ε^2 может быть выбран единственный представитель $\omega \in \Omega^2(J^1M)$ такой, что $X_1 \lrcorner \omega = 0$ и $\omega \wedge dU = 0$. Здесь X_1 — контактное векторное поле с производящей функцией 1. В канонических координатах Дарбу $X_1 = \partial/\partial u$ и такие представители имеют следующий вид:

$$(5) \quad \omega = Edq_1 \wedge dq_2 + B(dq_1 \wedge dp_1 - dq_2 \wedge dp_2) + \\ + Cdq_1 \wedge dp_2 - Adq_2 \wedge dp_1 + Ddp_1 \wedge dp_2,$$

где A, B, C, D, E — некоторые гладкие функции на J^1M .

Дифференциальные формы вида (5) мы также будем называть эффективными.

Заметим, что форме (5) отвечает уравнение (1).

2.2. Оператор A_ω . Пусть Ω — ограничение дифференциала формы Картана на распределение Картана: $\Omega_a = dU|_{C(a)}$. Заметим, что Ω не является дифференциальной 2-формой на J^1 , так как этот объект определен только на распределении Картана.

Определим ассоциированный с формой ω оператор

$$A_\omega : D(C) \mapsto D(C),$$

действующий на модуле векторных полей $D(C)$, которые лежат в распределении Картана [27]:

$$X \lrcorner \omega = A_\omega X \lrcorner \Omega,$$

где $X \in D(C)$ — произвольное векторное поле.

Функция $\text{Pf}(\omega) \in C^\infty(J^1M)$, определяемая равенством

$$\text{Pf}(\omega)\Omega \wedge \Omega = \omega \wedge \omega,$$

называется *пфафффианом* формы ω .

Пусть h — не обращающаяся в нуль функция на J^1M . Дифференциальные эффективные 2-формы ω и $h\omega$ определяют одно и то же уравнение Монжа-Ампера, т.е. $E_{h\omega} = E_\omega$. Кроме того, $A_{h\omega} = hA_\omega$ и $\text{Pf}(h\omega) = h^2 \text{Pf}(\omega)$.

Перечислим основные свойства оператора A_ω .

- Оператор A_ω симметричен относительно Ω , то есть,

$$\Omega(A_\omega X, Y) = \Omega(X, A_\omega Y)$$

для любых векторных полей $X, Y \in D(C)$;

- Векторные поля X , и $A_\omega X \in D(C)$ косоортогональны, то есть

$$\Omega(A_\omega X, X) = 0.$$

- Квадрат оператора A_ω скалярен и

$$(6) \quad A_\omega^2 + \text{Pf}(\omega) = 0.$$

2.3. Характеристические распределения и прямая сумма распределений. Подпространство Картана в каждой точке $a \in J^1M$ распадается в прямую сумму собственных подпространств оператора A_a : $C(a) = C_+(a) \oplus C_-(a)$, где $C_\pm(a) = \{X \in C(a) | A_a X = \pm X\}$. Мы получаем два 2-мерных распределения на J^1M :

$$C_\pm : J^1M \ni a \mapsto C_\pm(a) \subset C(a).$$

Эти распределения косоортогональны, т.е. $\Omega_a(P_a, Q_a) = 0$ для любых векторов $P_a \in C_+(a)$ и $Q_a \in C_-(a)$. Кроме того, на каждом из подпространств $C_+(a)$ и $C_-(a)$ симплектическая структура Ω_a не вырождена. Распределения C_\pm называются *характеристическими*. Это определение оправдано тем, для линейных гиперболических уравнений существует естественная проекция этих распределений на плоскость (x, y) . Эти проекции одномерны и их интегральные кривые представляют собой обычные характеристики линейных уравнений. Для общих нелинейных уравнений такой естественной проекции не существует.

Заметим, что при умножении 2-формы на -1 собственные подпространства оператора A_a меняются местами, так что уравнение Монжа-Ампера порождает разложение подпространства Картана с точностью до перестановки $C_+(a)$ и $C_-(a)$.

Обратно: всякое разложение подпространства Картана $C(a)$ в прямую сумму двух двумерных косоортогональных относительно Ω_a подпространств, на каждом из которых симплектическая структура не вырождена, порождает некоторое гиперболическое уравнение Монжа-Ампера.

Обозначим через $C_\pm^{(k)}$ их k -е производные.¹ Первые производные характеристических распределений являются 3-мерными распределениями, а их пересечение порождает 1-мерное распределение

$$l : J^1M \ni a \mapsto l(a) = C_+^{(1)}(a) \cap C_-^{(1)}(a) \subset T_a(J^1M),$$

которое не лежит в распределении Картана: $U_a(Z_a) \neq 0$ для любого вектора $Z_a \in l(a)$.

¹Первая производная $P^{(1)}$ распределения $P = \mathcal{F}\langle X_1, \dots, X_n \rangle$ — это распределение, порожденное векторными полями X_1, \dots, X_n и их всевозможными коммутаторами. Далее — по индукции.

Таким образом, в каждой точке $a \in J^1M$ касательное пространство к многообразию 1-джетов распадается в прямую сумму трех подпространств [26]:

$$T_a(J^1M) = C_+(a) \oplus l(a) \oplus C_-(a).$$

Поэтому гиперболическое уравнение Монжа-Ампера можно рассматривать как прямую сумму трех распределений:

$$\mathcal{P} = C_- \oplus l \oplus C_+.$$

Пусть теперь E_ω — эллиптическое уравнение Монжа-Ампера и форма ω нормирована. Этот случай сходен с гиперболическим, только вместо касательного пространства $T_a(J^1M)$ нужно рассматривать его комплексификацию $T_a^{\mathbb{C}}(J^1M)$. Комплексификация касательного пространства распадается в прямую сумму трех комплексных подпространств:

$$T_a^{\mathbb{C}}(J^1M) = C_+(a) \oplus l(a) \oplus C_-(a),$$

где $C_{\pm}(a)$ — собственные комплексные подпространства оператора A_a , отвечающие собственным значениям $\pm i$ ($i = \sqrt{-1}$) и $l(a) = C_+^{(1)}(a) \cap C_-^{(1)}(a)$ — комплексная прямая. Отметим, что подпространства $C_+(a)$ и $C_-(a)$ комплексно сопряжены: $\overline{C_+(a)} = C_-(a)$, а комплексная прямая $l(a)$ порождена действительным вектором: $l(a) = \mathbb{C}Z_a$, $Z_a \in T_a(J^1M)$.

Таким образом, эллиптическое уравнение Монжа-Ампера представляет собой прямую сумму комплексных распределений.

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ТЕНЗОРНЫЕ ИНВАРИАНТЫ УРАВНЕНИЙ

3.1. Разложение комплекса де Рама. Рассмотрим гиперболическое уравнение Монжа-Ампера.

Обозначим распределения C_+, l и C_- через P_1, P_2 и P_3 соответственно. Пусть D_j — модуль векторных полей из распределения P_j . Пространство внешних s -форм на $T_a(J^1M)$ распадается в прямую сумму

$$(7) \quad \Lambda^s(T_a^*(J^1M)) = \bigoplus_{|\mathbf{k}|=s} \Lambda^{\mathbf{k}}(T_a^*(J^1M)),$$

где \mathbf{k} — мультииндекс, $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$, $k_i \in \{0, 1, \dots, \dim P_i\}$, $|\mathbf{k}| = k_1 + k_2 + k_3$,

$$\Lambda^{\mathbf{k}}(T_a^*(J^1M)) = \left\{ \sum_{j_1+j_2+j_3=|\mathbf{k}|} \theta_{j_1} \wedge \theta_{j_2} \wedge \theta_{j_3}, \text{ где } \theta_{j_i} \in \Lambda^{k_i}(P_i(a)^*) \right\}$$

и $\Lambda^s(P_i(a)^*)$ — векторное пространство внешних s -форм на $P_i(a)$.

Пусть $\Omega^s(P_i)$ — модуль гладких сечений векторного расслоения

$$\pi_i : \bigcup_{a \in J^1M} \Lambda^s(P_i(a)^*) \rightarrow J^1M.$$

Этот модуль естественным образом отождествляется с подмодулем

$$\Omega_i^s = \{\alpha \in \Omega^s(J^1M) \mid X \lrcorner \alpha = 0 \forall X \in D_j, j \neq i\} \subset \Omega^s(J^1M)$$

и в дальнейшем мы не будем делать различий между $\Omega^s(P_i)$ и Ω_i^s .

Разложение (7) в свою очередь влечет разложение в прямую сумму модуля дифференциальных s -форм на J^1M :

$$\Omega^s(J^1M) = \bigoplus_{|\mathbf{k}|=s} \Omega^{\mathbf{k}}.$$

Здесь

$$\Omega^{\mathbf{k}} = \left\{ \sum_{j_1+j_2+j_3=|\mathbf{k}|} \alpha_{j_1} \wedge \alpha_{j_2} \wedge \alpha_{j_3}, \text{ где } \alpha_{j_i} \in \Omega_i^{k_i} \right\} \subset \bigotimes_{i=1}^3 \Omega_i^{k_i}.$$

Внешний дифференциал также распадается в прямую сумму

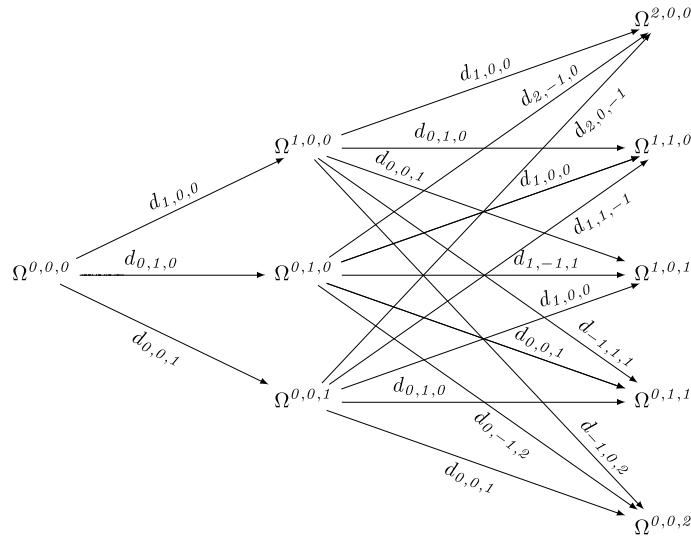
$$d = \bigoplus_{|\mathbf{t}|=1} d_{\mathbf{t}},$$

где $t_j \in I_j = \{z \in \mathbb{Z} \mid |z| \leq \dim P_j\}$ и

$$d_{\mathbf{t}} : \Omega^{\mathbf{k}} \rightarrow \Omega^{\mathbf{k}+\mathbf{t}}.$$

Здесь под суммой мультииндексов $\mathbf{a} = (a_i)_i$ и $\mathbf{b} = (b_i)_i$ мы понимаем мультииндекс $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_i + b_i)_i$.

Разложение трех первых членов комплекса де Рама представлено на следующей диаграмме:



Если одна из компонент t_i мультииндекса \mathbf{t} отрицательна, то оператор $d_{\mathbf{t}}$ является $C^\infty(J^1 M)$ -гомоморфизмом [12]. Не сложно показать, что таких нетривиальных гомоморфизмов всего четыре: $d_{-1,1,1}$, $d_{1,1,-1}$, $d_{2,-1,0}$ и $d_{0,-1,2}$.

3.2. Формы Лапласа. Пусть $\mathbf{1}_i = (0, 1_i, 0)^1$ — мультииндекс длины 3. Гомоморфизм $d_{\mathbf{1}_j+\mathbf{1}_k-\mathbf{1}_s}$ ($s, j, k = 1, 2, 3; s \neq j, k$) можно рассматривать как $C^\infty(J^1M)$ -линейное отображение

$$d_{\mathbf{1}_j+\mathbf{1}_k-\mathbf{1}_s} : \Omega^{\mathbf{1}_s} \rightarrow \Omega^{\mathbf{1}_j+\mathbf{1}_k},$$

или как $C^\infty(J^1M)$ -билинейное отображение

$$(8) \quad d_{\mathbf{1}_j+\mathbf{1}_k-\mathbf{1}_s} : D_j \times D_k \rightarrow D_s.$$

Эти гомоморфизмы мы используем для определения тензорных полей $\tau_{\mathbf{1}_j+\mathbf{1}_k-\mathbf{1}_s}$ на J^1M , положив для произвольных векторных полей X, Y на J^1M

$$(9) \quad \tau_{\mathbf{1}_j+\mathbf{1}_k-\mathbf{1}_s}(X, Y) = \tau_{\mathbf{1}_j+\mathbf{1}_k-\mathbf{1}_s}(\mathbf{P}_j X, \mathbf{P}_k Y),$$

где $\mathbf{P}_j : D(J^1M) \rightarrow D_j$ — проектор векторных полей на распределение P_j ($j = 1, 2, 3$).

Таким образом, мы получили четыре тензорных поля

$$\tau_{-1,1,1}, \quad \tau_{1,1,-1}, \quad \tau_{2,-1,0} \quad \text{и} \quad \tau_{0,-1,2}$$

на J^1M . В силу (8) их можно рассматривать как билинейные отображения

$$\begin{aligned} \tau_{2,-1,0} : C_+ \times C_+ &\rightarrow l, \\ \tau_{0,-1,2} : C_- \times C_- &\rightarrow l, \\ \tau_{-1,1,1} : C_- \times l &\rightarrow C_+, \\ \tau_{1,1,-1} : C_+ \times l &\rightarrow C_-. \end{aligned}$$

Пусть $s \neq j, k$. Для произвольных векторных полей X и Y на J^1M

$$(10) \quad \tau_{\mathbf{1}_j+\mathbf{1}_k-\mathbf{1}_s}(X, Y) = -\mathbf{P}_s [\mathbf{P}_j X, \mathbf{P}_k Y].$$

Определим две дифференциальные 2-формы λ_- и λ_+ из модуля Ω^{101} как "косую свертку" тензорных полей:

$$(11) \quad \lambda_+ = \langle \tau_{0,-1,2}, \tau_{1,1,-1} \rangle, \quad \lambda_- = \langle \tau_{2,-1,0}, \tau_{-1,1,1} \rangle.$$

¹единица стоит только на i -м месте.

Здесь скобка $\langle \cdot, \cdot \rangle$ определена формулой

$$\langle \alpha \otimes X, \beta \otimes Y \rangle = (Y \lrcorner \alpha) \wedge (X \lrcorner \beta)$$

для тензоров вида $\alpha \otimes X$ и $\beta \otimes Y$. На линейные комбинации таких тензоров она продолжается по линейности.

Формы λ_+ и λ_- мы будем называть *формами Лапласа* [13]. Как показывает следующий пример, это определение оправдано.

Пример 4. Для линейного гиперболического уравнения

$$(12) \quad v_{xy} = a(x, y)v_x + b(x, y)v_y + c(x, y)v + g(x, y)$$

формы Лапласа имеют вид

$$\lambda_- = (ab + c - b_{q_2})dq_1 \wedge dq_2, \quad \lambda_+ = -(ab + c - a_{q_1})dq_1 \wedge dq_2.$$

Коэффициенты $k = ab + c - b_{q_2}$ и $h = ab + c - a_{q_1}$ при $dq_1 \wedge dq_2$ в этих выражениях представляют собой классические инварианты Лапласа [20].

Пример 5. Для уравнения

$$(13) \quad v_{xy} = f(x, y, v, v_x, v_y)$$

формы Лапласа

$$(14) \quad \lambda_- = f_{p_2 p_2} (f_{p_1} dq_1 \wedge du - dq_1 \wedge dp_2) + (f_u - p_2 f_{p_2 u} + f_{p_1} f_{p_2} - p_2 f_{p_1} f_{p_2 p_2} - f f_{p_1 p_2} - f_{q_2 p_2}) dq_1 \wedge dq_2,$$

$$(15) \quad \lambda_+ = f_{p_1 p_1} (f_{p_2} dq_2 \wedge du - dq_2 \wedge dp_1) + (-f_u + p_1 f_{p_1 u} - f_{p_1} f_{p_2} + p_1 f_{p_2} f_{p_1 p_1} + f f_{p_1 p_2} + f_{q_1 p_1}) dq_1 \wedge dq_2.$$

Пример 6. Уравнение

$$\frac{v_{xx}v_{yy} - v_{xy}^2}{(1 + v_x^2 + v_y^2)^2} = K(x, y),$$

описывает поверхности гауссовой кривизны $K(x, y)$, которые задаются как графики функций $v = v(x, y)$. Для $K = -1$ это уравнение гиперболическое и его формы Лапласа имеют вид:

$$\lambda_- = \frac{1}{2(1 + p_1^2 + p_2^2)}(dq_1 \wedge dp_2 - dq_2 \wedge dp_1 - p_2 du \wedge dp_1 + p_1 du \wedge dp_2),$$

$$\lambda_+ = -\lambda_-.$$

Для эллиптических уравнений все наши конструкции остаются в силе. Нужно только вместо комплекса де Рама рассматривать его комплексификацию. Полученные при этом формы Лапласа будут комплексно сопряженными.

Пример 7. Для линейного эллиптического уравнения

$$(16) \quad v_{xx} + v_{yy} = a(x, y)v_x + b(x, y)v_y + c(x, y)v + g(x, y)$$

формы Лапласа имеют вид

$$(17) \quad \lambda_{\pm} = \frac{1}{4} \left(b_x - a_y \pm \left(\frac{1}{2}(a^2 + b^2) + 2c - a_x - b_y \right) i \right) dx \wedge dy.$$

Коэффициенты этих форм

$$(18) \quad K = b_x - a_y, \quad \text{and} \quad H = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) + 2c - a_x - b_y$$

представляют собой инварианты Коттона [1].

Уравнение Монжа-Ампера будем называть *регулярным*, если производные любого порядка характеристических распределений также являются распределениями. Это равносильно тому, что ранг форм Лапласа не меняется в рассматриваемой области. Далее мы будем рассматривать только такие уравнения.

4. КОНТАКТНАЯ ЛИНЕАРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим проблему локальной эквивалентности невырожденных уравнений Монжа-Ампера линейным уравнениям вида

$$(19) \quad v_{xx} \pm v_{yy} = a(x, y)v_x + b(x, y)v_y + c(x, y)v + g(x, y).$$

Если уравнение Монжа-Ампера локально контактно эквивалентно линейному уравнению вида (19), то его формы Лапласа удовлетворяют одному из следующих условий:

- (1) $\lambda_+ = \lambda_- = 0$,
- (2) $\lambda_+ \neq 0$ и $\lambda_- \neq 0$,
- (3) одна из форм Лапласа — нулевая, а другая — нет.

Заметим, что так как формы Лапласа для эллиптических уравнений комплексно сопряжены, то для последний случай не может реализоваться для таких уравнений.

Рассмотрим каждый из этих случаев отдельно.

4.1. Обе формы Лапласа обращаются в нуль. Известно, что если инварианты Лапласа k и h для линейного гиперболического уравнения (12) тождественно равны нулю, то такое уравнение заменой переменных может быть приведено к волновому уравнению $v_{xy} = 0$. Как показывает следующая теорема [17], аналогичное утверждение оказывается справедливым и для уравнений Монжа-Ампера.

Теорема 1. *Невырожденное уравнение Монжа-Ампера локально контактно эквивалентно либо волновому уравнению $v_{xy} = 0$, либо уравнению Пуассона $v_{xx} + v_{yy} = f(x, y)$ тогда и только тогда, когда обе его формы Лапласа равны нулю.*

4.2. Обе формы Лапласа не обращаются в нуль. Заметим, что формы Лапласа для линейных уравнений (19) удовлетворяют следующим условиям:

$$(20) \quad \lambda_{\pm} \wedge \lambda_{\pm} = 0, \quad \lambda_+ \wedge \lambda_- = 0, \quad d\lambda_{\pm} = 0.$$

Поэтому эти же условия должны выполняться для уравнений Монжа-Ампера, которые контактно эквивалентны линейным уравнениям. Оказывается, эти условия являются и достаточными. А именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть для невырожденного уравнения Монжа-Ампера обе формы Лапласа не обращаются в нуль. Уравнение*

локально контактно эквивалентно линейному уравнению (19) тогда и только тогда, когда условия (20) выполняются.

4.3. Одна из форм Лапласа равна нулю, а другая — нет. Как отметили выше, этот случай может реализоваться лишь для гиперболических уравнений. Для определенности предположим, что $\lambda_- = 0$ и $\lambda_+ \neq 0$.

Мы должны предположить, что $\lambda_+ \wedge \lambda_+ = 0$, ибо это условие выполняется для линейных уравнений. Это означает, что $\lambda_+ = \eta_- \wedge \vartheta_+$, где $\eta_- \in \Omega^{001}$ и $\vartheta_+ \in \Omega^{100}$ — некоторые дифференциальные 1-формы.

Теорема 3 (см. [13]). *Допустим, что одна из форм Лапласа нулевая, а вторая, скажем λ_+ , — нет. Уравнение Монжа-Ампера локально контактно эквивалентно линейному уравнению*

$$v_{xx} - v_{yy} = a(x, y)v_x + b(x, y)v_y + c(x, y)v + g(x, y).$$

тогда и только тогда, когда $d\lambda_+ = 0$, $\lambda_+ = \eta_- \wedge \vartheta_+$ и распределение $\mathcal{F}\langle\vartheta_+\rangle$ вполне интегрируемо.

5. УРАВНЕНИЕ $\mathbf{v}_{xy} = \mathbf{k}(x, y)\mathbf{v}$

Следующая теорема дает условия эквивалентности уравнений Монжа-Ампера линейным гиперболическим уравнениям (19), у которых $a = b = 0$.

Теорема 4. *В окрестности точки $a_0 \in J^1M$ гиперболическое уравнение Монжа-Ампера локально контактно эквивалентно уравнению*

$$(21) \quad v_{xy} = k(x, y)v$$

для некоторой функции k ($k(a_0) \neq 0$) тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

- (1) $\lambda_+ \neq 0$ и $\lambda_- \neq 0$,
- (2) $\lambda_+ \wedge \lambda_+ = \lambda_- \wedge \lambda_- = \lambda_+ \wedge \lambda_- = 0$
- (3) $d\lambda_+ = d\lambda_- = 0$,

$$(4) \lambda_+ + \lambda_- = 0.$$

Доказательство. Условия 1–4 являются необходимыми, поскольку они выполняются для уравнения (21). Докажем их достаточность.

Зафиксируем точку $a_0(q^0, u^0, p^0) \in J^1M$. Из условий 2 и 3 следует, что уравнение локально контактно эквивалентно линейному уравнению (см. [13])

$$v_{xy} = a(x, y)v_x + b(x, y)v_y + c(x, y)v + g(x, y).$$

Для этого уравнения эффективная форма

$$\omega = dq_1 \wedge dp_1 - dq_2 \wedge dp_2 - 2(ap_1 + bp_2 + cu + g)dq_1 \wedge dq_2.$$

Здесь a, b, c, g — функции от q_1, q_2 . Учитывая условие 4 теоремы, получаем, что $b_{q_2} = a_{q_1}$, то есть $a = \varphi_{q_2}$ и $b = \varphi_{q_1}$ для некоторой функции $\varphi = \varphi(q)$. Эта функция определена с точностью до аддитивной постоянной, которую мы выберем так, чтобы в точке a функция φ обращалась в нуль, то есть $\varphi(q^0) = 0$.

Контактное преобразование

$$\phi : \begin{cases} q_1 \mapsto q_1, \\ q_2 \mapsto q_2, \\ u \mapsto e^\varphi(u + \alpha(q_1^0 - q_1) + \beta(q_2^0 - q_2)), \\ p_1 \mapsto e^\varphi(p_1 - \alpha + (u + \alpha(q_1^0 - q_1) + \beta(q_2^0 - q_2))\varphi_{q_1}), \\ p_2 \mapsto e^\varphi(p_2 - \beta + (u + \alpha(q_1^0 - q_1) + \beta(q_2^0 - q_2))\varphi_{q_2}), \end{cases}$$

где $\alpha = u^0 \varphi_{q_1}(q^0)$ и $\beta = u^0 \varphi_{q_2}(q^0)$, сохраняет точку a_0 . Применяв это преобразование к ω и выделив у полученной формы эффективную часть, мы получим форму

$$\phi^*(\omega)_\varepsilon = e^\varphi(dq_1 \wedge dp_1 - dq_2 \wedge dp_2) - 2(g + e^\varphi(u + \alpha(q_1^0 - q_1) + \beta(q_2^0 - q_2))(c + \varphi_{q_1}\varphi_{q_2} - \varphi_{q_1q_2}))dq_1 \wedge dq_2.$$

Ей отвечает уравнение

$$(22) \quad v_{q_1q_2} = \tilde{c}v + \tilde{g},$$

где

$$\tilde{c} = c + \varphi_{q_1}\varphi_{q_2} - \varphi_{q_1q_2}$$

и

$$\tilde{g} = ge^{-\varphi} + (\alpha(q_1^0 - q_1) + \beta(q_2^0 - q_2))\tilde{c}.$$

Пусть $v = \psi(q_1, q_2)$ — решение уравнения (22), удовлетворяющее следующим условиям Коши:

$$\psi|_{q_2=q_2^0} = \gamma_0(q_1) \quad \text{и} \quad \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \Big|_{q_2=q_2^0} = \gamma_1(q_1),$$

где функции γ_0 и γ_1 гладкие и такие, что $\gamma_0(q_1^0) = \gamma_0'(q_1^0) = \gamma_1(q_1^0) = 0$. Согласно теореме существования решения задачи Коши для уравнения (22), в некоторой окрестности точки a_0 такое решение существует и его первая производная по переменной q_1 обращается в нуль в этой точке, т.е. $\frac{\partial v}{\partial q_1} \Big|_a = 0$. Контактное преобразование

$$(q_1, q_2, u, p_1, p_2) \mapsto (q_1, q_2, u + \psi, p_1 + \psi_{q_1}, p_2 + \psi_{q_2}),$$

сохраняет точку a_0 и переводит уравнение (22) в уравнение (21). \square

6. УРАВНЕНИЕ $\mathbf{v}_{xx} + \mathbf{v}_{yy} = \mathbf{k}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{v} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

Теорема, аналогичная теореме 4, справедлива и для эллиптических уравнений.

Теорема 5. *В окрестности точки $a_0 \in J^1M$ эллиптическое уравнение Монжа-Ампера E локально контактно эквивалентно уравнению*

$$(23) \quad v_{xx} + v_{yy} = k(x, y)v + f(x, y)$$

для некоторых функций k ($k(a_0) \neq 0$) и f тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

- (1) $\lambda_+ \neq 0$ и $\lambda_- \neq 0$,
- (2) $\lambda_+ \wedge \lambda_+ = \lambda_- \wedge \lambda_- = \lambda_+ \wedge \lambda_- = 0$,
- (3) $d\lambda_+ = d\lambda_- = 0$,
- (4) $\lambda_+ + \lambda_- = 0$.

Доказательство. Условия 1–4 являются необходимыми, потому что они выполняются для уравнения (23). Докажем их достаточность.

Итак, пусть эти условия выполняются для некоторого уравнения E типа $H_{2,2}$. Зафиксируем точку

$$a_0(q_1^0, q_2^0, u^0, p_1^0, p_2^0) \in J^1M.$$

Из условий 2 и 3 следует, что уравнение E локально контактно эквивалентно линейному уравнению [13]

$$(24) \quad v_{xx} + v_{yy} = a(x, y)v_x + b(x, y)v_y + c(x, y)v + g(x, y).$$

Учитывая условие 4 теоремы, получаем, что $b_{q_1} = a_{q_2}$, то есть $a = \varphi_{q_1}$ и $b = \varphi_{q_2}$ для некоторой функции $\varphi = \varphi(q)$. Эта функция определена с точностью до аддитивной постоянной, которую мы выберем так, чтобы в точке a_0 функция φ обращалась в нуль, то есть $\varphi(q^0) = 0$.

Таким образом, эффективная форма, которая отвечает этому уравнению имеет вид

$$\omega = dq_1 \wedge dp_2 - dq_2 \wedge dp_1 - (\varphi_{q_1}p_1 + \varphi_{q_2}p_2 + cu + g)dq_1 \wedge dq_2.$$

Контактное преобразование

$$\phi : \begin{cases} q_1 \mapsto q_1, \\ q_2 \mapsto q_2, \\ u \mapsto (u + \alpha(q_1^0 - q_1) + \beta(q_2^0 - q_2))e^{\frac{u}{2}}, \\ p_1 \mapsto (p_1 - \alpha + \frac{\varphi_{q_1}}{2}(u + \alpha(q_1^0 - q_1) + \beta(q_2^0 - q_2)))e^{\frac{u}{2}}, \\ p_2 \mapsto (p_2 - \beta + \frac{\varphi_{q_2}}{2}(u + \alpha(q_1^0 - q_1) + \beta(q_2^0 - q_2)))e^{\frac{u}{2}}, \end{cases}$$

где $\alpha = \frac{1}{2}u^0\varphi_{q_1}(q^0)$ и $\beta = \frac{1}{2}u^0\varphi_{q_2}(q^0)$, сохраняет точку a_0 . Применяя это преобразование к ω и выделив у полученной формы эффективную часть, мы получим форму

$$\phi^*(\omega)_\varepsilon = (k(q)u + f(q))dq_1 \wedge dq_2 + dq_1 \wedge dp_2 - dq_2 \wedge dp_1,$$

где

$$k(q) = \frac{1}{2}(\varphi_{q_2q_2} + \varphi_{q_1q_1}) - \frac{1}{4}(\varphi_{q_1}^2 + \varphi_{q_2}^2) - c(q)$$

и

$$f(q) = k(q)(\alpha(q_1^0 - q_1) + \beta(q_2^0 - q_2)) - ge^{-\frac{q}{2}}.$$

Ей отвечает уравнение $v_{xx} + v_{yy} = k(x, y)v + f(x, y)$. \square

Замечание 1. Если коэффициенты уравнения Монжа-Ампера — аналитические функции своих переменных, то при выполнении условий теоремы 5 оно может быть приведено к однородному уравнению

$$(25) \quad v_{xx} + v_{yy} = k(x, y)v$$

для некоторой функций k ($k(a_0) \neq 0$).

7. ПРИВОДИМОСТЬ УРАВНЕНИЙ МОНЖА-АМПЕРА К ЛИНЕЙНЫМ УРАВНЕНИЯМ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассмотрим проблему приведения уравнений Монжа-Ампера к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами в следующей формулировке: *найти условия при которых уравнения Монжа-Ампера (1) заменой переменных приводятся к уравнению вида*

$$(26) \quad v_{xx} \pm v_{yy} = \alpha v_x + \beta v_y + \gamma v + f(x, y) = 0,$$

где α, β, γ — постоянные.

Перед тем как решать эту проблему для общих уравнений Монжа-Ампера, выясним, какие линейные уравнения приводятся заменой переменных к уравнениям с постоянными коэффициентами. Гиперболический и эллиптический типы мы рассмотрим отдельно.

7.1. Гиперболические линейные уравнения. Прежде всего заметим, что в гиперболическом случае вместо уравнения (26) можно рассматривать эквивалентное ему уравнение

$$(27) \quad v_{xy} = \lambda v,$$

где λ — некоторая постоянная. Если эта постоянная не равна нулю, это уравнение эквивалентно уравнению

$$(28) \quad v_{xy} = v.$$

Уравнение (28) называется *телеграфным*.

Сформулируем условия, при которых линейные уравнения вида

$$(29) \quad v_{xy} = a(x, y)v_x + b(x, y)v_y + c(x, y)v + g(x, y)$$

заменой переменных приводятся к уравнениям вида (27).

При решении поставленной задачи необходимо рассматривать преобразования вида

$$(30) \quad (x, y, v) \mapsto (X(x), Y(y), Z_1(x, y)v + Z_2(x, y)),$$

где X, Y, Z_1, Z_2 — некоторые гладкие функции, ибо только такие преобразования сохраняют вид уравнений (29).

Заметим, что для уравнений (27) формы Лапласа имеют вид

$$\lambda_- = -\lambda_+ = \lambda dq_1 \wedge dq_2.$$

Лемма 1. Пусть уравнение

$$(31) \quad v_{xy} = k(x, y)v$$

регулярно в некоторой окрестности точки $a_0 \in \mathbb{R}^2$. Это уравнение локально контактно эквивалентно уравнению

$$(32) \quad v_{xy} = \lambda v$$

для некоторой постоянной λ в том и только том случае, когда функция k удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(33) \quad kk_{xy} - k_x k_y = 0.$$

Доказательство. Пусть (x_0, y_0) — координаты точки a_0 . Формы Лапласа для уравнения (31) имеют вид

$$\lambda_+ = k(x, y)dx \wedge dy \quad \text{и} \quad \lambda_- = -k(x, y)dx \wedge dy.$$

Так как это уравнение регулярно, то могут реализоваться две возможности: $k \equiv 0$ в некоторой окрестности точки a_0 или $k(x_0, y_0) \neq 0$.

В первом случае уравнение (31) представляет собой волновое уравнение.

Рассмотрим второй случай, когда функция k не аннулируется в некоторой окрестности точки a .

Из условия (33) следует, что

$$\frac{\partial^2 \ln |k|}{\partial q_1 \partial q_2} = 0$$

и поэтому $k(q_1, q_2) = \tilde{X}(q_1)\tilde{Y}(q_2)$ для некоторых функций \tilde{X} и \tilde{Y} .

Пусть X и Y — первообразные функций \tilde{X} и \tilde{Y} соответственно, такие, что $X(q_1^0) = q_1^0$ и $Y(q_2^0) = q_2^0$. Эффективная форма, отвечающая уравнению (31), имеет следующий вид:

$$\omega = dq_1 \wedge dp_1 - dq_2 \wedge dp_2 - 2X'(q_1)Y'(q_2)u dq_1 \wedge dq_2.$$

В силу того, что функция k не аннулируется, для функций X и Y в окрестности точки a существуют обратные функции, которые обозначим χ и ψ соответственно. Заметим, что

$$\chi(q_1^0) = q_1^0, \quad \psi(q_2^0) = q_2^0, \quad \chi'(q_1^0) \neq 0, \quad \psi'(q_2^0) \neq 0.$$

Контактное преобразование

$$(q_1, q_2, u, p_1, p_2) \mapsto \left(\chi(q_1), \psi(q_2), u - \xi q_1 - \eta q_2, \frac{p_1 - \xi}{\chi'(q_1)}, \frac{p_2 - \eta}{\psi'(q_2)} \right),$$

где

$$\xi = p_1^0 \left(\frac{1}{\chi'(q_1^0)} - 1 \right) \quad \text{и} \quad \eta = p_2^0 \left(\frac{1}{\psi'(q_2^0)} - 1 \right),$$

сохраняет точку a_0 и переводит форму ω в форму

$$\tilde{\omega} = dq_1 \wedge dp_1 - dq_2 \wedge dp_2 - 2X'(\chi(q_1))Y'(\psi(q_2))(u - \xi q_1 - \eta q_2)\chi'(q_1)\psi'(q_2)dq_1 \wedge dq_2.$$

Учитывая, что

$$\chi'(q_1) = \frac{1}{X'(\chi(q_1))} \quad \text{и} \quad \psi'(q_2) = \frac{1}{Y'(\psi(q_2))},$$

получаем, что

$$\tilde{\omega} = dq_1 \wedge dp_1 - dq_2 \wedge dp_2 - 2(u + \gamma(q))dq_1 \wedge dq_2,$$

где

$$\gamma(q) = -X'(\chi(q_1))Y'(\psi(q_2))(\xi q_1 + \eta q_2).$$

Форме $\tilde{\omega}$ отвечает уравнение

$$(34) \quad v_{q_1 q_2} = v + \gamma(q).$$

Пусть $v = z(q_1, q_2)$ — решение этого уравнения, удовлетворяющее следующим условиям Коши:

$$z|_{q_2=q_2^0} = \xi_0(q_1) \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial q_2} \Big|_{q_2=q_2^0} = \xi_1(q_1),$$

где функции ξ_0 и ξ_1 гладкие и такие, что

$$\xi_0(q_1^0) = \xi_0'(q_1^0) = \xi_1(q_1^0) = 0.$$

Согласно теореме существования, такое решение всегда найдется. Контактное преобразование

$$(q_1, q_2, u, p_1, p_2) \mapsto (q_1, q_2, u + z, p_1 + z_{q_1}, p_2 + z_{q_2}),$$

переводит уравнение (34) в уравнение $v_{xy} = v$.

□

Следующая теорема указывает условия приводимости линейных гиперболических уравнений к телеграфному уравнению.

Теорема 6. *Уравнение*

$$(35) \quad v_{xy} = a(x, y)v_x + b(x, y)v_y + c(x, y)v + g(x, y)$$

в окрестности точки $a_0(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ локально контактно эквивалентно телеграфному уравнению

$$(36) \quad v_{xy} = v$$

тогда и только тогда, когда оно регулярно, $a_x = b_y$, а функция $\Phi = ab + c - b_y$ не обращается в нуль в точке a_0 и удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$(37) \quad \Phi\Phi_{xy} - \Phi_x\Phi_y = 0.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что уравнение (37) инвариантно относительно преобразований вида (30).

Необходимость условий теоремы следует из того, что для телеграфного уравнения первые интегралы распределений $C_+^{(2)}$ и $C_-^{(2)}$ равны q_1 и q_2 соответственно, а формы Картана

$$\lambda_- = -\lambda_+ = dq_1 \wedge dq_2.$$

Функция $\Phi = 1$ и поэтому удовлетворяет уравнению (37).

Докажем достаточность. Пусть $a_0 \in J^1M$ — фиксированная точка с координатами (q^0, u^0, p^0) и пусть для уравнения (35) выполняются условия теоремы. Тогда это уравнение локально контактно эквивалентно уравнению $v_{xy} = k(x, y)v$ для некоторой гладкой функции k .

Для этого уравнения функция $\Phi = k$. Применив лемму 1, мы завершим доказательство. \square

7.2. Эллиптические линейные уравнения. Эллиптическое уравнение вида (26) локально эквивалентно уравнению

$$(38) \quad v_{xx} + v_{yy} = \frac{1}{4}(\alpha^2 + \beta^2 + 4\gamma)u + \tilde{f}(x, y),$$

где \tilde{f} — некоторая функция.

Таким образом, при решении поставленной проблемы вместо уравнений (26) мы можем рассматривать уравнение вида

$$(39) \quad v_{xx} + v_{yy} = \kappa v + f(x, y),$$

где κ — некоторая постоянная. Такое уравнение называется *уравнением Гельмгольца*.

Найдем условия, при которых линейные эллиптические уравнения вида заменой переменных приводятся к уравнениям Гельмгольца.

Лемма 2. *Для всякой гармонической функции $w(x, y)$ найдется гармоническая функция $h(x, y)$, такая, что*

$$(40) \quad h_x^2 + h_y^2 = e^w.$$

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно показать, что переопределенная система

$$(41) \quad \begin{cases} h_{xx} + h_{yy} = 0, \\ h_x^2 + h_y^2 = e^w \end{cases}$$

относительно функции h совместна для произвольной гармонической функции w . Запишем систему (41) в виде

$$\begin{cases} F = 0, \\ G = 0, \end{cases}$$

где

$$F = p_{11} + p_{22}, \quad G = p_1^2 + p_2^2 - e^w,$$

$x_1 = x, x_2 = y, p_i = h_{x_i}, p_{ij} = h_{x_i x_j}$ для $i, j = 1, 2$. Скобка Кругликова-Лычагина-Майера [7] для этой системы имеет вид:

$$\begin{aligned} [F, G] &= D_2^2(G) + D_1^2(G) - 2p_2 D_2(F) - 2p_1 D_1(F) \\ &= 2p_{11}^2 + 4p_{12}^2 + 2p_{22}^2 - e^w(w_{x_1 x_1} + w_{x_2 x_2} + w_{x_1}^2 + w_{x_2}^2), \end{aligned}$$

где

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial}{\partial u} + p_{i1} \frac{\partial}{\partial p_1} + p_{i2} \frac{\partial}{\partial p_2} + p_{i11} \frac{\partial}{\partial p_{11}} + p_{i12} \frac{\partial}{\partial p_{12}} + p_{i22} \frac{\partial}{\partial p_{22}}$$

— оператор полной производной по переменной x_i ($i = 1, 2$). В силу того, что функция w — гармоническая,

$$(42) \quad [F, G] = 2(h_{xx}^2 + 2h_{xy}^2 + h_{yy}^2) - e^w(w_x^2 + w_y^2).$$

Не сложно показать, что эта скобка равна нулю в силу системы (41).

Таким образом, согласно [7], система (41) формально интегрируема. А так как эта система конечного типа, то она имеет гладкое решение h . \square

Прежде всего рассмотрим уравнения

$$(43) \quad v_{xx} + v_{yy} = k(x, y)v + f(x, y).$$

Формы Лапласа для этого уравнения имеют вид

$$\lambda_+ = \frac{\iota}{2}k(x, y)dx \wedge dy \quad \text{и} \quad \lambda_- = -\frac{\iota}{2}k(x, y)dx \wedge dy.$$

Теорема 7. Пусть уравнение (43) регулярно в некоторой окрестности точки $a_0 \in \mathbb{R}^2$. Это уравнение локально контактно эквивалентно уравнению Гельмгольца (39) тогда и только тогда, когда функция k удовлетворяет следующему уравнению:

$$(44) \quad k(k_{xx} + k_{yy}) = k_x^2 + k_y^2.$$

Доказательство. Пусть (x_0, y_0) — координаты точки a_0 . Так как это уравнение регулярно, то могут реализоваться две возможности: $k \equiv 0$ в некоторой окрестности точки a или

$$k(x_0, y_0) \neq 0.$$

В первом случае уравнение (43) представляет собой уравнение Пуассона и теорема доказана.

Рассмотрим второй случай, когда функция k не аннулируется в точке a_0 .

Пусть функция k удовлетворяет уравнению (44). Его можно записать в виде

$$\Delta(\ln |k|) = 0,$$

где Δ — оператор Лапласа. Поэтому функция k имеет вид

$$k(x, y) = \varepsilon e^{w(x, y)},$$

где w — некоторая гармоническая функция и $\varepsilon = \pm 1$.

Согласно лемме 2 найдется такая гармоническая функция $h = h(x, y)$, что $k = \varepsilon(h_x^2 + h_y^2)$. Таким образом, эффективная

дифференциальная 2-форма, отвечающая уравнению (43) имеет вид:

$$\omega = dq_1 \wedge dp_2 - dq_2 \wedge dp_1 - (\varepsilon(h_{q_1}^2 + h_{q_2}^2)u + f)dq_1 \wedge dq_2.$$

Пусть $g = g(x, y)$ — гармоническая функция, гармонически сопряженная с функцией h , т.е. $h_x = g_y$ и $h_y = -g_x$. Функции h и g определены с точностью до аддитивных постоянных, которые мы выберем так, чтобы $h(x_0, y_0) = x_0$ и $g(x_0, y_0) = y_0$. Построим преобразование плоскости \mathbb{R}^2 , сохраняющее точку a_0 :

$$(q_1, q_2) \mapsto (Q_1 = h(q), Q_2 = g(q)).$$

Т.к. функция $k(a_0) \neq 0$, то якобиан этого преобразования

$$\begin{vmatrix} h_x & h_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix} = h_x g_y - h_y g_x = h_x^2 + h_y^2 \neq 0$$

в некоторой окрестности точки a_0 и оно обратимо. Для обратного преобразования

$$(Q_1, Q_2) \mapsto (q_1 = H(Q), q_2 = G(Q))$$

функции H и G тоже являются гармонически сопряженными и, кроме того,¹

$$\begin{aligned} H_{Q_1} &= \frac{g_{q_2}}{h_{q_1}^2 + h_{q_2}^2}, & H_{Q_2} &= -\frac{h_{q_2}}{h_{q_1}^2 + h_{q_2}^2}, \\ G_{Q_1} &= -\frac{g_{q_1}}{h_{q_1}^2 + h_{q_2}^2}, & G_{Q_2} &= \frac{h_{q_1}}{h_{q_1}^2 + h_{q_2}^2}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$h_{q_1}^2 + h_{q_2}^2 = \frac{1}{H_{Q_1}^2 + H_{Q_2}^2}.$$

Построим теперь масштабное преобразование

$$\phi : (q_1, q_2, u) \mapsto (Q_1 = h(q), Q_2 = g(q), U = u)$$

¹Здесь предполагается, что производные функций h и g выражены через Q_1 и Q_2

и продолжим его до контактного. Применяя это преобразование к форме ω и выделяя у полученной формы эффективную часть, мы получим форму

$$\phi^*(\omega)_\varepsilon = dQ_1 \wedge dP_1 - dQ_2 \wedge dP_2 - (\varepsilon U + \tilde{f}(Q))dQ_1 \wedge dQ_2,$$

где

$$\tilde{f}(Q) = \frac{f(H(Q), G(Q))}{H_{Q_1}^2 + H_{Q_2}^2}.$$

Этой дифференциальной форме отвечает уравнение (39), где $\kappa = -1$ или $\kappa = 1$. \square

Обратимся теперь к общим линейным уравнениям.

Теорема 8. *Уравнение*

$$(45) \quad v_{xx} + v_{yy} = a(x, y)v_x + b(x, y)v_y + c(x, y)v + g(x, y)$$

в окрестности точки $a_0(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ локально контактно эквивалентно уравнению Гельмгольца (39), где $\kappa \neq 0$, тогда и только тогда, когда один из инвариантов Коттона H равен нулю, а второй, K , не обращается в нуль в точке a_0 и удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$(46) \quad K(K_{xx} + K_{yy}) = K_x^2 + K_y^2.$$

Доказательство. Необходимость условий теоремы очевидна. Докажем достаточность. Согласно теореме 5, уравнение (45) локально контактно эквивалентно уравнению (23), а согласно теореме 7, последнее уравнение эквивалентно уравнению Гельмгольца (39), где κ может принимать значения $-1, 0, 1$. \square

7.3. Уравнения Монжа-Ампера. Для уравнений вида (26) либо обе формы Лапласа нулевые, либо обе не обращаются в нуль и

$$(47) \quad \lambda_\pm \wedge \lambda_\pm = 0.$$

Эти же условия должны выполняться и для уравнений Монжа-Ампера, которые контактно эквивалентны уравнению (26).

Если для уравнения Монжа-Ампера обе формы Лапласа нулевые, то оно, согласно теореме 1, заменой переменных приводится к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами.

Поэтому нам осталось рассмотреть второй случай. Ответ на вопрос дает следующая теорема [16].

Теорема 9. *Пусть обе формы Лапласа невырожденного уравнения Монжа-Ампера не обращаются в нуль. Уравнение локально контактно линейному уравнению (26) тогда и только тогда, когда формы Лапласа имеют вид*

$$(48) \quad \lambda_+ = \Phi(g, h)dg \wedge dh \quad \text{and} \quad \lambda_- = -\Phi(g, h)dg \wedge dh,$$

где g и h — первые интегралы распределений $C_+^{(2)}$ и $C_-^{(2)}$ соответственно и функция $\Phi(g, h)$ не обращается в нуль и удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$(49) \quad \Phi\Phi_{gh} - \Phi_g\Phi_h = 0.$$

Доказательство. Из теоремы 2 следует, что уравнение Монжа-Ампера локально контактно эквивалентно линейному уравнению (19). Применяя теорему 6 для гиперболических уравнений, и теорему 8 — для уравнений эллиптических, мы получаем, что последнее уравнение локально эквивалентно либо телеграфному уравнению, либо уравнению Гельмгольца. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Cotton, E.: Sur les invariants différentiels de quelques équations lineaires aux dérivées partielles du second ordre. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **17**, 211–244 (1900)
- [2] Euler, L.: Calculi integralis. Vol.3. Petropoli, Impensis Academic Imperialis Scientiarum, 1770.
- [3] Ibragimov, N.H.: Invariants of hyperbolic equations: solution of the Laplace problem. Prikladnaya Mekhanika i Tekhnicheskaya Fizika **45**(2), 11–21 (2004) (Russian); English Translation in Journal of Applied Mechanics and Technical Physics **45**(2), 158–166, (2004)
- [4] Kruglikov, B.S.: On some classification problems in four-dimensional geometry: distributions, almost complex structures, and the generalized Monge-Ampère equations. Matem. Sbornik **189**(11), 61–74 (1998)

- [5] Kruglikov, B.S.: Symplectic and contact Lie algebras with application to the Monge-Ampère equations. *Tr. Mat. Inst. Steklova* **221**, 232–246 (1998)
- [6] Kruglikov, B.S.: Classification of Monge-Ampère equations with two variables. CAUSTICS'98 (Warsaw), Polish Acad. Sci., Warsaw, 179–194 (1999)
- [7] Kruglikov, B.S., Lychagin, V.V.: Mayer Brackets and PDEs solvability – I. *Differ. Geom. Appl.* **17**(2-3), 251–272 (2002)
- [8] Kushner, A.G.: Chaplygin and Keldysh normal forms of Monge-Ampère equations of variable type. *Mathem. Zametki* **52**(5) 63–67, (1992)(Russian). English translation in *Mathematical Notes* **52**(5), 1121–1124 (1992)
- [9] Kushner, A.G.: Classification of mixed type Monge-Ampère equations. In: Pràstaro, A., Rassias, Th.M. (ed) *Geometry in Partial Differential Equations*. Singapore New-Jersey London Hong-Kong, World Scientific, 173–188 (1993)
- [10] Kushner, A.G.: Symplectic geometry of mixed type equations. In: Lychagin, V.V. (ed) *The Interplay between Differential Geometry and Differential Equations*. Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **167**, 131–142 (1995)
- [11] Кушнер А.Г.: Уравнения Монжа-Ампера и ϵ -структуры. *ДАН*, **361**(5), 595–596 (1998).
- [12] Kushner, A.G.: Almost product structures and Monge-Ampère equations. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, <http://ljm.ksu.ru> **23**, 151–181 (2006)
- [13] Kushner, A.G.: A contact linearization problem for Monge-Ampère equations and Laplace invariants. *Acta Appl. Math.* **101**(1–3), 177–189 (2008)
- [14] Кушнер А.Г.: Контактная линеаризация невырожденных уравнений Монжа-Ампера. *Изв. ВУЗов, Математика*, №4, 43–58 (2008).
- [15] Кушнер, А.Г.: Контактная линеаризация уравнений Монжа-Ампера и инварианты Лапласа. *ДАН*, **422**(5), 597–600 (2008).
- [16] Kushner, A.G.: Contact equivalence of Monge-Ampère equations to linear equations with constant coefficients. *Acta Appl. Math.* (2008) (to be published)
- [17] Кушнер, А.Г.: Приведение гиперболических уравнений Монжа-Ампера к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами. *ДАН*, **423**(5), 609–611 (2008).
- [18] Kushner, A.G.: Classification of Monge-Ampère equations. *Proceedings of the Abel Symposium - 2008*, June 18-21, 2008, Tromso, Norway (to be published)

-
- [19] Kushner, A.G., Lychagin, V.V., Rubtsov, V.N.: Contact geometry and nonlinear differential equations. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications **101**, Cambridge University Press, Cambridge, 2007, xxii+496 pp.
- [20] Laplace, P.S.: Recherches sur le calcul intégrals aux différences partielles. Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Paris **23** **24** (1773). Reprinted in: Laplace, P.S.: Oeuvre complètes, t. IX, Gauthier-Villars, Paris, 1893; English Translation, New York, 1966.
- [21] Lie, S.: Ueber einige partielle Differential-Gleichungen zweiter Ordnung, Math. Ann. **5**, 209–256 (1872)
- [22] Lie, S.: Begründung einer Invarianten-Theorie der Berührungstransformationen. Math. Ann. **8**, 215–303 (1874)
- [23] Lie, S.: Classification und integration von gewöhnlichen differentialgleichungen zwischen x, y , die eine Gruppe von Transformationen gestatten. Math. Ann. **32**, 213–281 (1888)
- [24] Lychagin, V.V.: Contact geometry and nonlinear second-order partial differential equations. Dokl. Akad. Nauk SSSR **238**(5), 273–276 (1978). English translation in Soviet Math. Dokl. **19**(5), 34–38 (1978)
- [25] Lychagin, V.V.: Contact geometry and nonlinear second-order differential equations. Uspekhi Mat. Nauk **34**(1 (205)), 137–165 (1979). English translation in Russian Math. Surveys **34**(1), 149–180 (1979)
- [26] Lychagin, V.V.: Lectures on geometry of differential equations. Vol. 1,2. “La Sapienza”, Rome, 1993.
- [27] Lychagin, V.V., Rubtsov, V.N.: The theorems of Sophus Lie for the Monge–Ampère equations (Russian). Dokl. Akad. Nauk BSSR **27**(5), 396–398 (1983)
- [28] Lychagin, V.V., Rubtsov, V.N.: Local classification of Monge–Ampère differential equations. Dokl. Akad. Nauk SSSR **272**(1), 34–38 (1983)
- [29] Tunitskii, D.V.: On the contact linearization of Monge–Ampère equations. Izv. Ross. Akad. Nauk, Ser. Matem. **60**(2), 195–220 (1996)

Г. Л. Литвинов

Независимый Московский Университет, Москва

E-mail: glitvinov@gmail.com

Г. Б. Шпиз

Московский Центр Непрерывного Математического

Образования, Москва

E-mail: islc@dol.ru

Деквантование Маслова, тропическая математика, идемпотентная математика и геометрия

A brief introduction to the Maslov dequantization, tropical mathematics and idempotent mathematics is presented. Geometrical applications of the theory are especially discussed. Tropical mathematics can be treated as a result of a dequantization of the traditional mathematics as the Planck constant tends to zero taking imaginary values (the Maslov dequantization). The so-called idempotent dequantization is a generalization of the Maslov dequantization. The idempotent dequantization leads to idempotent mathematics, i.e. mathematics over semirings with idempotent addition. In the spirit of N. Bohr's correspondence principle there is a (heuristic) correspondence between important, useful, and interesting constructions and results over fields and similar results over idempotent semirings. A systematic application of this correspondence principle leads to a variety of theoretical and applied results.

Ключевые слова: *The Maslov dequantization, tropical mathematics, idempotent mathematics, geometrical applications*

1. ВВЕДЕНИЕ

Статья является кратким введением в деквантование Маслова, тропическую и идемпотентную математику с акцентом

© Г. Л. Литвинов, Г. Б. Шпиз, 2009

на геометрические приложения. Список цитируемой литературы не является полным. Дополнительные ссылки могут быть найдены, например, в электронном архиве <http://arXiv.org> и в работах [1-7, 9].

В основе идемпотентной математики лежит замена обычных арифметических операций новым набором базовых операций (такими как максимум или минимум), при этом числовые поля заменяются идемпотентными полукольцами и полуполями. Типичные примеры — так называемые макс-плюс алгебра \mathbb{R}_{\max} и мин-плюс алгебра \mathbb{R}_{\min} . Пусть \mathbb{R} — поле вещественных чисел. Тогда $\mathbb{R}_{\max} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ с операциями $x \oplus y = \max\{x, y\}$ и $x \odot y = x + y$. Аналогично $\mathbb{R}_{\min} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ с операциями $\oplus = \min$, $\odot = +$. Новая операция \oplus является идемпотентной, то есть $x \oplus x = x$ для всех x .

Начиная с классической работы С. Клини [8], многие авторы (S. C. Kleene, S. N. N. Pandit, Н. Н. Воробьев, В. А. Carré, R. A. Cuninghame-Green, K. Zimmermann, U. Zimmermann, M. Gondran, F. L. Baccelli, G. Cohen, M. Akian, S. Gaubert, G. J. Olsder, J.-P. Quadrat, и другие) широко используют идемпотентные полукольца и матрицы над этими полукольцами для решения ряда задач теории алгоритмов и дискретной математики. Современный *идемпотентный анализ* (или *идемпотентное исчисление*, или *идемпотентная математика*) был разработан В.П. Масловым и его сотрудниками в восьмидесятых годах в Москве. Некоторые предварительные результаты сформулировали Э. Хопф и Г. Шоке.

Идемпотентная (тропическая) математика может быть получена путем деквантования традиционной математики над числовыми полями, при этом постоянная Планка \hbar стремится к нулю, принимая мнимые значения. Такая точка зрения была представлена Г.Л. Литвиновым и В.П. Масловым в [5], см. также [6]. Иначе говоря, идемпотентная математика является асимптотической версией традиционной математики над полями вещественных и комплексных чисел.

Основную парадигму идемпотентной математики выражает *идемпотентный принцип соответствия*. Этот принцип тесно связан со знаменитым принципом соответствия Нильса Бора для квантовой теории. Оказывается, что существует эвристическое соответствие между рядом важных, интересных и полезных конструкций и результатов обычной математики над полями и аналогичными конструкциями и результатами над идемпотентными полуполями и полукольцами (полуполями и полукольцами с идемпотентными сложением).

Систематическое и последовательное использование идемпотентного принципа соответствия приводит к многообразным результатам, часто весьма неожиданным. В результате, наряду с традиционной математикой, возникает ее “теневая” идемпотентная версия. Эта “теневая” версия так же связана с традиционной математикой, как классическая физика с физикой квантовой, см. рис. 1.

Ниже обсуждаются некоторые примеры, включая следующие:

- (1) Преобразование Лежандра является идемпотентной (тропической) версией преобразования Фурье-Лапласа (В.П. Маслов, 1986 г.).
- (2) Если f – полином от нескольких переменных, то процедура деквантования позволяет построить многогранник Ньютона полинома f . С помощью так называемого преобразования деквантования можно обобщить этот результат на широкий класс функций и выпуклых множеств.
- (3) Применение деквантования Маслова к алгебраическим многообразиям приводит к кусочно-линейным многообразиям (многогранникам), называемым тропическими многообразиями (О. Виро, Г. Михалкин). Тропические многообразия тесно связаны с амебами исходных многообразий в смысле И.М. Гельфанда, М.М. Капранова и А.В. Зелевинского [21].

- (4) Применение процедур деквантования к линейным операторам дает спектральные свойства этих операторов.
- (5) Применение деквантования к метрикам дает размерность Хаусдорфа-Безиковича, включая фрактальную размерность.
- (6) Применение деквантования к мерам и дифференциальным формам дает понятие размерности в точке. Эта размерность принимает вещественные значения, в том числе отрицательные.

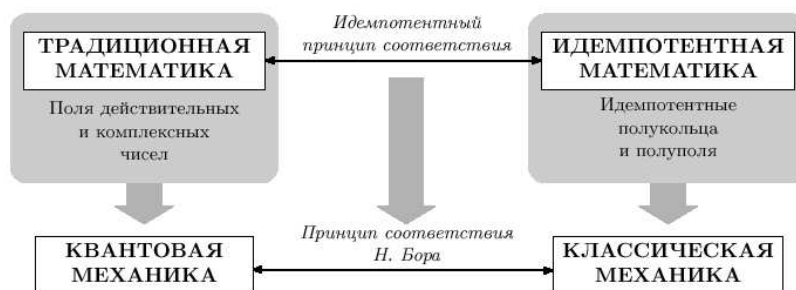


Рис. 1. Связь между идемпотентной и традиционной математикой.

Во многих отношениях идемпотентная математика проще традиционной. Однако переход от традиционных конструкций и результатов к их идемпотентным аналогам часто является нетривиальным.

2. Полукольца, полуполя и деквантование

Пусть на множестве \mathcal{K} заданы две алгебраические операции: сложение \oplus и умножение \odot . Говорят, что на множестве \mathcal{K} задано *полукольцо*, если выполняются следующие условия:

- сложение \oplus и умножение \odot ассоциативны;
- сложение \oplus коммутативно;

- умножение \odot дистрибутивно относительно сложения \oplus :

$$x \odot (y \oplus z) = (x \odot y) \oplus (x \odot z) \quad \text{и} \quad (x \oplus y) \odot z = (x \odot z) \oplus (y \odot z)$$

для любых $x, y, z \in \mathcal{K}$.

Единицей полукольца \mathcal{K} называется такой элемент $\mathbf{1} \in \mathcal{K}$, что $\mathbf{1} \odot x = x \odot \mathbf{1} = x$ для всех $x \in \mathcal{K}$. Нулем полукольца \mathcal{K} называется такой элемент $\mathbf{0} \in \mathcal{K}$, что $\mathbf{0} \neq \mathbf{1}$ и $\mathbf{0} \oplus x = x$, $\mathbf{0} \odot x = x \odot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ для всех $x \in \mathcal{K}$. Полукольцо \mathcal{K} называется идемпотентным полукольцом, если $x \oplus x = x$ для всех $x \in \mathcal{K}$. Полукольцо \mathcal{K} с элементами $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$ называется полуполем, если для любого ненулевого элемента множества \mathcal{K} существует обратный элемент.

Рассмотрим поле вещественных чисел \mathbb{R} и полуполе всех неотрицательных вещественных чисел \mathbb{R}_+ (относительно обычных операций сложения и умножения). Замена переменных $x \mapsto u = h \ln x$, $h > 0$, задает отображение $\Phi_h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{K} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Перенесем операции сложения и умножения из \mathbb{R} в \mathcal{K} с помощью отображения Φ_h , а именно, пусть $u \oplus_h v = h \ln(\exp(u/h) + \exp(v/h))$, $u \odot v = u + v$, $\mathbf{0} = -\infty = \Phi_h(0)$, $\mathbf{1} = 0 = \Phi_h(1)$, таким образом \mathcal{K} приобретает структуру полукольца $\mathbb{R}^{(h)}$ изоморфного \mathbb{R}_+ ; см. рис. 2.

Несложно проверить, что $u \oplus_h v \rightarrow \max\{u, v\}$ при $h \rightarrow 0$ и что \mathcal{K} образует полукольцо относительно сложения $u \oplus v = \max\{u, v\}$ и умножения $u \odot v = u + v$ с нулевым элементом $\mathbf{0} = -\infty$ и единицей $\mathbf{1} = 0$. Обозначим это полукольцо через \mathbb{R}_{\max} ; оно идемпотентно, так как $u \oplus u = u$ для всех элементов. При этом полукольцо \mathbb{R}_{\max} является полуполем. Аналогия с процедурой квантования здесь очевидна, параметр h играет роль постоянной Планка, поэтому полуполе \mathbb{R}_+ (или поле \mathbb{R}) можно рассматривать как “квантовые” объекты, а само полукольцо \mathbb{R}_{\max} может рассматриваться как результат их “деквантования”. Аналогичная процедура для $h < 0$ дает полукольцо $\mathbb{R}_{\min} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ с операциями $\oplus = \min$, $\odot = +$; в этом случае $\mathbf{0} = +\infty$, $\mathbf{1} = 0$. Полукольца \mathbb{R}_{\max} и \mathbb{R}_{\min} изоморфны.

Переход к \mathbb{R}_{\max} или \mathbb{R}_{\min} называется *деквантованием Маслова*. Понятно, что соответствующий переход от \mathbb{C} или \mathbb{R} к \mathbb{R}_{\max} осуществляется при помощи деквантования Маслова и отображения $x \mapsto |x|$. Допуская вольность речи, такой переход в дальнейшем мы также будем называть *деквантованием Маслова*.

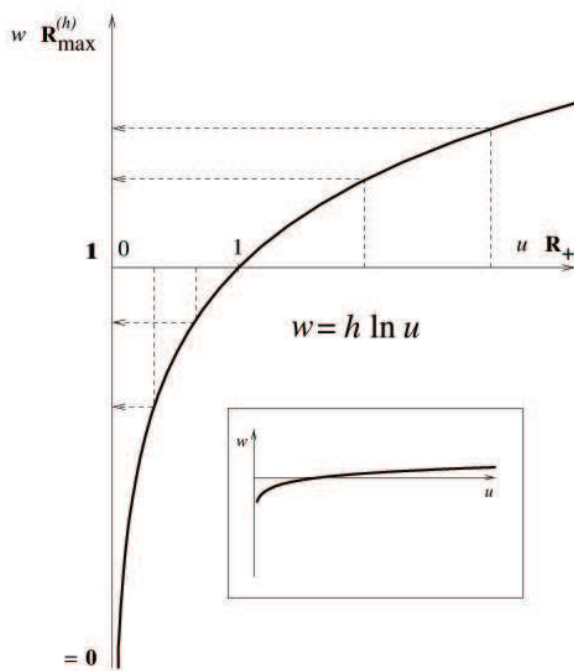


Рис. 2. Переход от \mathbb{R}_+ к $\mathbb{R}^{(h)}$. На вставке: то же для малых h .

Связь с физикой и роль мнимых значений постоянной Планка детально обсуждаются, например, в [6]. Идемпотентное полукольцо $\mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ с операциями $\oplus = \max$, $\odot = \min$ может быть получено в результате “вторичного деквантования” \mathbb{C} , \mathbb{R} или \mathbb{R}_+ . Десятки интересных примеров неизоморфных идемпотентных полуколец, а также методы получения новых полуколец из исходных рассматриваются, например, в [1-6,10].

Так называемое *идемпотентное деквантование* является обобщением деквантования Маслова; это переход от полей к идемпотентным полу полям и полукольцам в математических конструкциях и результатах.

Деквантование Маслова связано с хорошо известным логарифмическим преобразованием, использованным, например, в классических работах Э. Шредингера и Э. Хопфа. Используется также термин “преобразование Коула-Хопфа”.

Идеи Э. Хопфа получили дальнейшее развитие в известном методе исчезающей вязкости и методе вязкостных решений.

3. ТЕРМИНОЛОГИЯ: ТРОПИЧЕСКИЕ ПОЛУКОЛЬЦА И ТРОПИЧЕСКАЯ МАТЕМАТИКА

Термин “тропические полукольца” появился в информатике и теории алгоритмов для обозначения дискретной версии алгебры \mathbb{R}_{\max} или \mathbb{R}_{\min} и их подалгебр; дискретные полукольца этого типа были названы “тропическими” Домиником Перреном в честь бразильского специалиста по информатике и математике Имре Саймона, в знак признания его пионерской деятельности в данной области.

В дальнейшем ситуация и терминология изменились. Для большинства современных авторов “тропический” означает “над полу полями \mathbb{R}_{\max} или \mathbb{R}_{\min} ”, а тропические полукольца — это идемпотентные полу поля \mathbb{R}_{\max} и \mathbb{R}_{\min} . В этом же смысле часто используются термины “макс-плюс” и “мин-плюс”. В настоящее время термин “тропическая математика” обычно означает “математика над полу полями \mathbb{R}_{\max} или \mathbb{R}_{\min} ”. Термины “тропикализация” и “тропификация” в точности означают деквантование и квантование в описанном выше смысле. В любом случае, тропическая математика является естественной и очень важной частью идемпотентной математики. Многие известные конструкции и результаты идемпотентной математики были заново получены в рамках тропической математики (и, особенно, в тропической линейной алгебре).

4. НОВЫЕ ПРИМЕРЫ

Теперь есть смысл рассказать несколько примеров.

Пример 4.1. $\mathcal{K} = [a, b]$ с операциями $\oplus = \max$ и $\odot = \min$. Тогда $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{1}$. Это — полное полукольцо с линейным порядком \leq .

Пример 4.2. $\mathcal{K} = \mathbb{R}_+$ с операциями $\oplus = \max$ и $\odot = \cdot$ (обычное умножение). Тогда $\mathbf{0} = 0$ и $\mathbf{1} = 1$. Получаем идемпотентное полукольцо; обозначим это полукольцо через $\mathbb{R}_{\max, \cdot}$. Легко видеть, что полукольца \mathbb{R}_{\max} и $\mathbb{R}_{\max, \cdot}$ изоморфны.

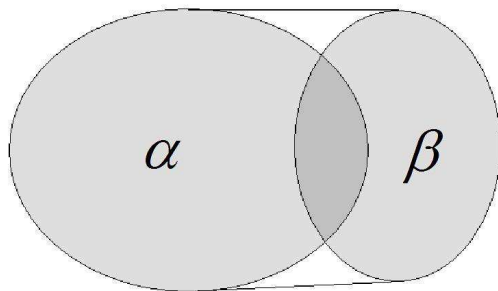


Рис. 3. Полукольцо выпуклых компактов. Сплошной линией показан результат вычисления суммы $\alpha \oplus \beta$.

Надо сказать, что любая комбинация максимума (или минимума) с арифметическими операциями порождает числовую идемпотентную алгебру.

Наши операции являются аналогами булевых операций. Именно так они у многих предтеч и возникали. И связано это опять же с квантовой теорией и квантовой логикой. Ясно, что

любая дистрибутивная решётка — это некоторое идемпотентное полукольцо относительно операций взятия точных нижних и верхних граней подмножеств, состоящих из двух элементов.

Пример 4.3. Булева алгебра: $\vee = \oplus = \max$, $\odot = \min = \wedge$ и $\mathcal{K} = \{0, 1\}$.

Пример 4.4. $\mathcal{K} = \{0, 1, a\}$ — идемпотентное полукольцо из трех элементов. Здесь элемент a играет роль “бесконечности”, так что $a \oplus a = a$, $a \odot a = a$, $0 \odot a = 0$, $1 \odot a = a$, $0 \oplus a = 1 \oplus a = a$.

Это — нетрадиционная логика (многозначная логика). Вообще надо сказать, что логики внесли достойный вклад в предмет — и как объекты, и как специалисты.

Очень интересен ещё такой пример (он у нас ещё всплывёт). Обычно он используется в математической экономике, в теории эволюции множеств Парето.

Пример 4.5. Элемент этого полукольца — компактное выпуклое подмножество (в обычном арифметическом пространстве). Нуль — это пустое множество. Единица — множество, состоящее из нуля. Операции такие: $\alpha \oplus \beta$ — это выпуклая оболочка α и β (см. рис. 3), а умножение — это сложение по Минковскому:

$$\alpha \odot \beta = \{a + b \mid a \in \alpha, b \in \beta\}.$$

Это очень важное полукольцо. Оно работает и в алгебраической геометрии. Здесь, конечно, порядок не линейный.

5. ИДЕМПОТЕНТНАЯ ВЫПУКЛОСТЬ

Пусть \mathcal{K} — идемпотентное полукольцо с единицей $\mathbf{1}$, и V — линейное пространство (полумодуль) над \mathcal{K} . Подробные определения см., например, в [1-4,6,10]. Типичным примером линейного пространства над \mathcal{K} является декартово произведение \mathcal{K}^n

из n экземпляров полукольца \mathcal{K} . При этом все операции очевидным образом определяются покомпонентно и \mathcal{K}^n является не только полумодулем над \mathcal{K} , но и полукольцом.

Множество $C \subseteq \mathcal{K}$ называется *идемпотентно выпуклым*, если для любых элементов $x, y \in C$ их *идемпотентно выпуклая комбинация* $\lambda x \oplus \mu y$, где $\lambda, \mu \in \mathcal{K}$ и $\lambda \oplus \mu = \mathbf{1}$, также принадлежит C .

С различной степенью общности выпуклость в линейных пространствах над полукольцами рассматривается, например, в работах [11-14,10]. Например, идемпотентная версия теоремы Хана-Банаха [10] стандартным образом связана с идемпотентной выпуклостью. Интересные примеры идемпотентно выпуклых множеств возникают в тропической геометрии, см. [7,13] и ниже.

6. ИДЕМПОТЕНТНАЯ АЛГЕБРА И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Автором первой известной работы по идемпотентной линейной алгебре стал С. Клини. В его работе [8] рассматриваются системы линейных алгебраических уравнений над несколько экзотическим идемпотентным полукольцом всех формальных языков с фиксированным конечным алфавитом. Однако идеи С. Клини оказались весьма общими и универсальными. После этого десятки авторов изучали матрицы с коэффициентами, принадлежащими идемпотентным полукольцам, а также соответствующие приложения к дискретной математике, информатике, языкам программирования, лингвистическим задачам, конечным автоматам, проблемам оптимизации на графах, теории оптимального управления, дискретным системам событий и сетям Петри, стохастическим системам, оценке производительности компьютеров, вычислительным проблемам и т.д. Эти направления хорошо известны и широко представлены в литературе. Подробности см., например, в [1,2,5,6,15].

Идемпотентная абстрактная алгебра пока не так хорошо развита, хотя, с другой стороны, с формальной точки зрения теория решеток, теория упорядоченных групп и полугрупп входят в состав идемпотентной алгебры. Тем не менее, имеется много интересных результатов и приложений абстрактной идемпотентной теории.

В последние годы особое внимание привлекают к себе вопросы тропической алгебраической геометрии, см. [7] и ниже.

7. ИДЕМПОТЕНТНЫЙ АНАЛИЗ

Идемпотентный анализ первоначально был построен В. П. Масловым и его сотрудниками, а затем развит в большом количестве публикаций различных авторов. Систематическому изложению идемпотентного анализа посвящена книга В.П. Маслова и В.Н. Колокольцова [2].

Пусть \mathcal{K} — произвольное полукольцо с идемпотентным сложением \oplus (которое всегда предполагается коммутативным), умножением \odot , нулем $\mathbf{0}$, и единицей $\mathbf{1}$. Множество \mathcal{K} снабжено *стандартным частичным порядком* \preceq : по определению, $a \preceq b$ тогда и только тогда, когда $a \oplus b = b$. Таким образом, все элементы множества \mathcal{K} неотрицательны: $\mathbf{0} \preceq a$ для всех $a \in \mathcal{K}$. Благодаря существованию этого порядка, идемпотентный анализ тесно связан с теорией решеток, теорией векторных решеток и теорией упорядоченных пространств. Более того, этот частичный порядок позволяет моделировать базовые топологические понятия и результаты на чисто алгебраическом уровне; систематическое изложение такого подхода можно найти, например, в работах [6,10].

Анализ главным образом имеет дело с функциями, чьими значениями являются числа. Идемпотентным аналогом числовой функции является отображение $X \rightarrow \mathcal{K}$, где X — произвольное множество, а \mathcal{K} — идемпотентное полукольцо. Функции со значениями в \mathcal{K} можно складывать, умножать друг на друга, а также умножать на элементы \mathcal{K} поточечно.

Идемпотентным аналогом линейного функционального пространства является множество функций со значениями в \mathcal{K} , замкнутое относительно сложения и умножения на элементы из \mathcal{K} , или \mathcal{K} -полумодуль. Рассмотрим, например \mathcal{K} -полумодуль $B(X, \mathcal{K})$ всех функций $X \rightarrow \mathcal{K}$, которые ограничены в смысле стандартного порядка в \mathcal{K} .

Пусть $\mathcal{K} = \mathbb{R}_{\max}$, тогда идемпотентный аналог интеграла определяется формулой

$$(1) \quad I(\varphi) = \int_X^{\oplus} \varphi(x) dx = \sup_{x \in X} \varphi(x),$$

где $\varphi \in B(X, \mathcal{K})$. Следовательно, риманова сумма вида

$$\sum_i \varphi(x_i) \cdot \sigma_i$$

соответствует выражению

$$\bigoplus_i \varphi(x_i) \odot \sigma_i = \max_i \{\varphi(x_i) + \sigma_i\},$$

которое сходится к правой части (1) при $\sigma_i \rightarrow 0$. Разумеется, это чисто эвристическая конструкция.

Формула (1) определяет *идемпотентный интеграл* (или *интеграл Маслова*) не только для функций, принимающих значения в \mathbb{R}_{\max} , но также и в общем случае, при условии, что любое ограниченное сверху подмножество \mathcal{K} имеет точную верхнюю грань.

Идемпотентная мера (или *мера Маслова*) на X определяется как $m_\psi(Y) = \sup_{x \in Y} \psi(x)$, где $\psi \in B(X, \mathcal{K})$ и $Y \subseteq X$. Интеграл по этой мере имеет вид

$$(2) \quad I_\psi(\varphi) = \int_X^{\oplus} \varphi(x) dm_\psi = \int_X^{\oplus} \varphi(x) \odot \psi(x) dx = \sup_{x \in X} (\varphi(x) \odot \psi(x)).$$

Формула (2) определяет также идемпотентное скалярное произведение функций φ и ψ . Очевидно, что если $\mathcal{K} = \mathbb{R}_{\min}$, то

стандартный порядок \preceq является противоположным по отношению к обычному порядку \leq , поэтому выражение (2) примет вид

$$\int_X^\oplus \varphi(x) dm_\psi = \int_X^\oplus \varphi(x) \odot \psi(x) dx = \inf_{x \in X} (\varphi(x) \odot \psi(x)),$$

где \inf понимается в смысле обычного порядка \leq .

Теперь посмотрим, как обстоят дела с гармоническим анализом. Если есть группа G , то можно попробовать построить групповое полукольцо. Рассмотрим, например, в качестве такого полукольца пространство всех ограниченных функций $B(G, \mathcal{K})$. Тогда свертка определяется следующим способом:

$$(\varphi \otimes \psi)(x) = \int_G^\oplus \varphi(y) \odot \psi(y^{-1} \cdot x) dx.$$

Так мы получаем групповое полукольцо.

Общий принцип гармонического анализа состоит в том, что выбор групповой (полу)алгебры определяет и выбор варианта гармонического анализа. Естественно возникает вопрос, нельзя ли построить что-нибудь в духе преобразования Фурье так, чтобы эта свертка при преобразовании Фурье переходила в обычное произведение. Определим идемпотентное (тропическое) преобразование Фурье. Обычное преобразование Фурье-Лапласа определяется следующим образом:

$$f \mapsto \hat{f}(\xi) = \int_X e^{i\langle x, \xi \rangle} f(x) dx,$$

где $X = \mathbb{R}^n$, $x \in X$, а ξ — линейный функционал $x \mapsto \langle x, \xi \rangle$ на X . При этом самую важную роль играет экспонента, то есть характер группы X . Чтобы обобщить преобразование Фурье, скажем, на алгебру \mathbb{R}_{\max} , нам нужно понять, что такое характер. Характер — это решение функционального уравнения $f(x+y) = f(x)f(y)$. Правильный аналог этого уравнения такой: $f(x+y) = f(x) \odot f(y) = f(x) + f(y)$. Разумные решения такого функционального уравнения — линейные функции. Вообще,

линейные и кусочно линейные функции играют в идемпотентном анализе очень важную роль. Стало быть, соответствующее тропическое преобразование Фурье

$$f \mapsto \hat{f}(\xi) = \int_X^{\oplus} \langle x, \xi \rangle \odot f(x) dx = \sup_x \{\xi \cdot x + f(x)\}$$

— это просто преобразование Лежандра (или Фенхеля [16]) с точностью до косметических изменений. С помощью деквантования Маслова можно и непосредственно перейти от преобразования Фурье—Лапласа к преобразованию Лежандра. Напомним, что преобразование Лежандра в классической механике отвечает за перевод картины Лагранжа в картину Гамильтона и наоборот. Оказывается, что преобразование Лежандра — это не что иное, как идемпотентная версия преобразования Фурье. В результате преобразование Лежандра становится более понятным. Это замечательное наблюдение принадлежит Виктору Павловичу Маслову. Связь преобразования Лежандра—Фенхеля с выпуклыми функциями и выпуклым анализом очень хорошо известна, см., например, [16-18].

В идемпотентном анализе мы интересуемся пространствами функций, которые принимают значения в идемпотентных полуполях или идемпотентных полукольцах. А то пространство, на котором определены наши функции, его геометрическую структуру, мы не трогаем. Но это всё-таки только часть идемпотентной математики. В последнее время Олег Виро очень удачно тронул и геометрическую структуру, см. [19].

В идемпотентном анализе возникает большое количество всевозможных функций, функциональных пространств и линейных операторов. Но функции возникают, как правило, негладкие. Это ясно, потому что операции максимум и минимум гладкость нарушают. Поэтому идемпотентный анализ — это анализ негладких функций и негладких решений дифференциальных уравнений.

Примерами являются: пространство всех функций, пространство всех ограниченных функций, пространство всех полунепрерывных (снизу или сверху) функций на топологическом пространстве, а также пространства выпуклых и вогнутых функций на линейных пространствах. Разумеется, функции принимают значения в тропической алгебре (например, алгебре макс-плюс). Эти примеры играют важную роль в идемпотентном анализе. Удастся построить абстрактный идемпотентный функциональный анализ, начиная с аналогов теорем Хана-Банаха и Рисса-Фишера и включая аналоги результатов А. Гротендика по топологическим тензорным произведениям, ядерным пространствам и ядерным операторам, см. [10, 26, 27].

8. ТРОПИЧЕСКИЕ ПОЛИНОМЫ И ДЕКВАНТОВАНИЕ ГЕОМЕТРИИ

Рассмотрим тропический аналог полинома. Моном x^n перейдет в $x \odot x \odot \dots \odot x$ (n сомножителей), т.е. в $x + x + \dots + x = nx$. Соответственно моном $x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k}$ перейдет в функцию $n_1x_1 + \dots + n_kx_k$. Это — линейная функция (в обычном смысле). Полином — это сумма мономов; здесь, стало быть, возникнет максимум. Так возникает кусочно линейная функция, которая, вдобавок, выпукла. Это наблюдение лежит в основе метода Олега Виро, который заметил, что метод, которым он пользовался много лет назад, на самом деле связан с квантованием и деквантованием [19]. Если деквантовать вещественную алгебраическую геометрию, то возникнут задачи из теории многогранников. Поскольку многогранники с нужными свойствами построить легко, а построить соответствующие алгебраические многообразия — трудная проблема, то О. Виро строил сначала многогранники, потом проводил процедуру квантования и получал то, что ему было нужно. Причём использовалось именно то квантование, о котором мы сейчас говорим.

Так из полиномов появляются выпуклые кусочно линейные функции. А если, кроме того, учесть, как выпуклая функция

получается из своих касательных, то она тоже в некотором смысле кусочно линейная.

Итак, идемпотентная версия вещественной алгебраической геометрии была открыта О. Виро и представлена в его докладе на конгрессе в Барселоне [19]. Исходя из идемпотентного принципа соответствия, О. Виро построил кусочно-линейную геометрию многогранников специального вида в конечномерных евклидовых пространствах как результат деквантования Маслова обычной вещественной алгебраической геометрии. Он также указал на важные приложения (например, в рамках 16-ой проблемы Гильберта о построении вещественного алгебраического многообразия с предписанными свойствами) и на связь с комплексной алгебраической геометрией и амебами в смысле И.М. Гельфанда, М.М. Капранова и А.В. Зелевинского (см. [19-21]). Затем комплексная алгебраическая геометрия была деквантована Г. Михалкиным (с тем же результатом), который указал новые важные приложения, см. доклад Г. Михалкина на конгрессе в Мадриде [7]. Эта новая “идемпотентная” (или асимптотическая) геометрия теперь обычно называется *тропической алгебраической геометрией*.

Грубо говоря, деформация алгебраического многообразия при конечных значениях “постоянной Планка” h и является амебой в смысле [21]. В пределе при $h \rightarrow 0$ амеба переходит в *тропическое алгебраическое многообразие* (скелет амебы). Например, для прямой $V = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x + y + 1 = 0\}$ соответствующая тропическая прямая $\text{Tro}(V)$ представлена на рис. 4(а). Амеба представлена на рис. 4(в), а соответствующая деформация амебы — на рис. 4(с). Разумеется, тропическая прямая является примером идемпотентно выпуклого множества (см. раздел 5 выше).

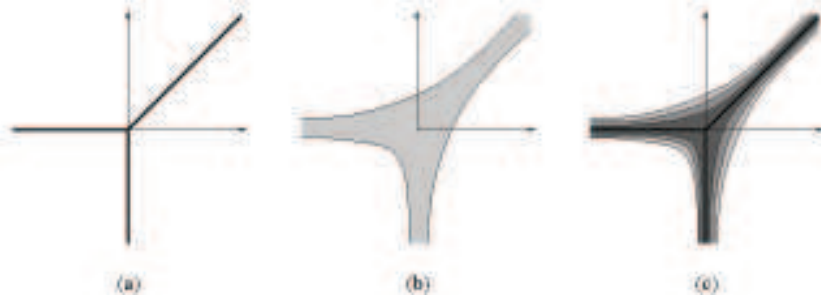


Рис. 4. “Деквантование” амебы

Давайте посмотрим, бывают ли какие-то связи между обычными (полу)кольцами и идемпотентными полукольцами. Допустим, у нас есть полином $\mathcal{P}(x)$ от одной переменной с неотрицательными коэффициентами. Сопоставим ему его степень $\deg \mathcal{P}$. Оказывается, что отображение $\mathcal{P}(x) \mapsto \deg \mathcal{P}$ является гомоморфизмом в алгебру макс-плюс.

А что будет, если мы возьмем полином $\mathcal{P}(x_1, \dots, x_p)$ от нескольких переменных? Аналогом степени в этом случае является многогранник Ньютона. Многогранник Ньютона — это выпуклый многогранник. Оказывается, что отображение полинома в свой многогранник Ньютона — гомоморфизм относительно операций выпуклой оболочки двух многогранников Ньютона и их суммы по Минковскому (см. пример 4.5).

9. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДЕКВАНТОВАНИЯ И ОБОБЩЕНИЕ МНОГОГРАННИКОВ НЬЮТОНА

В этом разделе, в качестве одного из конкретных приложений мы обсудим результаты, опубликованные в работе [22]. Суть этих результатов заключается в следующем. Для функций, определенных на \mathbb{C}^n почти всюду, можно построить преобразование деквантования $f \rightarrow \hat{f}$, порожденное деквантованием Маслова. Для полиномиальной функции f субдифференциал

$\partial \hat{f}$ функции \hat{f} совпадает с многогранником Ньютона полинома f . Для полукольца полиномов с неотрицательными коэффициентами преобразование деквантования является гомоморфизмом этого полукольца в идемпотентное полукольцо выпуклых многогранников относительно хорошо известных операций Минковского. Эти результаты могут быть обобщены на широкий класс функций и выпуклых множеств.

9.1. Преобразование деквантования. Рассмотрим топологическое пространство X . Для функций $f(x)$, определенных на X , будем говорить, что некоторое свойство выполняется *почти всюду* (п.в.), если оно справедливо для всех элементов x из открытого всюду плотного подмножества в X . Выберем в качестве X множество \mathbb{C}^n или \mathbb{R}^n ; обозначим через \mathbb{R}_+^n множество $x = \{(x_1, \dots, x_n) \in X \mid x_i \geq 0, \text{ где } i = 1, 2, \dots, n\}$. Для $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$ положим $\exp(x) = (\exp(x_1), \dots, \exp(x_n))$; таким образом, если $x \in \mathbb{R}^n$, то $\exp(x) \in \mathbb{R}_+^n$.

Обозначим через $\mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$ множество всех функций, непрерывных на открытом всюду плотном подмножестве $U \subset \mathbb{C}^n$, причем $U \supset \mathbb{R}_+^n$. Во всех ниже приведенных примерах мы рассмотрим даже более регулярные функции, которые голоморфны в U . Очевидно, что $\mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$ — кольцо (и алгебра над \mathbb{C}) по отношению к обычному сложению и умножению функций.

Для $f \in \mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$ определим функцию \hat{f}_h по следующей формуле:

$$(3) \quad \hat{f}_h(x) = h \log |f(\exp(x/h))|,$$

где h — (малый) вещественный параметр, а $x \in \mathbb{R}^n$. Положим

$$(4) \quad \hat{f}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \hat{f}_h(x),$$

если предел в правой части (4) существует почти всюду. Назовем функцию $\hat{f}(x)$ *деквантованием* функции $f(x)$, а преобразование $f(x) \mapsto \hat{f}(x)$ — *преобразованием деквантования*. По построению $\hat{f}_h(x)$ и $\hat{f}(x)$ могут быть рассмотрены как функции, принимающие значения в \mathbb{R}_{\max} . Отметим, что на самом деле

$\hat{f}_h(x)$ и $\hat{f}(x)$ зависят только от сужения функции f на подмножество \mathbb{R}_+^n ; поэтому фактически преобразование деквантования задается для функций, определенных только в \mathbb{R}_+^n . Понятно, что преобразование деквантования порождено деквантованием Маслова и отображением $x \mapsto |x|$. Разумеется, аналогичные определения могут быть даны и для функций, заданных на \mathbb{R}^n и \mathbb{R}_+^n .

Обозначим через V множество \mathbb{R}^n , рассматриваемое как линейное евклидово пространство со скалярным произведением $(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$, и положим $V_+ = \mathbb{R}_+^n$. Назовем функцию $f \in \mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$ *деквантуемой*, если ее деквантование $\hat{f}(x)$ существует (и определено на открытом всюду плотном подмножестве в V). Обозначим через $\mathcal{D}(\mathbb{C}^n)$ множество всех деквантуемых функций и пусть $\widehat{\mathcal{D}}(V)$ означает множество $\{\hat{f} \mid f \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^n)\}$. Напомним, что функции из $\mathcal{D}(\mathbb{C}^n)$ (и $\widehat{\mathcal{D}}(V)$) определены почти всюду и равенство $f = g$ означает, что $f(x) = g(x)$ для любого x из открытого всюду плотного подмножества в \mathbb{C}^n (соответственно в V). Обозначим через $\mathcal{D}_+(\mathbb{C}^n)$ множество всех функций $f \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^n)$ таких, что $f(x_1, \dots, x_n) \geq 0$ если $x_i \geq 0$ для $i = 1, \dots, n$; тогда $f \in \mathcal{D}_+(\mathbb{C}^n)$ если сужение f на $V_+ = \mathbb{R}_+^n$ является неотрицательной функцией. Обозначим полученный в результате деквантования образ множества $\mathcal{D}_+(\mathbb{C}^n)$ через $\widehat{\mathcal{D}}_+(V)$. Говорят, что функции $f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^n)$ являются функциями *общего положения*, если $\hat{f}(x) \neq \hat{g}(x)$ для элементов x , пробегающих открытое всюду плотное множество в V .

Для функций $f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^n)$ и ненулевой константы c , верны следующие равенства:

- 1) $\widehat{fg} = \hat{f} + \hat{g}$;
- 2) $|\hat{f}| = \hat{f}$; $\widehat{cf} = f$; $\widehat{c} = 0$;
- 3) $\widehat{(f+g)}(x) = \max\{\hat{f}(x), \hat{g}(x)\}$ п.в., если f и g неотрицательны на V_+ (то есть $f, g \in \mathcal{D}_+(\mathbb{C}^n)$), или f и g — функции общего положения.

Левые части этих уравнений определены автоматически.

Множество $\mathcal{D}_+(\mathbb{C}^n)$ имеет естественную структуру полукольца относительно обычного сложения и умножения функций, принимающих значение в \mathbb{C} . Множество $\widehat{\mathcal{D}}_+(V)$ имеет естественную структуру идемпотентного полукольца относительно операций $(f \oplus g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$, $(f \odot g)(x) = f(x) + g(x)$; элементы из $\widehat{\mathcal{D}}_+(V)$ можно рассматривать как функции, принимающие значения в \mathbb{R}_{\max} . Преобразование деквантования порождает гомоморфизм из $\mathcal{D}_+(\mathbb{C}^n)$ в $\widehat{\mathcal{D}}_+(V)$.

9.2. Простые функции. Для любого ненулевого числа $a \in \mathbb{C}$ и любого вектора $d = (d_1, \dots, d_n) \in V = \mathbb{R}^n$ положим

$$m_{a,d}(x) = a \prod_{i=1}^n x_i^{d_i}.$$

Функции такого вида будем называть *обобщенными мономами*. Обобщенные мономы определены п.в. на \mathbb{C}^n и на V_+ , но не на V , исключая случай, когда d_i являются целыми или подходящими рациональными числами. Назовем функцию f *обобщенным полиномом*, если она представляет собой конечную сумму линейно независимых обобщенных мономов. Например, полиномы Лорана или Пюизо являются обобщенными полиномами.

Как обычно, для $x, y \in V$ определим

$$(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Легко показать, что если f — обобщенный моном $m_{a,d}(x)$, то \hat{f} — линейная функция $x \mapsto (d, x)$. Если f — обобщенный полином, то \hat{f} — сублинейная функция.

Напомним (см. [17]), что вещественная функция p , определенная на $V = \mathbb{R}^n$ *сублинейна* если $p = \sup_{\alpha} p_{\alpha}$, где $\{p_{\alpha}\}$ — набор линейных функций. Сублинейные функции, определенные всюду на $V = \mathbb{R}^n$, выпуклы; следовательно, они непрерывны. В дальнейшем мы будем рассматривать только такие сублинейные функции. Пусть p — непрерывная функция на V , тогда p сублинейна тогда и только тогда, когда

- (1) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ для всех $x, y \in V$;
- (2) $p(cx) = cp(x)$ для всех $x \in V, c \in \mathbb{R}_+$.

Если p_1, p_2 — сублинейные функции, то $p_1 + p_2$ также является сублинейной функцией.

Назовем функцию $f \in \mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$ *простой*, если ее деквантование \hat{f} существует и п.в. совпадает с некоторой сублинейной функцией; Допуская вольность речи, будем обозначать эту (однозначно определенную всюду на V) сублинейную функцию тем же символом \hat{f} .

Напомним, что простые функции f и g являются функциями в *общем положении*, если $\hat{f}(x) \neq \hat{g}(x)$ для всех x из открытого всюду плотного множества в V . В частности, обобщенные мономы являются функциями общего положения тогда и только тогда, когда они линейно независимы.

Обозначим через $Sim(\mathbb{C}^n)$ — множество всех простых функций, определенных на \mathbb{C}^n , и обозначим через $Sim_+(\mathbb{C}^n)$ множество $Sim(\mathbb{C}^n) \cap \mathcal{D}_+(\mathbb{C}^n)$. Через $Sbl(V)$ обозначим множество всех (непрерывных) сублинейных функций, определенных на $V = \mathbb{R}^n$, а через $Sbl_+(V)$ обозначим образ $\widehat{Sim_+(\mathbb{C}^n)}$ множества $Sim_+(\mathbb{C}^n)$ при преобразовании деквантования.

Множество $Sim_+(\mathbb{C}^n)$ является подполукольцом в $\mathcal{D}_+(\mathbb{C}^n)$, и $Sbl_+(V)$ является идемпотентным подполукольцом в $\widehat{\mathcal{D}_+(V)}$. Преобразование деквантования порождает эпиморфизм полукольца $Sim_+(\mathbb{C}^n)$ на $Sbl_+(V)$. Множество $Sbl(V)$ является идемпотентным полукольцом относительно операций

$$(f \oplus g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}, \quad (f \odot g)(x) = f(x) + g(x).$$

Конечно, полиномы и обобщенные полиномы являются простыми функциями.

Будем говорить, что функции $f, g \in \mathcal{D}(V)$ *асимптотически эквивалентны* тогда и только тогда, когда $\hat{f} = \hat{g}$; простую функцию f назовем *асимптотическим мономом*, если \hat{f} — линейная функция. Простая функция f будет называться

асимптотическим полиномом если \hat{f} является суммой конечного числа неэквивалентных асимптотических мономов. Каждый асимптотический полином является простой функцией.

Пример 9.1. Примерами асимптотических полиномов служат обобщенные полиномы, логарифмические функции от (обобщенных) полиномов, произведения полиномов и логарифмических функций. Это непосредственно следует из наших определений и формул (3) и (4).

9.3. Субдифференциалы сублинейных функций и множества Ньютона для простых функций. Хорошо известно, что совокупность всех выпуклых компактных подмножеств в \mathbb{R}^n образует идемпотентное полукольцо \mathcal{S} относительно операций Минковского: для $A, B \in \mathcal{S}$ сумма $A \oplus B$ является выпуклой оболочкой объединения $A \cup B$; произведение $A \odot B$ определяется следующим образом: $A \odot B = \{x \mid x = a + b, \text{ где } a \in A, b \in B\}$; см. выше пример 4.5. На самом деле, множество \mathcal{S} является идемпотентным линейным пространством над \mathbb{R}_{\max} (см., например, [10]). Разумеется, многогранники Ньютона в пространстве V образуют подполукольцо \mathcal{N} в \mathcal{S} .

Воспользуемся некоторыми элементарными результатами из выпуклого анализа. Эти результаты можно найти, например, в книге Г.Г. Магарил-Ильяева и В.М. Тихомирова [17].

Для любой функции $p \in Sbl(V)$ положим

$$\partial p = \{v \in V \mid (v, x) \leq p(x) \forall x \in V\}.$$

Из выпуклого анализа хорошо известно, что для любой сублинейной функции p множество ∂p есть в точности субдифференциал от p в нулевой точке. Следующее утверждение также хорошо известно из выпуклого анализа:

Предложение 1. Пусть $p_1, p_2 \in Sbl(V)$, тогда

$$\begin{aligned} \partial(p_1 + p_2) &= \partial p_1 \odot \partial p_2 = \\ &= \{v \in V \mid v = v_1 + v_2, \text{ где } v_1 \in \partial p_1, v_2 \in \partial p_2\}; \\ \partial(\max\{p_1(x), p_2(x)\}) &= \partial p_1 \oplus \partial p_2. \end{aligned}$$

Пусть $p \in Sbl(V)$. Тогда ∂p — непустое выпуклое компактное подмножество в V .

Следствие 1. *Отображение $p \mapsto \partial p$ является гомоморфизмом идемпотентного полукольца $Sbl(V)$ в идемпотентное полукольцо \mathcal{S} всех выпуклых компактных подмножеств множества V .*

Для любой простой функции $f \in Sim(\mathbb{C}^n)$ обозначим через $N(f)$ множество $\partial(\hat{f})$. Назовем $N(f)$ множеством Ньютона для функции f . Из приведенного утверждения следует, что для любой простой функции f , ее множество Ньютона $N(f)$ является непустым выпуклым компактным подмножеством в V .

Теорема 1. *Пусть f и g — простые функции. Тогда*

- 1) $N(fg) = N(f) \odot N(g) = \{v \in V \mid v = v_1 + v_2, \text{ где } v_1 \in N(f), v_2 \in N(g)\}$;
- 2) $N(f + g) = N(f) \oplus N(g)$, если f_1 и f_2 — функции в общем положении или $f_1, f_2 \in Sim_+(\mathbb{C}^n)$ (напомним, что $N(f) \oplus N(g)$ есть выпуклая оболочка множества $N(f) \cup N(g)$).

Следствие 2. *Преобразование $f \mapsto N(f)$ порождает гомоморфизм из $Sim_+(\mathbb{C}^n)$ в \mathcal{S} .*

Предложение 2. *Пусть $f = m_{a,d}(x) = a \prod_{i=1}^n x_i^{d_i}$ — (обобщенный) моном; здесь $d = (d_1, \dots, d_n) \in V = \mathbb{R}^n$ и a — ненулевое комплексное число. Тогда $N(f) = \{d\}$.*

Следствие 3. *Пусть $f = \sum_{d \in D} m_{a_d,d}$ — (обобщенный) полином. Тогда $N(f)$ — многогранник $\bigoplus_{d \in D} \{d\}$, т.е. линейная оболочка конечного множества D .*

Этот вывод следует из теоремы 9.1 и предложения 9.2. В этом случае $N(f)$ — хорошо известный классический многогранник Ньютона полинома f . Поэтому следующее утверждение очевидно:

Следствие 4. Пусть f — обобщенный или асимптотический полином. Тогда его множество Ньютона $N(f)$ является выпуклым многогранником.

Другой подход к построению обобщенных многогранников (множеств) Ньютона был предложен А. Рашковским, см., например, [23, 24].

Пример 9.2. Рассмотрим одномерный случай, т.е. $V = \mathbb{R}$ и положим

$$\begin{aligned} f_1 &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0, \\ f_2 &= b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0, \end{aligned}$$

где $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$, $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$. Тогда $N(f_1)$ совпадает с отрезком $[0, n]$ и $N(f_2)$ — с отрезком $[0, m]$, а преобразование $f \mapsto N(f)$ соответствует преобразованию $f \mapsto \deg(f)$, где $\deg(f)$ — степень полинома f . При этом, в соответствии с теоремой 9.1, $\deg(fg) = \deg f + \deg g$ и

$$\deg(f + g) = \max\{\deg f, \deg g\} = \max\{n, m\},$$

если $a_i \geq 0$, $b_i \geq 0$ или если f и g находятся в общем положении.

10. ДЕКВАНТОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ И ПОЛУГРУПП ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ [25]

Наша цель состоит в том, чтобы применить преобразование деквантования к матричным элементам операторных полугрупп, порожденных линейными операторами.

Преобразование деквантования можно переписать в следующей форме:

$$\begin{aligned} f \mapsto \hat{f}(x) &= \lim_{h \rightarrow +0} h \log(|f(\exp(x/h))|) = \\ &= \lim_{s \rightarrow +\infty} (1/s) \cdot \log(|f(\exp(sx))|), \end{aligned}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ и $h, s = 1/h$ являются положительными параметрами.

Пусть S – полугруппа и $s \mapsto \pi_s$ является линейным представлением полугруппы S в полном (или квазиполном) бочечном локально выпуклом пространстве V над полем комплексных чисел (посредством непрерывных операторов в V). Обозначим через V' сопряженное пространство к V и через $\langle v', v \rangle$ – значение функционала $v' \in V'$ на векторе $v \in V$. Если $s \mapsto \pi_{v',v}(s) = \langle v', \pi_s v \rangle$ является матричным элементом представления π , то его деквантование $\widehat{\pi}_{v',v}$ определяется формулой:

$$\widehat{\pi}_{v',v} = \overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} (1/s) \cdot \log(|\langle v', \pi_s v \rangle|).$$

Мы рассматриваем случаи $S = \mathbb{R}_+$ или $S = \mathbb{Z}_+$. Если элементы v и v' фиксированы, то $\widehat{\pi}_{v',v} \in S \cup \{\infty\}$.

Предложение 3. Пусть A – линейный оператор в V , $\pi_s = \exp(sA)$, и $\dim V < \infty$. Тогда множество всех деквантований $\{\widehat{\pi}_{v',v}\}$ совпадает с множеством вещественных частей всех собственных значений оператора A .

Этот результат можно обобщить на случай $\dim V = \infty$.

Предположим, что для каждого элемента $v' \in V'$ существует такое число $r > 0$, что множество $\{r^{-s} \cdot (|\langle v', \pi_s v \rangle|), s \in S\}$ ограничено для каждого вектора $v \in V$ и число r не зависит от элемента $v' \in V'$. В этом случае представление π называется экспоненциальным. Отметим, что если пространство V банахово и представление π слабо непрерывно, то оно экспоненциально. В общем случае спектральный радиус ρ_π оператора π определяется формулой:

$$\rho_\pi = \inf\{r \mid r^{-s} \pi_s v \rightarrow 0 \text{ слабо для каждого } v \in V \text{ при } s \rightarrow +\infty\}$$

Предложение 4. Если A – ограниченный линейный оператор в банаховом пространстве V , $S = \mathbb{Z}_+$, $\pi = A^s$, то $\rho_\pi = \rho(A) = \lim_{s \rightarrow \infty} \|A^s\|^{1/s}$, т.е. ρ_π является традиционным спектральным радиусом оператора A .

Теорема 2. Если представление π экспоненциально, то

$$\log \rho_\pi = \sup\{\widehat{\pi}_{v',v} \mid v' \in V', v \in V\}.$$

Теорема 3. Пусть A – компактный оператор и $\pi_s = A^s$, где $s \in S = \mathbb{Z}_+$. Тогда множество $\{\widehat{\pi}_{v',v}\}$ всех деквантований представления (полугруппы) π совпадает с множеством всех чисел вида $\log(|\lambda|)$, где λ пробегает спектр оператора A .

12. ДЕКВАНТОВАНИЕ ФУНКЦИЙ МНОЖЕСТВ НА МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ [25]

Пусть M – метрическое пространство, а S – его произвольное подмножество с компактным замыканием.

Обозначим через B_ρ шар с радиусом $\rho > 0$ в M . Покроем множество S конечным набором шаров с радиусами ρ_m и положим

$$v_d(S) := \lim_{\rho \rightarrow 0} \inf_{\rho_m < \rho} \sum_m \text{vol}_d(B_{\rho_m}),$$

где $\text{vol}_d(B_\rho) = \frac{\Gamma(1/2)^d}{\Gamma(1+d/2)} \rho^d$ – объем шара B_ρ . Существует такое число D , что $v_d(S) = 0$ для $d > D$ и $v_d(S) = \infty$ для $d < D$. Это число D называется *размерностью Хаусдорфа-Безиковича* или *НВ-размерностью* множества S , см. [28]. Отметим, что нецелые значения НВ-размерности называются *фрактальными* в смысле Б. Мандельброта.

Теорема 4. Обозначим через $\mathcal{N}_\rho(S)$ минимальное число шаров радиуса ρ , покрывающих S . Тогда

$$D(S) = \underline{\lim}_{\rho \rightarrow +0} \log_\rho(\mathcal{N}_\rho(S)^{-1}),$$

где $D(S)$ является НВ-размерностью множества S . Пусть $\rho = e^{-s}$, тогда

$$D(S) = \underline{\lim}_{s \rightarrow +\infty} (1/s) \cdot \log \mathcal{N}_{\exp(-s)}(S).$$

Таким образом размерность $D(S)$ можно рассматривать как результат деквантования функции $\rho \mapsto \mathcal{N}_\rho(S)$ (точнее, как значение деквантованной функции в точке).

Пусть μ – функция множества на M (например, вероятностная мера) и $\mu(B_\rho) < \infty$ для любого шара B_ρ . Обозначим через $B_{x,\rho}$ шар радиуса ρ с центром в точке $x \in M$. Положим $\mu_x(\rho) := \mu(B_{x,\rho})$ и

$$D_{x,\mu} := \lim_{s \rightarrow +\infty} - (1/s) \cdot \log(|\mu_x(e^{-s})|).$$

Это вещественное число можно рассматривать как размерность пространства M в точке x относительно функции множества μ . В этом же духе можно трактовать отрицательную размерность в смысле В.П. Маслова [29]. Ясно, что $D_{x,\mu}$ возникает в результате процедуры деквантования.

Имеются и другие приложения процедур деквантования в различных математических областях (энтропия динамических систем и др.).

12. Благодарности. Авторы выражают искреннюю благодарность С.С. Кутателадзе, В.В. Лычагину, В.П. Маслову, С.Н. Сергееву и А.Н. Соболевскому за помощь и литературные указания. Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 05–01–02807–НЦНИЛ–а и 08–01–00601–а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Maslov V.P. and Samborskii S.N. (Eds.) Idempotent Analysis.* // Adv. in Soviet Math. – 1992. – **13**. – Amer. Math. Soc.
- [2] *Маслов В.П. и Колокольцов В.Н. Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении.* // М: Наука. – 1994.
- [3] *Gunawardena J. (Ed.) Idempotency.* // Publ. of the Newton Institute. – 1998. – **11**. – Cambridge University Press, Cambridge.
- [4] *Litvinov G.L. and Maslov V.P. (Eds.) Idempotent Mathematics and Mathematical Physics.* // Contemporary Mathematics. – 2005. – **377**. – AMS, Providence, RI.
- [5] *Litvinov G.L. and Maslov V.P. The correspondence principle for idempotent calculus and some computer applications.* — In [3], Pp.420–443. E-print arXiv:math.GM/0101021.
- [6] *Литвинов Г.Л. Деквантование Маслова, идемпотентная и тропическая математика: краткое введение.* // Записки научных семинаров ПОМИ – 2005. – **326**. – с.145–182. E-print arXiv:math.GM/0507014.

- [7] *Mikhalkin G.* Tropical geometry and its applications.// Proceedings of the ICM, Madrid. – 2006. E-print arXiv:math.AG/0601041.
- [8] *Kleene S.C.* Representation of events in nerve sets and finite automata.// In: J. McCarthy and C. Shannon (Eds), Automata Studies, Princeton University Press, Princeton. – 1956. – Pp.3–40.
- [9] *Litvinov G.L., Maslov V.P., and Sergeev S.N.* International workshop “Idempotent and tropical mathematics and problems of mathematical physics”// Moscow, August 25–30, 2007. Moscow, Independent University of Moscow. – 2007. – I and II. E-print arXiv:math.0710.0377 and arXiv:math.0709.4119
- [10] *Литвинов Г.Л., Маслов В.П. и Шпиз Г.Б.* Идемпотентный функциональный анализ. Алгебраический подход.// Матем. заметки. – 2001. – **69**. No.5. – с.758–797. E-print arXiv:math.FA/0009128.
- [11] *Singer I.* Abstract convex analysis.//John Wiley&Sons Inc., New York. – 1997.
- [12] *Samborskii S.N. and Shpiz G.B.* Convex sets in the semimodule of bounded functions.// – In [1]. – Pp.135–137.
- [13] *Develin M. and Sturmfels S.* Tropical convexity.//Documenta Math. – 2004. – **9**. – Pp.1–21. E-print arXiv:math.MG/0308254.
- [14] *Данилов В.И. и Кошевой Г.А.* Дискретная выпуклость.// Записки научных семинаров ПОМИ. – 2004. – **312**.
- [15] *Akian M., Vapat R., and Gaubert S.* Max-plus algebras. // – In: L. Hogben (Ed.), Handbook of Linear Algebra, Discrete Mathematics and its Applications. – 2006. – **39**. – Chapman & Hall CRC.
- [16] *Fenchel W.* Convex cones, sets and functions.//Princeton Univ. Press. – 1953.
- [17] *Магарил-Ильяев Г.Г. и Тихомиров В.М.* Выпуклый анализ и его приложения.//М.:УРСС. – 2000.
- [18] *Kutateladze S.S.* Interaction of order and convexity.// E-print arXiv:0705.4124, 2007.
- [19] *Viro O.* Dequantization of real algebraic geometry on a logarithmic paper. // – In: 3rd European Congress of Mathematics, Barcelona. – 2000. E-print arXiv:math/0005163.
- [20] *Viro O.* What is an amoeba?// Notices of the Amer. Math. Soc. – 2002. – **49**. – Pp.916–917.
- [21] *Gelfand I.M., Kapranov M.M., and Zelevinsky A.V.* Discriminants, resultants, and multidimensional determinants.//Birkhäuser, Boston. – 1994.
- [22] *Litvinov G.L. and Shpiz G.B.* The dequantization transform and generalized Newton polytopes.//– In [4]. Pp.181–186.

-
- [23] *Rashkovskii A.* Newton numbers and residual measures of plurisubharmonic functions. // Ann. Polon. Math. – 2000. – **75**. No.3. – Pp.213–231.
- [24] *Rashkovskii A.* Tropical analysis on plurisubharmonic singularities. // – In [9]. – **II**. – Pp. 43–52.
- [25] *Litvinov G.L. and Shpiz G.B.* Dequantization procedures related to the Maslov dequantization. // – In [9]. – **I**. – Pp.99–104.
- [26] *Литвинов Г.Л. и Шпиз Г.Б.* Теоремы о ядре и ядерность в идемпотентной математике. Алгебраический подход. // Записки научных семинаров ПОМИ. – 2006. – **331**. с. 60–83. – E-print arXiv:math.FA/011153.
- [27] *Литвинов Г.Л., Маслов В.П., Шпиз Г.Б.* Тензорные произведения идемпотентных полумодулей. Алгебраический подход. // Математические заметки. – 1999. – **65**. No.4. – с. 572–585. E-print arXiv:math.FA/011153.
- [28] *Manin Yu.I.* The notion of dimension in geometry and algebra. // E-print arXiv:math.FA/011153. – 2005.
- [29] *Маслов В.П.* Общее понятие топологических пространств отрицательной размерности и квантование их плотностей. // Математические заметки. – 2007. – **81**.No.1. – с. 157–160.

А. Д. Милка

ФТИНТ им. Б.И.Веркина НАНУ, Харьков

E-mail: milka@ilt.kharkov.ua

В. А. Горькавый

ФТИНТ им. Б.И.Веркина НАНУ, Харьков

E-mail: gorkaviy@ilt.kharkov.ua

Изгибания правильных многогранников с увеличением объема

Linear bendings of right convex polyhedra, which increase the volume, are considered. Previous results on volume increasing linear bendings by A.D. Milka, D.D. Bleecker, V.A. Alexandrov are improved. For instance, the obtained relative volume increase for the right tetrahedron is 1.4400047...

Ключевые слова: *linear bending, right polyhedron, right pyramid, thin elastic shell*

ВВЕДЕНИЕ

А.В. Погореловым замечено, что тонкая упругая замкнутая выпуклая оболочка, нагруженная внутренним давлением, теряет устойчивость с последующим увеличением ограничиваемого ею объема [1]– [2]. Предложенный им геометрический подход основывается на оригинальном принципе изометрии: *большая закритическая деформация оболочки асимптотически точно приближается изометрическим преобразованием – изгибанием – ее срединной поверхности*. Так возникла актуальная для

© А. Д. Милка, В. А. Горькавый, 2009

геометров и механиков нетривиальная проблема: найти характерные примеры выпуклых поверхностей, непрерывно изгибающихся с увеличением объема; дать численные выражения параметров изгибания; для конкретных поверхностей найти максимум относительного увеличения объема. Первые исследования в этом направлении были выполнены для многогранников в работах [3], [4], [5].

В [3] рассматриваются *специальные линейные изгибания правильных многогранников*. Автором высказывается гипотеза, что такие изгибания соответствуют потере устойчивости оболочки под внутренним давлением. Численные выражения для увеличения объемов многогранников в [3] не приводятся. Независимо в [4] детально и в наглядной геометрической интерпретации излагаются те же специальные линейные изгибания правильных многогранников, устанавливаются аналитические выражения для объемов деформирующихся многогранников и находятся максимумы достижимых увеличений объемов. В [5] указывается специальный многогранник, возникающий при описанном в [3]– [4] линейном изгибании тетраэдра, объем которого близок к упомянутому максимуму. Геометрически этот специальный многогранник предельно просто связан с исходным тетраэдром (см. Рис. 9); аналогичные многогранники можно выделить в ходе линейных изгибаний других правильных многогранников — будем называть их *стандартными многогранниками*. В [6] к стандартным многогранникам применяется линейное изгибание, которое строится на основе описанного в [3] линейного изгибания тетраэдра; введенная конструкция имеет итерационный характер, выполнен первый шаг итерации — этого шага оказалось достаточно, чтобы существенно усилить результаты [4]; среди правильных многогранников наиболее значительное относительное увеличение объема было получено для тетраэдра и составило $\approx 1.41575\%$ [6] по сравнению с $\approx 1.37718\%$ [4] и $\approx 1.37714\%$ [5].

В данной работе, применяя упомянутый итерационный процесс, мы устанавливаем дальнейший рост относительного увеличения объемов правильных многогранников. В таблице приведены соответствующие численные результаты из [4], [6] и полученные нами новые результаты за 6 шагов итераций; мы полагаем, что для тетраэдра максимум относительного увеличения объема равняется 1.5:

	<i>Ближер</i>	<i>Милка</i>	<i>Авторы</i>
<i>Тетраэдр</i>	1.37718257...	1.41575603...	1.44000470...
<i>Куб</i>	1.21865263...	1.23397824...	1.24030167...
<i>Октаэдр</i>	1.11580800...	1.13233864...	1.13589463...
<i>Додекаэдр</i>	1.09339757...	1.09733081...	1.09723965...
<i>Икосаэдр</i>	1.03631161...	1.05274569...	1.04272167...

Эти и подобные им результаты, кроме математической их значимости, небезинтересны для инженерных приложений. Они могут подсказать возможные причины некоторых неожиданных и необъяснимых разрушений больших резервуаров-хранилищ, корпусов авиалайнеров и глубоководных подводных лодок. Такие аварии хорошо известны в истории техники [7]. Да и природа не может отказаться от увеличения объема тела, если в критической ситуации эта возможность предусмотрена геометрически; примеры — накапливающиеся напряжения в коре Земли, приводящие к внезапным и катастрофическим землетрясениям и извержениям вулканов, в частности — с образованием кальдер [6].

1. ЛИНЕЙНОЕ ИЗГИБАНИЕ ПРАВИЛЬНОЙ ПИРАМИДЫ

1.1. Геометрическая конструкция. Рассмотрим телесную правильную пирамиду Λ , в основании которой лежит правильный n -угольник Σ . Основными параметрами, определяющими метрические свойства пирамиды Λ , являются $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ — центральный угол основания, β — угол боковой грани при вершине пирамиды, a — длина стороны основания, b — длина бокового

ребра, h – высота пирамиды, r – радиус окружности, описанной вокруг основания. Объем пирамиды обозначим V . Между указанными величинами имеются следующие элементарные соотношения:

$$\begin{aligned} a &= 2r \sin \frac{\alpha}{2}, \\ b &= r \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}}, \\ h &= \sqrt{b^2 - r^2} = r \frac{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2}}}{\sin \frac{\beta}{2}}, \end{aligned}$$

$$(1) \quad V(\Lambda) = \frac{1}{6} n h r^2 \sin \alpha = \frac{\pi}{3} r^3 \frac{\sin \alpha}{\alpha} \frac{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2}}}{\sin \frac{\beta}{2}}.$$

Пирамида Λ однозначно определяется заданием угла $\alpha = \frac{2\pi}{n}$, угла $0 < \beta < \alpha$ и радиуса $r > 0$.

Вершины n -угольника Σ обозначим P_k , вершину пирамиды – P . Расположим пирамиду Λ таким образом, чтобы начало O располагалось в центре основания Σ , вершина P располагалась на оси z , а точка P_0 лежала на оси x . Тогда рассматриваемые точки будут иметь следующие координаты:

$$(2) \quad P = (0, 0, h); \quad P_k = (r \cos(k\alpha), r \sin(k\alpha), 0), \quad 0 \leq k \leq n - 1.$$

Построим линейное изгибание пирамиды Λ по схеме, предложенной для тетраэдра в [3]. На каждом наклонном ребре $P_i V$ пирамиды отметим точку S_i на расстоянии $s \in [0, b]$ от вершины P . На грани $P_0 P_1 P$ восстановим перпендикуляры к сторонам $P_0 P$ и $P_1 P$ в точках S_0 и S_1 , и на каждом перпендикуляре отложим отрезки фиксированной длины t , которые обозначим $S_0 Q_0$ и $S_1 T_1$ соответственно. Соединим отрезком точки Q_0 и

T_1 , затем проведем отрезки P_0Q_0 , Q_0P , P_1T_1 и T_1P . В результате получим разбиение исходной треугольной грани P_0P_1P на 5 треугольников и трапецию.

Специализируем выбор параметра t таким образом, чтобы длина отрезка Q_0T_1 равнялась удвоенной длине отрезка S_0Q_0 , т.е. $2t$:

$$(3) \quad t = s \operatorname{tg} \frac{\beta}{4}.$$

Такой выбор величины t возможен при любом значении параметра s в пределах от 0 до $\sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$; в предельном случае при $s = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$ точки Q_0 и T_1 будут располагаться в точности на стороне основания P_0P_1 .

Вращая пирамиду на углы $k\alpha$, $1 \leq k \leq n-1$, получим аналогичные разбиения граней $P_kP_{k+1}V$, обозначая соответствующие точки через Q_k и T_{k+1} . На Рис. 1 указана "измельченная" развертка треугольной пирамиды.

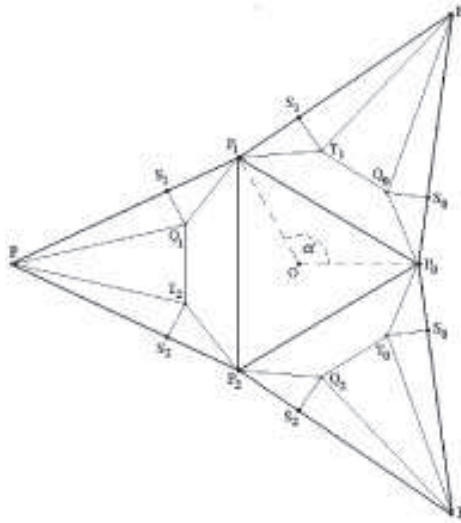


Рис. 1

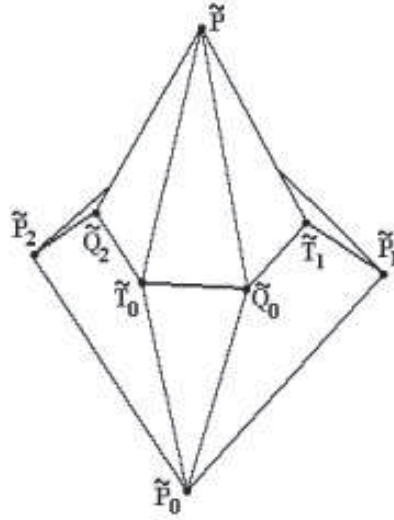


Рис. 2

Развертка пирамиды Λ с отмеченными дополнительными вершинами и ребрами допускает реализацию не только в виде пирамиды Λ с формально проведенными дополнительными ребрами, но и иную реализацию, которую мы сейчас построим. Это многогранник $\tilde{\Lambda}$, внешний вид которого для случая $n = 3$ представлен на Рис. 2. Определяется многогранник $\tilde{\Lambda}$ следующим образом. Будем обозначать соответствующие вершины $\tilde{\Lambda}$, добавляя к их прежним буквенным обозначениям символ "тильда". Многогранник $\tilde{\Lambda}$ имеет то же основание, что и пирамида Λ , т.е. $\tilde{P}_k = P_k$. Вершина \tilde{P} многогранника $\tilde{\Lambda}$ расположена на оси z , ее координаты представим в виде

$$(4) \quad \tilde{P} = (0, 0, \zeta).$$

Точки \tilde{S}_k , \tilde{Q}_k и \tilde{T}_k зададим следующим образом:

$$(5) \quad \tilde{S}_k = (\rho \cos(k\alpha), \rho \sin(k\alpha), \mu),$$

$$(6) \quad \tilde{Q}_k = (\rho \cos(k\alpha) - t \sin(k\alpha), \rho \sin(k\alpha) + t \cos(k\alpha), \mu),$$

$$(7) \quad \tilde{T}_k = (\rho \cos(k\alpha) + t \sin(k\alpha), \rho \sin(k\alpha) - t \cos(k\alpha), \mu)$$

Заметим, что точка \tilde{S}_k является серединой отрезка $\tilde{T}_k\tilde{Q}_k$, поэтому замкнутый многоугольник $\tilde{S}_0\tilde{Q}_0\tilde{T}_1\tilde{S}_1\tilde{Q}_1\dots\tilde{S}_0$, лежащий в горизонтальной плоскости $z = \mu$, представляет собой на самом деле $2n$ -угольник $\tilde{Q}_0\tilde{T}_1\tilde{Q}_1\tilde{T}_2\dots\tilde{Q}_0$. Из (5)–(7) следует, что многогранник $\tilde{\Lambda}$ имеет те же симметрии, порожденные вращениями вокруг оси z и отражениями в вертикальных плоскостях, что и исходная пирамида Λ .

Завершая построение $\tilde{\Lambda}$, подберем величины ζ , ρ , μ так, чтобы многогранник $\tilde{\Lambda}$ был изометричен пирамиде Λ . Длины отрезков $\tilde{T}_k\tilde{S}_k$ и $\tilde{S}_k\tilde{Q}_k$ равны длине t отрезков T_kS_k и S_kQ_k – это прямо следует из (5)–(7). Длины ребер $\tilde{Q}_k\tilde{T}_{k+1}$ должны равняться длине $2t$ отрезков Q_kT_{k+1} . Определяя расстояние между \tilde{Q}_k и \tilde{T}_{k+1} с помощью (6)–(7), получаем уравнение

$$(8) \quad \rho^2 \sin \frac{\alpha}{2} - 2\rho t \cos \frac{\alpha}{2} - t^2 \sin \frac{\alpha}{2} = 0.$$

Длины отрезков $\tilde{S}_k\tilde{P}$ должны равняться длине s отрезков S_kP . Определяя расстояние между \tilde{S}_k и \tilde{P} с помощью (4), (5), получаем уравнение

$$(9) \quad \rho^2 + (\zeta - \mu)^2 = s^2.$$

Длины отрезков $\tilde{S}_k\tilde{P}_k$ должны равняться длине $b - s$ отрезков S_kP_k . Определяя расстояние между \tilde{S}_k и \tilde{P}_k с помощью (2) и (5), получаем уравнение:

$$(10) \quad (r - \rho)^2 + \mu^2 = (b - s)^2.$$

Наконец, длины ребер $\tilde{Q}_k\tilde{P}_k$, $\tilde{T}_k\tilde{P}_k$, $\tilde{Q}_k\tilde{P}$, $\tilde{T}_k\tilde{P}$ должны равняться длинам отрезков Q_kP_k , T_kP_k , Q_kP , T_kP соответственно – эти равенства вытекают из (8)–(10).

Таким образом, многогранник $\tilde{\Lambda}$ будет изометричен пирамиде Λ , если ρ, ζ, μ удовлетворяют системе уравнений (8)–(10), где s играет роль параметра.

Изменяя s , получаем семейство многогранников $\tilde{\Lambda}$, изометричных пирамиде Λ . Этому семейству многогранников, представляющих непрерывное линейное изгибание пирамиды Λ , отвечает решение системы уравнений (8)–(10) в виде непрерывных функций $\rho(s), \mu(s), \zeta(s)$, удовлетворяющих начальным условиям $\rho(0) = 0, \mu(0) = h, \zeta(0) = h$. Такое решение имеет следующий вид:

$$(11) \quad \rho = t(s) \frac{\cos \frac{\alpha}{2} + 1}{\sin \frac{\alpha}{2}},$$

$$(12) \quad \mu = \sqrt{(b-s)^2 - (r-\rho(s))^2},$$

$$(13) \quad h = \mu(s) + \sqrt{s^2 - \rho(s)^2}.$$

При этом параметр $s \in [0, \sqrt{b^2 - (\frac{a}{2})^2}]$ подчиняется неравенству $(b-s)^2 - (\rho(s) - c)^2 \geq 0$. Анализ этого неравенства с учетом (3), (11) показывает, что параметр s может изменяться лишь в интервале $0 \leq s \leq s_l$, где $\frac{s_l}{b} = \frac{\cos \frac{\beta}{4}}{\cos \frac{\alpha}{4}} \cos \frac{\alpha+\beta}{4}$; поэтому, чем меньше α (а значит и β), тем ближе предельное значение s_l к b .

С геометрической точки зрения, многогранник $\tilde{\Lambda}$ образован $2n$ равными (согласно с (3)) гранями $\tilde{Q}_k \tilde{T}_k \tilde{P}$ и $\tilde{T}_k \tilde{Q}_{k+1} \tilde{P}$, n равными гранями $\tilde{Q}_k \tilde{T}_k \tilde{P}_k$, n равными гранями – трапециями $\tilde{P}_k \tilde{Q}_k \tilde{T}_k \tilde{P}_{k+1}$ и основанием Σ .

Для определения объема, тело, ограниченное многогранником $\tilde{\Lambda}$, естественно разделить на две части, проведя горизонтальную плоскость $z = \mu$ через точки \tilde{Q}_k, \tilde{T}_k ; см. Рис. 3 для $n = 3$.

Нижняя часть тела ограничена правильным n -угольным основанием Σ снизу, правильным $2n$ -угольным основанием

$$\Sigma' = \tilde{Q}_0 \tilde{T}_0 \tilde{Q}_1 \dots \tilde{T}_{n-1} \tilde{Q}_0$$

сверху и многогранником-пояском Ω' , составленным из n треугольных $\tilde{T}_k\tilde{Q}_{k+1}\tilde{P}_k$ и n четырехугольных $\tilde{P}_k\tilde{Q}_k\tilde{T}_k\tilde{P}_{k+1}$ боковых граней. Расстояние между плоскостями оснований Σ и Σ' равно $\mu(s)$. В предельном случае при $s = s_l$ все точки \tilde{S}_k и \tilde{Q}_k, \tilde{T}_k будут лежать в плоскости основания Σ ; как следствие, пояс Ω' укладывается в плоскость основания, образуя вместе с Σ и Σ' дважды покрытый $3n$ -угольник.

Верхняя часть тела — правильная $2n$ -угольная пирамида Λ' , ограниченная правильным $2n$ -угольным основанием Σ' снизу и $2n$ равными треугольными боковыми гранями $\tilde{Q}_k\tilde{T}_k\tilde{P}$ и $\tilde{T}_k\tilde{Q}_{k+1}\tilde{P}$.

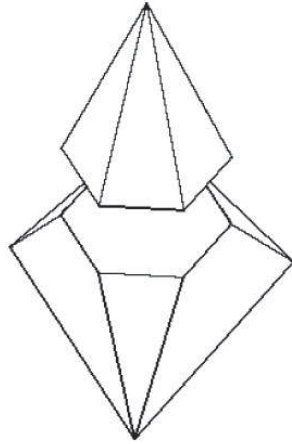


Рис. 3

Предложение 1. *Величины, характеризующие размеры пирамиды Λ' , вычисляются по следующим формулам:*

$$\alpha' = \frac{\alpha}{2}, \quad \beta' = \frac{\beta}{2}, \quad r' = s \frac{\operatorname{tg} \frac{\beta}{4}}{\sin \frac{\alpha}{4}},$$

$$a' = 2s \operatorname{tg} \frac{\beta}{4}, \quad b' = s \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{4}}, \quad h' = s \frac{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{4} - \sin^2 \frac{\beta}{4}}}{\sin \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\beta}{4}}$$

Приведенные формулы являются аналитическим следствием предложенной геометрической конструкции линейного изгибания.

1.2. Анализ объема. Вычислим теперь объем тела $V(\tilde{\Lambda})$, ограниченного многогранником $\tilde{\Lambda}$. Используя смешанное произведение векторов, проведенных из начала координат в соответствующие вершины многогранника $\tilde{\Lambda}$, с учетом симметрии $\tilde{\Lambda}$, находим:

$$\begin{aligned} V(\tilde{\Lambda}) &= \frac{n}{6}(\tilde{P}_0, \tilde{P}_1, \tilde{Q}_0) + \frac{n}{6}(\tilde{Q}_0, \tilde{P}_1, \tilde{T}_1) + \frac{n}{6}(\tilde{P}_0, \tilde{Q}_0, \tilde{T}_0) + \\ &+ \frac{2n}{6}(\tilde{Q}_0, \tilde{P}, \tilde{T}_0) = \\ (14) \quad &= \frac{n}{6}(r^2\mu \sin \alpha + r\mu(\rho \sin \alpha + t(1 - \cos \alpha)) + 4h\rho t). \end{aligned}$$

По формулам (3), (11)–(13) объем $V(\tilde{\Lambda})$ является функцией переменной s и параметров α , β и r . Будем использовать обозначение $V(\tilde{\Lambda}) = V(s; \alpha, \beta, r)$. Достаточно простая и очевидная схема аналитического построения функции $V(s; \alpha, \beta, r)$ допускает эффективное применение компьютерных программ символьных вычислений и элементарных средств математического анализа для всестороннего изучения этой функции.

- Предложение 2.** (1) $V(\tilde{\Lambda}) = r^3V(\sigma, \alpha, \beta)$, где $\sigma = \frac{s}{b}$.
 (2) Функция $V(\sigma, \alpha, \beta)$ является строго возрастающей по σ при достаточно малых $\sigma \geq 0$.
 (3) Функция $V(\sigma, \alpha, \beta)$ является строго убывающей по σ , достаточно близких к

$$\sigma_l = \frac{s_l}{b} = \frac{\cos \frac{\beta}{4}}{\cos \frac{\alpha}{4}} \cos \frac{\alpha + \beta}{4}.$$

Доказательство. Первый пункт Предложения устанавливается вычислением функции $V(\tilde{\Lambda}) = V(s; \alpha, \beta, r)$ с учетом формул

(3), (11)–(13) и подстановкой в полученное выражение значения $s = b\sigma$. Возникающая в результате функция $V(\sigma, \alpha, \beta)$ имеет вид

$$V = A_0\sigma^3 + (A_1\sigma^2 + A_2\sigma + A_3)\sqrt{A_4\sigma^2 + A_5\sigma + A_6},$$

где коэффициенты A_i зависят от α и β .

Второй и третий пункты Предложения устанавливаются вычислением производной $\frac{dV}{d\sigma}$ при значениях $\sigma = 0$ и $\sigma = \sigma_l$. Функция $\frac{dV}{d\sigma}(0, \alpha, \beta)$ является положительной, каковы бы ни были $0 < \alpha < \frac{2\pi}{3}$, $0 < \beta < \alpha$, а функция $\frac{dV}{d\sigma}(\sigma_l, \alpha, \beta)$ является отрицательной при тех же значениях α и β . \square

Прямым следствием Предложения 2 является

Теорема 1. *Объем пирамиды Λ при линейном изгибании $\tilde{\Lambda}$ на начальном этапе (при достаточно малых $s \geq 0$) увеличивается.*

Поэтому можно подобрать значение $s \in (0, s_l)$, при котором объем $V(\tilde{\Lambda})$ будет максимальным. Указанное критическое значение параметра s , которое будем обозначать s_c , является корнем уравнения $\frac{dV}{ds} = 0$; учитывая, что $V(\tilde{\Lambda}) = r^3V(\sigma, \alpha, \beta)$, задача сводится к отысканию корня $\sigma_c = \frac{s_c}{b}$ уравнения $\frac{dV}{d\sigma} = 0$. Второй и третий пункты Предложения 2 гарантируют наличие хотя бы одного такого корня σ_c внутри интервала $(0, \sigma_l)$.

Уравнение $\frac{dV}{d\sigma} = 0$ имеет вид

$$A_7\sigma^3 + A_8\sigma^2 + A_9\sigma + A_{10} + \sigma^2\sqrt{A_{11}\sigma^2 + A_{12}\sigma + A_{13}} = 0,$$

где коэффициенты A_i являются тригонометрическими полиномами относительно $\frac{\alpha}{4}$ и $\frac{\beta}{4}$. Переместив последнее слагаемое в уравнении в правую часть и возведя обе части в квадрат,

получим алгебраическое уравнение *четвертой* степени относительно σ :

$$(15) \quad B_1 \left(\frac{s}{b}\right)^4 + B_2 \left(\frac{s}{b}\right)^3 + B_3 \left(\frac{s}{b}\right)^2 + B_4 \left(\frac{s}{b}\right)^1 + B_5 = 0.$$

Коэффициенты B_i также являются тригонометрическими полиномами от $\frac{\alpha}{4}$ и $\frac{\beta}{4}$. Искомая величина $\sigma_c = \frac{s_c}{b}$ является корнем уравнения (15). Анализ, проведенный средствами компьютерных программ символьных вычислений, показывает, что из четырех корней уравнения (15) только один является вещественным корнем уравнения $\frac{dV}{d\sigma} = 0$, лежащим внутри интервала $(0, \sigma_l)$. График σ_c как функции от $\frac{\alpha}{4}$ и $\frac{\beta}{4}$ приведен на Рис. 4.

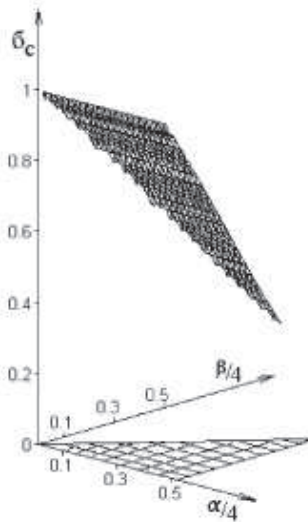


Рис. 4

Мы не выписываем здесь уравнение (15) в явном виде; выражения для коэффициентов B_i громоздкие; громоздким является и явное выражение $\sigma_c = \frac{s_c}{b}$ как функции от α, β . Приведем лишь оценки для s_c .

Предложение 3. *Справедливы неравенства*

$$0 < b - s_c < r \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\beta}{4}} < \frac{1}{\sqrt{3}} r \alpha.$$

Доказательство. Приведем схему доказательства. Проанализируем поведение производной $\frac{dV}{d\sigma}$ как функции от σ , α , β при

$$0 \leq \sigma \leq \sigma_l, \quad 0 < \alpha < \frac{2\pi}{3}, \quad 0 < \beta < \alpha.$$

С одной стороны, при $\sigma = \sigma_l$ функция $\frac{dV}{d\sigma}(\sigma_l, \alpha, \beta)$ является отрицательной, каковы бы ни были значения $0 < \beta < \alpha < \frac{2\pi}{3}$. С другой стороны, при

$$\sigma = 1 - 2 \sin \frac{\beta}{4}$$

функция

$$\frac{dV}{d\sigma} \left(1 - 2 \sin \frac{\beta}{4}, \alpha, \beta \right)$$

является положительной при тех же значениях α , β . Отсюда получаем оценку

$$\left(1 - 2 \sin \frac{\beta}{4} \right) < \sigma_c < \frac{s_l}{b} < 1,$$

из которой следует, что

$$0 < b - s_c < 2b \sin \frac{\beta}{4},$$

а значит

$$0 < b - s_c < r \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\beta}{4}}.$$

Так как при $0 < \beta < \alpha < \frac{2\pi}{3}$ справедливы неравенства

$$\cos \frac{\beta}{4} > \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{и} \quad \sin \frac{\alpha}{2} < \frac{\alpha}{2},$$

то мы и приходим к Предложению 3. \square

Полученные оценки позволяют качественно представить поведение критического значения s_c . А именно, чем меньше $\alpha > 0$, тем ближе s_c к b . Иначе говоря, чем больше граней имеет пирамида Λ , тем меньше будет поясok Ω' у многогранника $\tilde{\Lambda}$ с максимальным объемом.

Из Предложения 1 и приведенных оценок прямо вытекают и другие неравенства, демонстрирующие поведение параметров пирамиды при максимизации объема.

Предложение 4. *Если $s = s_c$, то величины, характеризующие размеры пирамид Λ и Λ' , связаны следующими соотношениями:*

$$\frac{a'}{a} > \frac{1 - 2 \sin \frac{\beta}{4}}{2 \cos^2 \frac{\beta}{4}}, \quad \frac{b'}{b} > \frac{1 - 2 \sin \frac{\beta}{4}}{\cos \frac{\alpha}{4}}, \quad \frac{r'}{r} > \frac{(1 - 2 \sin \frac{\beta}{4}) \cos \frac{\alpha}{4}}{\cos^2 \frac{\beta}{4}},$$

$$\frac{h'}{h} > \left(1 - 2 \sin \frac{\beta}{4}\right) \frac{\cos \frac{\alpha}{4} \sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{4} - \sin^2 \frac{\beta}{4}}}{\cos \frac{\beta}{4} \sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2}}}.$$

Отсюда заключаем, что при малых значениях углов α и β , т.е. при большом числе граней n , длины ребер боковых граней, радиусы окружностей, описанных вокруг оснований, и высоты пирамид Λ и Λ' соответственно достаточно близки, а отношение длин сторон оснований близко к $1 : 2$, что обусловлено удвоением количества боковых граней при переходе от Λ к Λ' .

Еще одно полезное следствие приведенных оценок — возможность аппроксимировать критическое значение s_c величиной

$$s_a = b - r \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\beta}{4}}$$

(в том смысле, что $s_a < s_c < b$). Данное приближение будет тем точнее, чем меньше $\alpha > 0$. Более грубой аппроксимацией для s_c является

$$s_a^\# = b - \frac{1}{\sqrt{3}} r \alpha.$$

Предложенная аппроксимация позволяет установить следующую оценку относительного увеличения объема пирамиды Λ при линейном изгибании $\tilde{\Lambda}$.

Предложение 5. *Максимальный объем, достигаемый в ходе линейного изгибания $\tilde{\Lambda}$ при $s = s_c$, превосходит объем исходной пирамиды Λ более чем в*

$$\chi = 1 + \left(\frac{\alpha}{4}\right)^2 - \frac{11}{4} \left(\frac{\alpha}{4}\right)^2 \frac{\beta}{4}$$

раз.

Указанная оценка является содержательной при условии $\beta < \frac{16}{11}$. Поскольку $\beta < \alpha = \frac{2\pi}{n}$, то условие $\beta < \frac{16}{11}$ выполняется для всех пирамид при $n \geq 5$ и для достаточно высоких пирамид при $n = 3$ или 4.

Доказательство. Приведем схему доказательства. Максимальный объем многогранника $\tilde{\Lambda}$, достигаемый при $s = s_c$, превосходит объем $\tilde{\Lambda}$, который получается при $s = s_a$. Подставим значение s_a , которое можно записать в виде

$$s_a = r \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \left(1 - 2 \sin \frac{\beta}{4}\right),$$

в выражение для функции объема $V(s; \alpha, \beta, r)$ и разделим полученное значение $V(s_a; \alpha, \beta, r)$ на объем исходной пирамиды Λ . Результирующее выражение

$$\frac{V(s_a; \alpha, \beta, r)}{V(0; \alpha, \beta, r)}$$

будет зависеть только от α и β , его график приведен на Рис.5.

Используя разложение Тейлора для $\frac{V(s_a; \alpha, \beta, r)}{V(0; \alpha, \beta, r)}$ по α и β , мы и находим представленную в Предложении величину χ , позволяющую оценить снизу выражение $\frac{V(s_a; \alpha, \beta, r)}{V(0; \alpha, \beta, r)}$. Полученное значение χ дает оценку снизу и для максимального относительного увеличения объема, достигаемого в ходе линейного изгибания $\tilde{\Lambda}$. \square

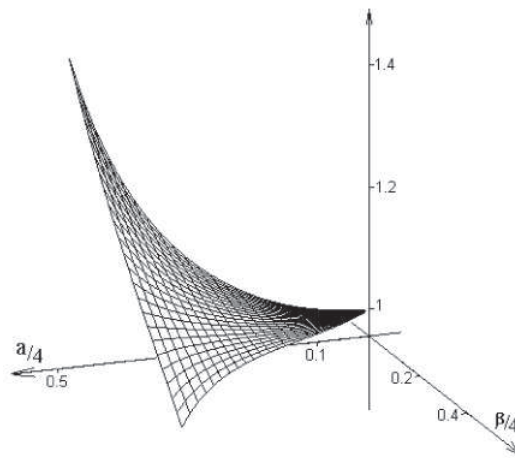


Рис. 5

Анализ Рисунка 5 позволяет предположить, что наилучшее относительное увеличение объема будет наблюдаться в случае достаточно высоких пирамид с небольшим числом граней.

2. Комбинированные линейные изгибания пирамиды

Конструкция, описанная в предыдущей части – итерационная. На первом шаге в процессе рассмотренного выше линейного изгибания правильной n -угольной пирамиды Λ возникает многогранник $\tilde{\Lambda}$, составленный из основания Σ , пояса Ω' и боковой поверхности правильной $2n$ -угольной пирамиды Λ' ,

размеры которых определяются значением параметра $s = s_1$ – высоты боковой грани пирамиды Λ' .

На втором шаге рассматриваем пирамиду Λ' и строим ее линейное изгибание по описанной схеме – в ходе изгибания будет получен многогранник $\tilde{\Lambda}'$, на котором естественным образом выделяются $4n$ -угольная пирамида Λ'' и поясok Ω'' , форма и размеры которых зависят от соответствующего параметра s_2 – высоты боковой грани пирамиды Λ'' . В результате, мы получаем изометричный пирамиде Λ многогранник, обозначим его $\hat{\Lambda}''$, который составлен из основания Σ , двух поясков Ω' , Ω'' и боковой поверхности пирамиды Λ'' .

Продолжая эту процедуру, на k -ом шаге строим линейное изгибание правильной $2^k n$ -гранной пирамиды $\Lambda^{(k-1)}$ и получаем изометричный исходной пирамиде Λ многогранник $\hat{\Lambda}^{(k)}$, составленный из основания Σ , k поясков $\Omega', \dots, \Omega^{(k)}$ и боковой поверхности правильной $2^{k+1} n$ -гранной пирамиды $\Lambda^{(k+1)}$ – размеры многогранника зависят от k параметров s_1, \dots, s_k .

Таким образом, возникает последовательность семейств изометричных пирамиде многогранников:

$$\begin{aligned} & \Lambda, \\ & \hat{\Lambda}^{(1)} = \tilde{\Lambda} = \Sigma \cup \Omega' \cup (\Lambda' \setminus \Sigma'), \\ & \hat{\Lambda}^{(2)} = \Sigma \cup \Omega' \cup \Omega'' \cup (\Lambda'' \setminus \Sigma''), \\ & \hat{\Lambda}^{(k)} = \Sigma \cup \Omega' \cup \dots \cup \Omega^{(k)} \cup (\Lambda^{(k)} \setminus \Sigma^{(k)}), \quad k \geq 3. \end{aligned}$$

Если на каждом шаге фиксировать значение соответствующего параметра s_i , то получим последовательность конкретных многогранников $\{\hat{\Lambda}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$, изометричных пирамиде Λ . Поскольку s_k – это высота боковой грани пирамиды $\Lambda^{(k)}$, а сама пирамида $\Lambda^{(k)}$ возникает при линейном изгибании пирамиды $\Lambda^{(k-1)}$, то $s_k \leq s_{k-1}$. Иначе говоря, последовательность положительных чисел $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ является невозрастающей, а значит – всегда

сходится к некоторому s^\sharp . Предельная поверхность Λ^\sharp соответствующей последовательности многогранников $\{\hat{\Lambda}^{(k)}\}_{k=1}^\infty$ будет представлять собой либо многогранник с бесконечным числом граней, подходящих к одной вершине (случай $s^\sharp = 0$), либо поверхность, составленную из кругового конуса и многогранника с бесконечным числом граней, подходящих к граничной окружности конуса (случай $s^\sharp \neq 0$).

Важнейшим свойством многогранников $\hat{\Lambda}^{(k)}$ является возрастание объема, по крайней мере – при достаточно малых значениях параметров $s_k > 0$:

$$V(\Lambda) < V(\hat{\Lambda}') < V(\hat{\Lambda}'') < \dots < V(\hat{\Lambda}^{(k-1)}) < V(\hat{\Lambda}^{(k)}) < \dots$$

Очевидно, что объемы многогранников $\hat{\Lambda}^{(k)}$ ограничены сверху некоторой константой, зависящей от размеров исходной пирамиды Λ . Например, любой $\hat{\Lambda}^{(k)}$ помещается внутрь шара, диаметр которого превосходит внутренний диаметр пирамиды Λ .

Весьма сложной представляется задача одновременного нахождения оптимальных значений параметров s_k , при которых последовательность изометричных тетраэдру многогранников $\{\hat{\Lambda}^{(k)}\}_{k=1}^\infty$ дает максимально возможное относительное увеличение объема. Чему равна точная верхняя грань для $V(\hat{\Lambda}^{(k)})$? Каким в этом случае будет асимптотическое поведение оптимизирующей последовательности $\hat{\Lambda}^{(k)}$? Что будет представлять собой предельная поверхность Λ^\sharp ?

Один из возможных способов оценки для максимально возможного относительного увеличения объема, достижимого в ходе рассматриваемых линейных изгибаний пирамиды, состоит в том, чтобы на k -шаге в качестве s_k выбирать значение, дающее максимальное увеличение объема в ходе линейного изгибания соответствующей пирамиды $\Lambda^{(k-1)}$. Более простой способ, допускающий простую реализацию численными методами, состоит в том, чтобы на каждом шаге вместо s_c брать аппроксимирующее значение s_a . Сходимость такой простой процедуры описывается следующим утверждением.

Предложение 6. Убывающая последовательность положительных величин

$$s_a^{(1)} > s_a^{(2)} > s_a^{(3)} > \dots$$

сходится к величине

$$s^\# > b \frac{\frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \prod_{j=0}^{\infty} \left(1 - 2 \sin \frac{\beta}{2^{j+2}} \right).$$

Соответствующая последовательность многогранников

$$\hat{\Lambda}^{(1)}, \hat{\Lambda}^{(2)}, \hat{\Lambda}^{(3)}, \dots$$

сходится к поверхности, содержащей круговой конус, при этом длина образующей конуса будет не меньше, чем

$$b \frac{\frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \prod_{j=0}^{\infty} \left(1 - 2 \sin \frac{\beta}{2^{j+2}} \right).$$

Доказательство. Приведем схему доказательства. Каждое $s_a^{(k)}$ вычисляется через соответствующие углы $\alpha^{(k-1)}$, $\beta^{(k-1)}$ и длины сторон $b^{(k-1)}$, $a^{(k-1)}$ пирамиды $\Lambda^{(k-1)}$. Последовательное применение результатов Предложения 4 и приводит к искомой оценке. \square

3. ЛИНЕЙНЫЕ ИЗГИБАНИЯ ТЕТРАЭДРА

Как применение геометрической конструкции, описанной в предыдущем разделе, построим специальные линейные изгибания тетраэдра, приводящие к существенному – более, чем на 44 % - увеличению объема.

Пусть M – тетраэдр с ребрами длины 1, его объем равен $V(M) = \frac{\sqrt{2}}{12}$. Вершины тетраэдра обозначим F_1, \dots, F_4 .

Построим сначала линейное изгибание тетраэдра M , описанное в работах [3] и [4]. На каждом ребре $F_i F_j$ отметим середины A_{ij} . На грани $F_1 F_3 F_4$ восстановим серединные перпендикуляры от точек A_{13} , A_{14} , A_{34} , и отложим на этих перпендикулярах отрезки равной длины u , зафиксированной в пределах от 0

до $\frac{1}{2\sqrt{3}}$. Концы отложенных отрезков обозначим соответственно D_2 , D_3 и D_1 . Соединяя эти точки между собой, получим правильный треугольник $D_1D_2D_3$. Кроме того, соединим отрезками точки D_1 с F_3 и с F_4 , D_2 с F_1 и с F_3 , а D_3 с F_1 и с F_4 . Получим симметричное разбиение грани $V_1V_3V_4$ на 10 треугольников, см. Рис. 6. Повторим аналогичную процедуру с тем же самым значением u и для остальных трех граней тетраэдра. Развертка тетраэдра с проведенными дополнительными ребрами показана на Рис. 7.

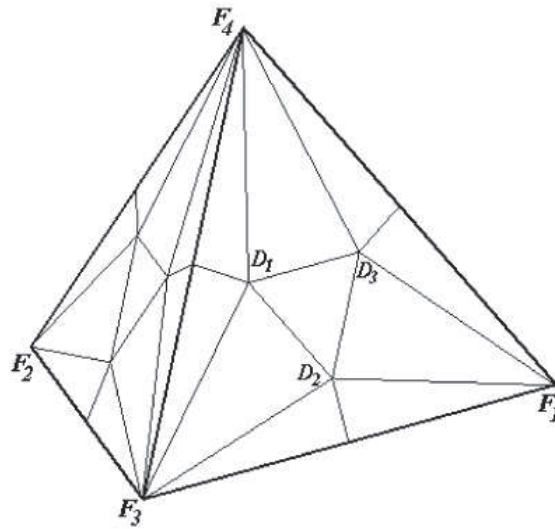


Рис. 6

Эта “измельченная”, развертка допускает реализацию не только в виде тетраэдра, как на Рис. 6, но и другую реализацию в виде многогранника, изометричного исходному тетраэдру, но

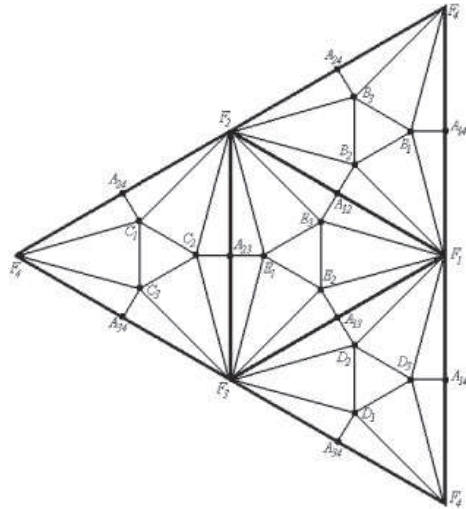


Рис. 7

не конгруэнтному ему. Такая реализация, сохраняющая свойства пространственной симметрии тетраэдра, представлена на Рис. 8.

Строится упомянутый многогранник, который обозначим M_* , следующим образом. Будем обозначать вершины многогранника M_* , соответствующие вершинам исходного тетраэдра M , теми же буквами, добавляя символ *. Расположим исходный тетраэдр M таким образом, чтобы его вершины находились в точках

$$F_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, -\frac{1}{2\sqrt{6}} \right), F_2 = \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{6}} \right),$$

$$F_3 = \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{6}} \right), F_4 = \left(0, 0, \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \right).$$

Вершины F_i^* многогранника M_* расположены на тех же лучах, что и соответствующие вершины F_i тетраэдра M , и равноудалены от начала O . Координаты этих вершин записываются

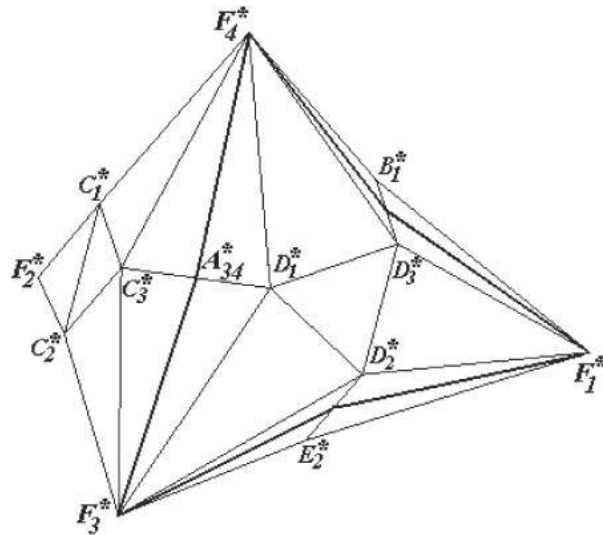


Рис. 8

следующим образом:

$$(16) \quad F_1^* = \lambda \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, -\frac{1}{2\sqrt{6}} \right),$$

$$(17) \quad F_2^* = \lambda \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{6}} \right),$$

$$(18) \quad F_3^* = \lambda \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{6}} \right),$$

$$(19) \quad F_4^* = \lambda \left(0, 0, \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \right).$$

Точки A_{ij}^* расположены на тех же лучах, что и соответствующие точки A_{ij} , и тоже равноудалены от начала O . Координаты точек A_{ij}^* получаются умножением координат A_{ij} на одну и ту

же величину ξ . В частности, имеем:

$$(20) \quad \begin{aligned} A_{14} &= \frac{1}{2}(F_1 + F_4) = \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{2\sqrt{6}} \right), \\ A_{14}^* &= \xi \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{2\sqrt{6}} \right). \end{aligned}$$

Очевидно, что вершины F_i^* совмещаются друг с другом симметриями тетраэдра. Аналогичным свойством обладают и точки A_{ij}^* .

Проведем через точку A_{14}^* прямую l , перпендикулярную плоскости, проходящей через точки F_1^* , F_4^* и O — эта прямая параллельна оси y . На прямой l от точки A_{14}^* отложим в обе стороны отрезки равной длины u . Концы построенных отрезков обозначим B_1^* и D_3^* :

$$(21) \quad B_1^* = \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\xi, u, \frac{1}{2\sqrt{6}}\xi \right),$$

$$(22) \quad D_3^* = \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\xi, -u, \frac{1}{2\sqrt{6}}\xi \right).$$

Применяя к B_1^* и D_3^* симметрии тетраэдра, получим остальные точки B_i^* , C_j^* , D_k^* и E_m^* многогранника M_* , соответствующие точкам B_i , C_j , D_k и E_m исходного тетраэдра M . В частности, применяя к точке B_1^* вращение вокруг оси z на угол $\frac{2}{3}\pi$, получим точку D_1^* :

$$(23) \quad D_1^* = \left(-\frac{1}{4\sqrt{3}}\xi + \frac{\sqrt{3}}{2}u, -\frac{1}{4}\xi - \frac{1}{2}u, \frac{1}{2\sqrt{6}}\xi \right).$$

Аналогично, применяя к точке D_3^* вращение на угол $\frac{2}{3}\pi$ по часовой стрелке вокруг оси, проходящей через начало O перпендикулярно к грани $F_1F_3F_4$, получим точку D_2^* :

$$(24) \quad D_2^* = \left(\frac{1}{4\sqrt{3}}\xi + \frac{\sqrt{3}}{6}u, -\frac{1}{4}\xi - \frac{1}{2}u, -\frac{1}{2\sqrt{6}}\xi + \frac{\sqrt{6}}{3}u \right).$$

Подберем величины $\lambda \geq 0$ и $\xi \geq 0$ таким образом, чтобы многогранник M_* был изометричен тетраэдру M . Длины отрезков $F_i^*A_{ij}^*$ и $A_{ij}^*F_j^*$ должны равняться длинам соответствующих отрезков F_iA_{ij} и $A_{ij}F_j$, которые все равны $\frac{1}{2}$. Чтобы записать соответствующее условие, ввиду симметрии достаточно рассмотреть, например, только точки F_1^* , F_4^* и A_{14}^* . Используя координаты этих точек, представленные в (16), (19) и (20), найдем длины отрезков $F_1^*A_{14}^*$ и $A_{14}^*F_4^*$. Легко проверить, что длины указанных отрезков будут равны $\frac{1}{2}$ тогда и только тогда, когда будет выполнено равенство

$$(25) \quad 3\lambda^2 - 2\lambda\xi + \xi^2 = 2.$$

Длины равных отрезков $B_i^*B_j^*$, $C_j^*C_j^*$, $D_i^*D_j^*$ и $E_i^*E_j^*$ должны равняться длинам соответствующих отрезков B_iB_j , C_iC_j , D_iD_j и E_iE_j , которые равны $(4u^2 + 1) \sin\left(\frac{\pi}{6} - \arctg 2u\right)$. Ввиду симметрии, указанное равенство достаточно проверить для одной пары точек, например — для D_1^* и D_3^* . Используя координаты этих точек, представленные в (22), (23), и находя расстояние между D_1^* и D_3^* , получаем, что длина отрезка $D_1^*D_3^*$ будет равна $(4u^2 + 1) \sin\left(\frac{\pi}{6} - \arctg 2u\right)$ тогда и только тогда, когда будет выполнено равенство

$$\frac{1}{4}\xi^2 - \xi u + u^2 = (4u^2 + 1) \sin\left(\frac{\pi}{6} - \arctg 2u\right),$$

которое преобразуется к виду

$$(26) \quad \left(\frac{1}{2}\xi - u\right)^2 = \left(\frac{1 - 2\sqrt{3}u}{2}\right)^2.$$

Равенство длин оставшихся соответствующих ребер на многогранниках M и M_* будет выполнено по построению и в силу симметрии. Таким образом, многогранники M и M_* будут изометричны тогда и только тогда, когда λ и ξ удовлетворяют уравнениям (25)–(26) при заданном фиксированном u .

Изменяя u от 0 до $\frac{1}{2\sqrt{3}}$, мы получаем семейство многогранников M_* , изометричных исходному тетраэдру. Это семейство будет представлять линейное изгибание тетраэдра, если мы сможем найти решение уравнений (25)–(26) в виде двух непрерывных функций $\lambda(u)$ и $\xi(u)$, удовлетворяющих начальному условию $\lambda(0) = 1$ и $\xi(0) = 1$. Решение, соответствующее рассматриваемому семейству многогранников M_* , имеет вид

$$(27) \quad \xi = 2 \left(u + \frac{1 - 2\sqrt{3}u}{2} \right),$$

$$(28) \quad \lambda = \frac{1}{3} \left(\xi + \sqrt{2}\sqrt{3 - \xi^2} \right).$$

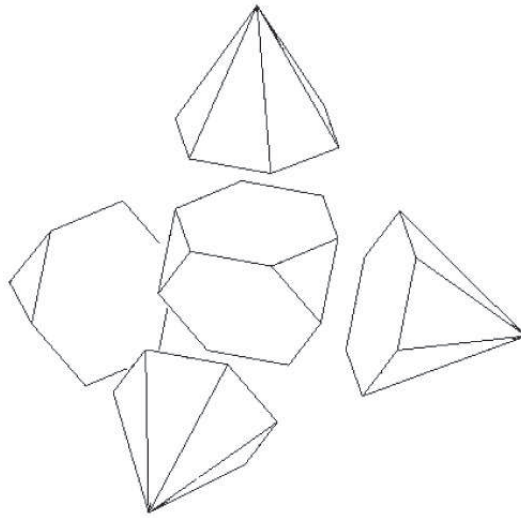


Рис. 9

Для вычисления объема, тело, ограниченное многогранником M_* , естественно разделить на 5 частей, см. Рис. 9. Четыре части ограничены равными пирамидами с шестиугольными основаниями:

- пирамида Λ_1 с вершиной F_1^* и основанием $B_1^*B_2^*E_3^*E_2^*D_2^*D_3^*$,
- пирамида Λ_2 с вершиной F_2^* и основанием $B_2^*B_3^*C_1^*C_2^*E_1^*E_3^*$,
- пирамида Λ_3 с вершиной F_3^* и основанием $E_2^*E_1^*C_2^*C_3^*D_1^*D_2^*$,
- пирамида Λ_4 с вершиной F_4^* и основанием $B_1^*B_3^*C_1^*C_3^*D_1^*D_3^*$.

Оставшаяся часть (остов) ограничена многогранником Λ_0 , который представляет собой либо усеченный тетраэдр (при $0 < u < \frac{1}{2\sqrt{3}}$), либо просто тетраэдр (при $u = \frac{1}{2\sqrt{3}}$).

Вычислим объем многогранника M_* . Используя смешанное произведение векторов, проведенных из начала координат в соответствующие вершины многогранника M_* , и учитывая симметрии M_* , можем записать:

$$V(M_*) = 4\frac{1}{6}(D_1^*, D_2^*, D_3^*) + 12\frac{1}{6}(D_1^*, D_3^*, F_4^*) + 12\frac{1}{6}(D_3^*, B_1^*, F_4^*).$$

Подставляя значения векторов из (19), (21)–(24), получаем:

$$V(M_*) = \frac{1}{24\sqrt{2}}(\xi^3 - 12\xi u^2 + 16u^3 + 3\lambda\xi^2 - 36\lambda u^2 + 36\lambda\xi u).$$

С учетом (27)–(28) величина $V(M_*)$ представляет собой функцию от u . График $V(M_*)$ представлен на Рис. 10; горизонтальной пунктирной линией отмечено значение объема исходного тетраэдра $V(M) = \frac{\sqrt{2}}{12}$.

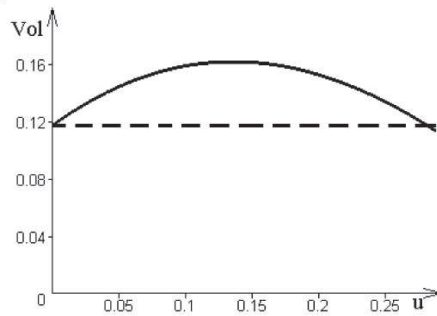


Рис. 10

Наибольшее увеличение объема достигается при $u \approx u_c = 0.1354198$, когда $V(M_*) \approx 0.1623025$; относительное увеличение объема в этом случае равно $\frac{V(M_*)}{V(M)} \approx 1.3771825$, т.е. составляет более 37%. Именно этот результат получен Д. Д. Бликером в [4].

Обратим внимание на следующий удивительный факт. В основании равных пирамид Λ_i будут лежать правильные шестиугольники в том и только в том случае, когда $u = u_r = \frac{1}{2} \tan \frac{\pi}{12}$ — это можно получить, приравняв длины ребер $D_1^*D_3^*$ и $D_3^*B_1^*$. Величина $u_r = \frac{1}{2} \tan \frac{\pi}{12} \approx 0.1339746$ очень близка к найденному выше экстремальному значению $u_c = 0.1354198$. Объем многогранника M_* в этом случае равен $V(M_*) \approx 0.1622977$, а относительное увеличение объема равно $\frac{V(M_*)}{V(M)} \approx 1.3771421$ — это значение указано В. А. Александровым в [5], разница с найденным Д. Д. Бликером увеличением объема имеет порядок 10^{-5} .

Построим теперь новое линейное изгибание тетраэдра M со сторонами длины 1. Рассмотрим сначала линейное изгибание M_* , проанализированное выше, и зафиксируем $u = \frac{1}{2} \tan \frac{\pi}{12}$. К каждой вершине F_i^* многогранника M_* примыкает 6 равных равнобедренных треугольников — граней, образующих боковую поверхность пирамиды Λ_i , см. Рис. 8–9. Эти четыре пирамиды конгруэнтны правильной пирамиде Λ с шестиугольным основанием ($n = 6$, $\alpha = \frac{\pi}{3}$), угол при вершине боковой грани равен $\beta = \frac{\pi}{6}$, длина ребер основания равна $a = 2u = \tan \frac{\pi}{12}$, длина наклонных ребер равна

$$b = \sqrt{\frac{1}{4} + u^2} = \frac{1}{2 \cos \frac{\pi}{12}}.$$

Объем пирамиды Λ равняется

$$\frac{1}{24} n a^2 \sqrt{4b^2 - \frac{a^2}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \approx 0.0275370.$$

Применим теперь к пирамиде Λ линейное изгибание по схеме, изложенной в разделе 2. Получим семейство неконгруэнтных невыпуклых многогранников $\tilde{\Lambda}$, изометричных пирамиде Λ . Максимальное увеличение объема рассматриваемой пирамиды Λ при линейном изгибании $\tilde{\Lambda}$ достигается при $s = 0.4267783$ и составляет $V(\tilde{\Lambda}) \approx 0.0290564$.

Линейное изгибание пирамиды Λ , одновременно реализованное на каждой из пирамид Λ_i , порождает линейное изгибание многогранника M_* , а значит – и линейное изгибание исходного тетраэдра M . При указанном выше значении s мы получаем новый многогранник M'_* , объем которого равен

$$V(M'_*) = V(M_*) - 4 * V(\Lambda) + 4 * V(\tilde{\Lambda}) \approx .1683713.$$

Объем указанного многогранника M'_* превосходит объем исходного тетраэдра M в 1.4286783 раз, иначе говоря – более чем на 42 %, ср. [6]. Таким образом, уже на первом шаге итерации достигнутое Бликером в [4] увеличение объема тетраэдра улучшается более чем на 5 %.

Многогранник M'_* имеет более сложную структуру, чем M_* . Вместо каждой из шестигранных пирамид Λ_i появляется многогранник-поясок, составленный из 6 треугольных и 6 трапециевидных граней, и 12-гранная правильная пирамида. К каждой из этих 12-гранных пирамид тоже можно одновременно применить линейное изгибание по схеме из раздела 2 – получим новый многогранник M''_* , изометричный тетраэдру Λ , с увеличенным объемом.

Как указано в разделе 3, описанный процесс является итерационным. На k -ом шаге рассматривается многогранник $M_*^{(k-1)}$, содержащий четыре конгруэнтные $(2^{k-1} \cdot 6)$ -гранные правильные пирамиды. С помощью линейного изгибания этих пирамид по схеме из раздела 2 строится новый многогранник $M_*^{(k)}$, изометричный тетраэдру M , с увеличенным объемом.

В нижеследующей таблице приведены результаты численного анализа указанного процесса. В первой колонке указан

номер шага k , во второй, третьей и четвертой – количество боковых граней и характерные размеры соответствующей $2^{k-1} \cdot 6$ -гранной пирамиды, принадлежащей $M_*^{(k-1)}$ и подвергаемой линейному изгибанию на k -ом шаге, в пятой – экстремальное значение s_c , в шестой – максимальное относительное увеличение объема $V(M_*^{(k)})/V(M)$, достигаемое на k -ом шаге.

k	n	a	b	s_c	$V(M_*^{(k)})/V(M)$
1	6	0.2679492	0.5176381	0.4267783	1.4286783
2	12	0.1123728	0.4304609	0.3942073	1.4375726
3	24	0.0516754	0.3950532	0.3788093	1.4394450
4	48	0.0248015	0.3790065	0.3713158	1.4398758
5	96	0.0121522	0.3713599	0.3676075	1.4399793
6	192	0.0060154	0.3676378	0.3654378	1.4400047

Сходимость рассматриваемого процесса является достаточно высокой, и уже на 6 шаге получается многогранник $M_*^{(6)}$, изометричный исходному тетраэдру M , объем которого превосходит объем тетраэдра более чем на 44 %.

Предельная поверхность M^\sharp рассматриваемой последовательности многогранников $M_*^{(k)}$, как утверждалось в Предложении 6, будет содержать четыре конгруэнтных круговых конуса с вершинами в точках, соответствующих вершинам исходного тетраэдра M , при этом длина образующих конусов приближенно равняется 0.36. Оставшаяся часть M^\sharp – это многогранная поверхность с бесконечным числом граней, край которой составлен из четырех окружностей.

Аналогичную конструкцию можно применить к каждому выпуклому правильному многограннику M . Сначала M линейно изгибается с увеличением объема по схеме из [3]– [4]. В процессе построения получается невыпуклый многогранник M_* , включающий несколько конгруэнтных правильных пирамид (8 шестигранных пирамид в случае, когда M – куб; 6

восьмигранных пирамид в случае, когда M — октаэдр; 20 шестигранных пирамид в случае, когда M — додекаэдр; 12 десятигранных пирамид в случае, когда M — икосаэдр). К каждой из правильных пирамид итерационно применяется описанное в разделе 2 линейное изгибание, приводящее к последовательному увеличению объема. В нижеследующей таблице в третьей колонке приведены соответствующие численные результаты относительного увеличения объема правильных многогранников с помощью описанной процедуры (6 шагов итерации), в первой и второй колонках указаны соответствующие результаты из [4], [6].

	<i>Бликер</i>	<i>Милка</i>	<i>Авторы</i>
<i>Тетраэдр</i>	1.37718257...	1.41575603...	1.44000470...
<i>Куб</i>	1.21865263...	1.23397824...	1.24030167...
<i>Октаэдр</i>	1.11580800...	1.13233864...	1.13589463...
<i>Додекаэдр</i>	1.09339757...	1.09733081...	1.09723965...
<i>Икосаэдр</i>	1.03631161...	1.05274569...	1.04272167...

Как видим, наиболее существенное усиление результатов из [4]– [6] достигается для тетраэдра. В то же время, для икосаэдра и додекаэдра полученная добавка является весьма незначительной, что возможно обусловлено пологостью правильных пирамид Δ , возникающих при линейном изгибании.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Погорелов А.В., Геометрическая теория устойчивости оболочек. - М.: Наука, 1966.
- [2] Погорелов А.В., Геометрические методы в нелинейной теории упругих оболочек. - М.: Наука, 1967.
- [3] Милка А.Д., Линейные изгибания правильных выпуклых многогранников // Математическая физика, анализ, геометрия. - 1994. - Т.1, В.1. - С.116-130.
- [4] Bleecker D.D., Volume increasing isometric deformations of convex polyhedra // Journal of Differential Geometry. - 1996. - V.43, N.3. - P.505-526.

- [5] Александров В.А., Как смять пакет от молока, чтобы в него вошло больше // Соросовский образовательный журнал. - Т.6, В.2. (2000). - С.121-127
- [6] Милка А.Д., Решение проблемы Бликера // Тезисы докладов 4-ой международной конференции по геометрии и топологии, Черкассы, 2001, с.64-65.
- [7] Финкель В.М., Портрет трещины. - М.: Металлургия, 1981, 160 с.

В. И. Паньженский

*Пензенский государственный педагогический университет,
Пенза*

E-mail: Sorokina_m@list.ru

Римановы пространства постоянной кривизны с кручением

В настоящей работе нами доказано, что среди всех римановых пространств постоянной секционной кривизны только трехмерные пространства имеют кручение, инвариантное относительно группы движений. Тензор кручения в этих пространствах ковариантно постоянен и определяет форму кручения. Отношение интеграла от этой формы по ограниченной области к ее объему есть величина постоянная, определяющая кручение пространства. Вводятся понятия объемного кручения и скалярного кручения.

Ключевые слова: *риманово пространство, тензор кручения*

1. Пусть M — гладкое n -мерное многообразие, g — риманова метрика на M , ∇ — связность Леви-Чивита, $\tilde{\nabla}$ — метрическая связность с кручением: $\tilde{\nabla}g = 0$, S — тензор кручения связности $\tilde{\nabla}$, T — тензор деформации связности ∇ . Если (x^i) — локальные координаты на M , $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ — естественный локальный базис векторных полей и $\nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma_{ij}^k\partial_k$, $\tilde{\nabla}_{\partial_i}\partial_j = \tilde{\Gamma}_{ij}^k\partial_k$, $S_{ij}^k = \tilde{\Gamma}_{ij}^k - \tilde{\Gamma}_{ji}^k$, $T_{ij}^k = \tilde{\Gamma}_{ij}^k - \Gamma_{ij}^k$, то, очевидно, имеем:

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \tilde{\Gamma}_{(ij)}^k + \frac{1}{2}S_{ij}^k, \tilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + T_{ij}^k, S_{ij}^k + S_{ji}^k = 0.$$

Кроме того согласованность связности $\tilde{\nabla}$ с метрикой g имеет место тогда и только тогда, когда компоненты $T_{ijk} = T_{ij}^p g_{kp}$ тензора деформации кососимметричны по последним двум индексам. Действительно, в локальных координатах имеем

$$\partial_i g_{jk} - g_{pk} \tilde{\Gamma}_{ij}^p - g_{jp} \tilde{\Gamma}_{ik}^p = 0 \quad (1)$$

© В. И. Паньженский, 2009

или

$$\partial_i g_{jk} - g_{pk} \Gamma_{ij}^p - g_{jp} \Gamma_{ik}^p - g_{pk} T_{ij}^p - g_{jp} T_{ik}^p = 0,$$

откуда

$$g_{pk} T_{ij}^p + g_{jp} T_{ik}^p = 0,$$

т.е.

$$T_{ijk} + T_{ikj} = 0,$$

что и доказывает наше утверждение. Циклируя (1) получим еще два равенства

$$\partial_j g_{ki} - g_{pi} \tilde{\Gamma}_{jk}^p - g_{kp} \tilde{\Gamma}_{ji}^p = 0,$$

$$\partial_k g_{ij} - g_{pj} \tilde{\Gamma}_{ki}^p - g_{ip} \tilde{\Gamma}_{kj}^p = 0.$$

Складывая два первых равенства и вычитая последнее, получим:

$$\begin{aligned} & (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}) = \\ & = g_{pk} (\tilde{\Gamma}_{ij}^p + \tilde{\Gamma}_{ji}^p) + g_{jp} (\tilde{\Gamma}_{ik}^p - \tilde{\Gamma}_{ki}^p) + g_{ip} (\tilde{\Gamma}_{jk}^p - \tilde{\Gamma}_{kj}^p), \end{aligned}$$

или

$$g_{pk} (\tilde{\Gamma}_{ij}^p + \tilde{\Gamma}_{ji}^p + S_{ji}^p) = (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}) + g_{jp} S_{ki}^p + g_{ip} S_{kj}^p,$$

откуда

$$2g_{pk} \tilde{\Gamma}_{ij}^p = (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}) + g_{pk} S_{ij}^p + g_{jp} S_{ki}^p + g_{ip} S_{kj}^p,$$

поэтому

$$g_{pk} \tilde{\Gamma}_{ij}^p = \Gamma_{ijk} + \frac{1}{2} (S_{ijk} + S_{kij} + S_{kji})$$

и

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^l = \Gamma_{ij}^l + \frac{1}{2} (S_{ij}^l + S^l_{ij} + S^l_{ji}).$$

Отсюда получаем выражение тензора деформации через тензор кручения:

$$T_{ij}^k = \frac{1}{2} (S_{ij}^k + S^k_{ij} + S^k_{ji})$$

и

$$T_{ijk} = \frac{1}{2} (S_{ijk} + S_{kij} + S_{kji}). \quad (2)$$

Циклируя (2), получим:

$$T_{jki} = \frac{1}{2}(S_{jki} + S_{ijk} + S_{ikj}).$$

Складывая последние два равенства и учитывая косую симметрию тензора кручения по первым двум индексам, получим выражение тензора кручения через тензор деформации:

$$S_{ijk} = T_{ijk} + T_{jki}.$$

Из приведенных выше равенств следует, что *симметрическая часть связности $\tilde{\nabla}$ совпадает со связностью Леви-Чивита тогда и только тогда, когда компоненты S_{ijk} тензора кручения и, следовательно, компоненты T_{ijk} тензора деформации, кососимметричны по всем индексам [1]. В этом случае $T_{ijk} = \frac{1}{2}S_{ijk}$. Такое кручение назовем каноническим, а 3-форму $\Omega = S_{ijk}dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k (i < j < k)$ — фундаментальной формой кручения.*

2. Векторное поле $X = \xi^i \partial_i$ является инфинитезимальным движением риманова пространства $V^n = (M, g)$ тогда и только тогда, когда производная Ли вдоль X от метрического тензора равна нулю: $\mathcal{L}_X g = 0$. Как следствие нетрудно получить [2], что и $\mathcal{L}_X \nabla = 0$. Потребуем, чтобы любое движение сохраняло и связность $\tilde{\nabla}$: $\mathcal{L}_X \tilde{\nabla} = 0$, что равносильно равенству $\mathcal{L}_X T = 0$ или $\mathcal{L}_X S = 0$.

Уравнения движений (уравнения Киллинга) имеют вид [2]

$$\xi_{ij} + \xi_{ji} = 0, \quad (3)$$

где $\xi_{ij} = \xi_i^p g_{jp}$, $\xi_i^j = \nabla_i \xi^j$. Равенство нулю производной Ли от тензора деформации запишем в ковариантных производных

$$\xi^p \nabla_p T_{ijk} + \nabla_i \xi^p T_{pjk} + \nabla_j \xi^p T_{ipk} + \nabla_k \xi^p T_{ijp} = 0$$

или

$$\xi^p \nabla_p T_{ijk} + \xi_{rq} \{ \delta_i^r g^{qp} T_{pjk} + \delta_j^r g^{qp} T_{ipk} + \delta_k^r g^{qp} T_{ijp} \} = 0, \quad (4)$$

где δ_i^j — символ Кронекера, g^{ij} — контравариантные компоненты метрического тензора g : $g_{ip}g^{pj} = \delta_i^j$.

Пусть V^n является римановым пространством постоянной секционной кривизны и, следовательно, допускает группу движений G^r размерности $r = n(n+1)/2$. Тогда равенства (4) должны выполняться при любых ξ^p и ξ_{rq} , удовлетворяющих (3). Поэтому из (4) следует

$$\nabla_p T_{ijk} = 0 \quad (5)$$

и

$$\begin{aligned} & \delta_i^r g^{qp} T_{pjk} + \delta_j^r g^{qp} T_{ipk} + \delta_k^r g^{qp} T_{ijp} - \\ & - \delta_i^q g^{rp} T_{pjk} - \delta_j^q g^{rp} T_{ipk} - \delta_k^q g^{rp} T_{ijp} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Умножая (6) на $g_{lr}g_{mq}$ и учитывая косую симметрию компонент тензора деформации по последним двум индексам, получаем равносильные (6) соотношения:

$$g_{il}T_{mjk} - g_{jl}T_{ikm} + g_{kl}T_{ijm} - g_{im}T_{ljk} + g_{jm}T_{ikl} - g_{km}T_{ijl} = 0. \quad (7)$$

Лемма 1. *Соотношения (7) являются условием интегрируемости системы дифференциальных уравнений (5).*

Доказательство. Уравнения (5) имеют вид

$$\partial_p T_{ijk} = T_{sjk}\Gamma_{pi}^s + T_{isk}\Gamma_{pj}^s + T_{ijs}\Gamma_{pk}^s \quad (8)$$

Дифференцируя (8) и учитывая, что $\partial_{pq}T_{ijk} = \partial_{qp}T_{ijk}$, получим

$$\begin{aligned} & \partial_q T_{sjk}\Gamma_{pi}^s + T_{sjk}\partial_q \Gamma_{pi}^s + \partial_q T_{isk}\Gamma_{pj}^s + \\ & + T_{isk}\partial_q \Gamma_{pj}^s + \partial_q T_{ijs}\Gamma_{pk}^s + T_{ijs}\partial_q \Gamma_{pk}^s = \\ & = \partial_p T_{sjk}\Gamma_{pi}^s + T_{sjk}\partial_p \Gamma_{pi}^s + \partial_p T_{isk}\Gamma_{pj}^s + \\ & + T_{isk}\partial_p \Gamma_{pj}^s + \partial_p T_{ijs}\Gamma_{pk}^s + T_{ijs}\partial_p \Gamma_{pk}^s. \end{aligned} \quad (9)$$

Принимая во внимание (8) и выражение

$$R_{ijk}^l = \partial_i \Gamma_{jk}^l - \partial_j \Gamma_{ik}^l + \Gamma_{ip}^l \Gamma_{jk}^p - \Gamma_{jp}^l \Gamma_{ik}^p$$

для компонент тензора кривизны, соотношения (9) приводятся к виду

$$R_{qpi}^s T_{sjk} + R_{qpj}^s T_{isk} + R_{qpk}^s T_{ijs} = 0 \quad (10)$$

Так как риманово пространство V^n имеет постоянную секционную кривизну, то

$$R_{qpi}^s = k(\delta_q^s g_{pi} - \delta_p^s g_{qi}), \quad (11)$$

где k — кривизна пространства. Подставляя (11) в (10), получим

$$k(g_{pi} T_{qik} - g_{qi} T_{pjk} + g_{pj} T_{iqk} - g_{qj} T_{ipk} + g_{pk} T_{ijq} - g_{qk} T_{ijp}) = 0 \quad (12)$$

Если $k = 0$, то $R_{qpi}^s = 0$ и условия интегрируемости уравнений (5) выполняются тождественно. Если $k \neq 0$, то из (12), учитывая косую симметрию компонент тензора деформации по последним двум индексам, немедленно следует (7). \square

3. Рассмотрим подробнее условия интегрируемости (7). Перепишем (7), умножив на $g^{ql} g^{rm}$:

$$\delta_i^q T^r_{jk} - \delta_j^q T_{ik}{}^r + \delta_k^q T_{ij}{}^r - \delta_i^r T^q_{jk} + \delta_j^r T_{ik}{}^q - \delta_k^r T_{ij}{}^q = 0, \quad (13)$$

где $T^r_{jk} = T_{sjk} g^{sr}$, $T_{ik}{}^r = T_{iks} g^{sr}$. В (13) свернем индексы q и i . В результате получим:

$$nT^r_{jk} - T_{jk}{}^r + T_{kj}{}^r - T^r_{jk} + \delta_j^r T_{**k}{}^* - \delta_k^r T_{*j}{}^* = 0 \quad (14)$$

или

$$(n-1)T^r_{jk} - T_{jk}{}^r + T_{kj}{}^r + \delta_j^r T_{**k}{}^* - \delta_k^r T_{*j}{}^* = 0, \quad (15)$$

где $T_{**k}{}^* = T_{sk}^s$. Умножив (15) на g_{ir} , получим:

$$(n-1)T_{ijk} - T_{jki} + T_{kji} + g_{ji} T_{**k}{}^* - g_{ki} T_{*j}{}^* = 0. \quad (16)$$

Циклируя (16), получим еще два равенства

$$(n-1)T_{jki} - T_{kij} + T_{ikj} + g_{kj} T_{*i}{}^* - g_{ij} T_{**k}{}^* = 0 \quad (17)$$

$$(n-1)T_{kij} - T_{ijk} + T_{jik} + g_{ik} T_{*j}{}^* - g_{jk} T_{*i}{}^* = 0 \quad (18)$$

Складывая (16), (17) и (18), получим

$$(n-1)(T_{ijk} + T_{jki} + T_{kij}) - T_{jki} - T_{kij} - T_{ijk} + T_{kji} + T_{ikj} + T_{jik} = 0 \quad (19)$$

или, учитывая косую симметрию тензора деформации,

$$(n-3)(T_{ijk} + T_{jki} + T_{kij}) = 0, \quad (20)$$

откуда для $n \neq 3$

$$T_{ijk} + T_{jki} + T_{kij} = 0 \quad (21).$$

Учитывая (21) равенства (16) примут вид

$$nT_{ijk} + g_{ji}T_{*k}^* - g_{ki}T_{*j}^* = 0. \quad (22)$$

Умножая (22) на g^{kl} , получим

$$nT_{ij}^l + g_{ji}g^{kl}T_{*k}^* - \delta_i^l T_{*j}^* = 0 \quad (23).$$

В (23) свернем индексы l и i . В результате будем иметь: $nT_{*j}^* + T_{*j}^* - nT_{*j}^* = 0$, откуда $T_{*j}^* = 0$. Теперь (16) примет вид: $(n-1)T_{ijk} - T_{jki} + T_{kji} = 0$ или, учитывая опять (21), $nT_{ijk} = 0$, т.е. $T_{ijk} = 0$ и, следовательно, $S_{ijk} = 0$. Таким образом справедлива

Теорема 1. *Если риманово пространство V^n , $n \neq 3$, допускает группу движений максимальной размерности, то оно не имеет инвариантного кручения.*

4. Рассмотрим случай $n = 3$. Существует система координат, в которой метрика риманова пространства V^3 постоянной кривизны имеет вид [2]

$$ds^2 = \frac{dx^{1^2} + dx^{2^2} + dx^{3^2}}{[1 + \frac{k}{4}(x^{1^2} + x^{2^2} + x^{3^2})]^2}. \quad (24)$$

Имеет место

Лемма 2. *Условия интегрируемости (7) для метрики (24) выполняются тождественно тогда и только тогда, когда*

тензор деформации T_{ijk} кососимметричен по всем индексам, т.е. когда кручение является каноническим.

Доказательство. Подставив компоненты

$$g_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{\left[1 + \frac{k}{4}(x^{12} + x^{22} + x^{32})\right]^2} \quad (25)$$

метрического тензора в (7), получим

$$\delta_{il}T_{mjk} - \delta_{jl}T_{ikm} + \delta_{kl}T_{ijm} - \delta_{im}T_{ljk} + \delta_{jm}T_{ikl} - \delta_{km}T_{ijl} = 0 \quad (26)$$

Все индексы в (26) принимают значения 1,2,3. Поэтому (26) содержит 3^5 уравнений. Теперь непосредственной проверкой, выписывая каждое из этих уравнений, убеждаемся в справедливости нашего утверждения. \square

Далее, интегрируя уравнения движений

$$\xi^p \partial_p g_{ij} + \partial_i \xi^p g_{pj} + \partial_j \xi^p g_{ip} = 0 \quad (27)$$

для метрики (24), находим базисные векторные поля (операторы) алгебры Ли инфинитезимальных движений:

$$X_1 = \left[1 - \frac{k}{4}(-x^{12} + x^{22} + x^{32})\right] \partial_1 + \frac{k}{2} x^1 x^2 \partial_2 + \frac{k}{2} x^1 x^3 \partial_3,$$

$$X_2 = \frac{k}{2} x^2 x^1 \partial_1 + \left[1 - \frac{k}{4}(x^{12} - x^{22} + x^{32})\right] \partial_2 + \frac{k}{2} x^2 x^3 \partial_3,$$

$$X_3 = \frac{k}{2} x^3 x^1 \partial_1 + \frac{k}{2} x^3 x^2 \partial_2 + \left[1 - \frac{k}{4}(x^{12} + x^{22} - x^{32})\right] \partial_3,$$

$$X_{12} = -x^2 \partial_1 + x^1 \partial_2, \quad X_{13} = -x^3 \partial_1 + x^1 \partial_3, \quad X_{23} = -x^3 \partial_2 + x^2 \partial_3.$$

Для каждого оператора X выпишем уравнения инвариантности тензора деформации ($\mathcal{L}_X T = 0$):

$$\xi^p \partial_p T_{ijk} + \partial_i \xi^p T_{pjk} + \partial_j \xi^p T_{ipk} + \partial_k \xi^p T_{ijp} = 0 \quad (28)$$

В результате получим следующую систему дифференциальных уравнений в частных производных относительно неизвестных

функций T_{ijk} :

$$\begin{aligned}
& \left[1 - \frac{k}{4}(-x^{1^2} + x^{2^2} + x^{3^2}) \right] \partial_1 T_{ijk} + \frac{k}{2}x^1x^2\partial_2 T_{ijk} + \frac{k}{2}x^1x^3\partial_3 T_{ijk} + \\
& + \frac{k}{2}(x^1\delta_i^1 - x^2\delta_i^2 - x^3\delta_i^3)T_{1jk} + \frac{k}{2}(x^2\delta_i^1 + x^1\delta_i^2)T_{2jk} + \\
& + \frac{k}{2}(x^3\delta_i^1 + x^1\delta_i^3)T_{3jk} + \frac{k}{2}(x^1\delta_j^1 - x^2\delta_j^2 - x^3\delta_j^3)T_{i1k} + \\
& + \frac{k}{2}(x^2\delta_j^1 + x^1\delta_j^2)T_{i2k} + \frac{k}{2}(x^3\delta_j^1 + x^1\delta_j^3)T_{i3k} + \\
& + \frac{k}{2}(x^1\delta_k^1 - x^2\delta_k^2 - x^3\delta_k^3)T_{ij1} + \frac{k}{2}(x^2\delta_k^1 + x^1\delta_k^2)T_{ij2} + \\
& + \frac{k}{2}(x^3\delta_k^1 + x^1\delta_k^3)T_{ij3} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{k}{2}x^2x^1\partial_1 T_{ijk} + \left[1 - \frac{k}{4}(x^{1^2} - x^{2^2} + x^{3^2}) \right] \partial_2 T_{ijk} + \frac{k}{2}x^2x^3\partial_3 T_{ijk} + \\
& + \frac{k}{2}(x^2\delta_i^1 + x^1\delta_i^2)T_{1jk} + \frac{k}{2}(-x^1\delta_i^1 + x^2\delta_i^2 - x^3\delta_i^3)T_{2jk} + \\
& + \frac{k}{2}(x^3\delta_i^2 + x^2\delta_i^3)T_{3jk} + \frac{k}{2}(x^2\delta_j^1 + x^1\delta_j^2)T_{i1k} + \\
& + \frac{k}{2}(-x^1\delta_j^1 + x^2\delta_j^2 - x^3\delta_j^3)T_{i2k} + \frac{k}{2}(x^3\delta_j^2 + x^2\delta_j^3)T_{i3k} + \\
& + \frac{k}{2}(x^2\delta_k^1 + x^1\delta_k^2)T_{ij1} + \frac{k}{2}(-x^1\delta_k^1 + x^2\delta_k^2 - x^3\delta_k^3)T_{ij2} + \\
& + \frac{k}{2}(x^3\delta_k^2 + x^2\delta_k^3)T_{ij3} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -x^2\partial_1 T_{ijk} + x^1\partial_2 T_{ijk} - \delta_i^2 T_{1jk} + \delta_i^1 T_{2jk} - \delta_j^2 T_{i1k} + \\
& + \delta_j^1 T_{i2k} - \delta_k^2 T_{ij1} + \delta_k^1 T_{ij2} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -x^3\partial_1 T_{ijk} + x^1\partial_3 T_{ijk} - \delta_i^3 T_{1jk} + \delta_i^1 T_{3jk} - \delta_j^3 T_{i1k} + \\
& + \delta_j^1 T_{i3k} - \delta_k^3 T_{ij1} + \delta_k^1 T_{ij3} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{k}{2}x^3x^1\partial_1T_{ijk} + \frac{k}{2}x^3x^2\partial_2T_{ijk} + \left[1 - \frac{k}{4}(x^{12} + x^{22} - x^{32})\right] \partial_3T_{ijk} + \\
& + \frac{k}{2}(x^3\delta_i^1 + x^1\delta_i^3)T_{1jk} + \frac{k}{2}(x^3\delta_i^2 + x^2\delta_i^3)T_{2jk} + \\
& + \frac{k}{2}(-x^1\delta_i^1 - x^2\delta_i^2 + x^3\delta_i^3)T_{3jk} + \frac{k}{2}(x^3\delta_j^1 + x^1\delta_j^3)T_{i1k} + \\
& + \frac{k}{2}(x^3\delta_j^2 + x^2\delta_j^3)T_{i2k} + \frac{k}{2}(-x^1\delta_j^1 - x^2\delta_j^2 + x^3\delta_j^3)T_{i3k} + \\
& + \left(\frac{k}{2}x^3\delta_k^1 + \frac{k}{2}x^1\delta_k^3\right)T_{ij1} + \left(\frac{k}{2}x^3\delta_k^2 + \frac{k}{2}x^2\delta_k^3\right)T_{ij2} + \\
& + \frac{k}{2}(-x^1\delta_k^1 - x^2\delta_k^2 + x^3\delta_k^3)T_{ij3} = 0, \\
& - x^3\partial_2T_{ijk} + x^2\partial_3T_{ijk} - \delta_i^3T_{2jk} + \delta_i^2T_{3jk} - \delta_j^3T_{i2k} + \\
& + \delta_j^2T_{i3k} - \delta_k^3T_{ij2} + \delta_k^2T_{ij3} = 0.
\end{aligned}$$

Интегрируя данную систему, находим ее общее решение

$$T_{ijk} = \frac{c_{ijk}}{\left[1 + \frac{k}{4}(x^{12} + x^{22} + x^{32})\right]^3}, \quad (29)$$

где c_{ijk} — постоянные, из которых, в силу кривизны симметрии существенной является лишь одна. Нетрудно убедиться, что тензор деформации, как и тензор кручения, ковариантно постоянен.

Таким образом имеет место

Теорема 2. *Трехмерное риманово пространство постоянной кривизны обладает ковариантно постоянным каноническим кручением, инвариантным относительно группы движений.*

5. Обозначив через $s = 2c_{123}$, выпишем фундаментальную форму кручения:

$$\Omega = \frac{s}{\left[1 + \frac{k}{4}(x^{12} + x^{22} + x^{32})\right]^3} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \quad (30)$$

Пусть D — ограниченная область в пространстве V^3 . Тогда инвариантным образом определен интеграл [3] $v = \int_D \Omega$. С другой стороны, в римановом пространстве определен объем области D интегралом

$$v_0 = \int_D \Omega_0,$$

где $\Omega_0 = \sqrt{g} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$, $g = \det \|g_{ij}\|$. Для метрики (24)

$$\sqrt{g} = [1 + \frac{k}{4}(x^1{}^2 + x^2{}^2 + x^3{}^2)]^{-3}.$$

Поэтому отношение $\frac{v}{v_0}$ объемов как и отношение $\frac{S_{123}}{\sqrt{g}}$ плотностей есть постоянная величина s , определяющая кручение пространства.

Пусть теперь $V^3 = (M, g)$ — произвольное трехмерное риманово пространство и пусть кроме метрического тензора $g(g_{ij})$ — симметрического тензорного поля на M , задано кососимметрическое тензорное поле $S(S_{ijk})$. Тогда кроме связности Леви-Чивита $\nabla(\Gamma_{ij}^k)$ мы имеем метрическую связность

$$\tilde{\nabla}(\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + \frac{1}{2}S_{ij}^k)$$

с каноническим кручением S . Пусть, как и ранее, D — некоторая ограниченная область в пространстве V^3 . Тогда мы можем вычислить интегралы от плотностей S_{123} и \sqrt{g} :

$$v = \int_D S_{123} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3, v_0 = \int_D \sqrt{g} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

и инвариантным образом определить *объемное кручение* как отношение $\frac{v}{v_0}$ и *скалярное кручение* как отношение $\frac{S_{123}}{\sqrt{g}}$ плотностей.

Объемное кручение является функционалом, заданном на множестве всех областей интегрирования, а скалярное кручение есть функция точки.

Таким образом, если V^3 является римановым пространством постоянной кривизны и кручение инвариантно относительно его группы движений, то его объемное кручение совпадает со скалярным кручением и является постоянной величиной.

6. Пусть $k = 0$. Тогда

$$\tilde{\Gamma}_{12}^3 = \tilde{\Gamma}_{23}^1 = \tilde{\Gamma}_{31}^2 = -\tilde{\Gamma}_{21}^3 = -\tilde{\Gamma}_{32}^1 = -\tilde{\Gamma}_{13}^2 = s,$$

остальные — нули. Уравнения параллельного переноса

$$\frac{dv^k}{dt} + \tilde{\Gamma}_{ij}^k \frac{dx^i}{dt} v^j = 0$$

вектора $v^k = v^k(t)$ вдоль кривой $x^k = x^k(t)$ примут вид

$$\begin{aligned} \frac{dv^1}{dt} + s \left(\frac{dx^2}{dt} v^3 - \frac{dx^3}{dt} v^2 \right) &= 0 \\ \frac{dv^2}{dt} + s \left(\frac{dx^3}{dt} v^1 - \frac{dx^1}{dt} v^3 \right) &= 0 \\ \frac{dv^3}{dt} + s \left(\frac{dx^1}{dt} v^2 - \frac{dx^2}{dt} v^1 \right) &= 0 \end{aligned} \quad (31)$$

Исследуем подробнее параллельное перенесение, например, вектора $v(1, 0, 0)$ вдоль кривой $x^1 = 0, x^2 = 0, x^3 = t$, т.е. вдоль оси x^3 . Уравнения (31) в этом случае выглядят так:

$$\frac{dv^1}{dt} - sv^2 = 0, \quad \frac{dv^2}{dt} + sv^1 = 0, \quad \frac{dv^3}{dt} = 0. \quad (32)$$

Интегрируя эту систему, находим ее общее решение:

$$v^1 = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \cos(st - \varphi_0), \quad v^2 = -\sqrt{c_1^2 + c_2^2} \sin(st - \varphi_0), \quad v^3 = c_3, \quad (33)$$

где $\varphi_0 = \arctg \frac{c_2}{c_1}$.

Из начальных условий следует, что $c_1 = 1, c_2 = 0, c_3 = 0$. Поэтому конец вектора v описывает винтовую линию

$$\vec{r} = \vec{r} \{ \cos(st), \sin(st), t \}, \quad (34)$$

лежащую на прямом геликоиде, который заматается осью x^1 при параллельном переносе ее вдоль оси x^3 .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Яно К, Бохнер С. Кривизна и числа Бетти/ М.- 1957.
- [2] Эйзенхарт Л.П. Непрерывные группы преобразований/ М. - 1947.
- [3] Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии/ М. - 1970.

Е. Н. Синюкова

*Южноукраинский педагогический университет
имени К. Д. Ушинского, Одесса
E-mail: Marbel@ukr.net*

О геодезической однозначной определенности в целом некоторых специальных классов римановых пространств

Отримані певні теореми про геодезичні відображення “у цілому” деяких компактних та некомпактних риманових просторів.

Получено ряд теорем о геодезических отображениях “в целом” некоторых компактных и некомпактных римановых пространств.

Some theorems of geodesic mappings in a whole of certain compact and non-compact Riemannian spaces are obtained.

Ключевые слова: *riemannian space, a geodesic mapping*

Под C^r -многообразием M^n ($n \in N$, $r > 1$) будем понимать хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой, у каждой точки которого существует окрестность, гомеоморфная некоторой области пространства R^n , любые две такие окрестности C^r -согласованы между собой. На подобном многообразии существует риманова C^{r-1} -метрика (задаваемая бесконечным числом способов, не обязательно положительно определенная), превращающая его в риманово C^r -пространство V^n [2].

Пусть J — непустой интервал, отрезок или полуинтервал прямой R^1 . Дифференцируемым путем (параметризованой кривой) класса C^k в C^r -многообразии M^n ($1 \leq k \leq r$) называют C^k -отображение $l : J \rightarrow M^n$. C^k -пути $l_1 : J_1 \rightarrow M^n$ и $l_2 : J_2 \rightarrow M^n$ считают C^k -эквивалентными, если существует

такой C^k -диффеоморфизм $\gamma : J_1 \rightarrow J_2$, что $l_1 = l_2 \circ \gamma$ на J_1 . Класс C^k -эквивалентных C^k -путей называют C^k -кривой в M^n , каждый путь этого класса — параметризацией данной кривой. C^k -кривая L однозначно определяется любым своим путем l . В каждой локальной системе координат C^k -путь l задается уравнениями:

$$x^h = x^h(t), \quad t \in J, \quad x^h(t) \in C^k.$$

Точка $M(t)$ называется геодезической точкой C^2 -кривой L риманова C^r -пространства V^n , ($r \geq 2$), если касательный к L вектор

$$\eta^h(t) = \frac{dx^h}{dt}$$

удовлетворяет в этой точке условию

$$(1) \quad \eta^h_{;\alpha} \eta^\alpha \equiv \frac{d\eta^h}{dt} + \Gamma^h_{\alpha\beta} \eta^\alpha \eta^\beta = \rho \eta^h,$$

где инвариант ρ зависит только от t . Если C^2 -кривая L риманова C^r -пространства V^n , ($r \geq 2$) состоит лишь из геодезических точек, то она называется геодезической линией этого пространства.

Соотношения (1) говорят о том, что кривая L является геодезической тогда и только тогда, когда касательный вектор к ней коллинеарен вдоль нее. В любом римановом пространстве V^n класса C^r ($r > 1$) через каждую точку M_0 в каждом направлении η_0^h можно провести геодезическую линию и притом только одну (см., например, [3]).

Предположим, что между римановыми C^r -пространствами V^n и \overline{V}^n ($n \geq 1$, $r > 1$) установлен C^r -диффеоморфизм. Если при этом все геодезические линии пространства V^n переходят в геодезические линии пространства \overline{V}^n , то говорят, что данный C^r -диффеоморфизм является геодезическим отображением (глобально, в целом) риманова пространства V^n на риманово пространство \overline{V}^n .

Чаще, однако, рассматривают локальные геодезические отображения римановых пространств. Пусть отображение f ,

определенное в некоторой окрестности U точки M_0 риманова C^r -пространства V^n ($n \geq 1, r > 1$) C^r -диффеоморфно переводит эту окрестность в окрестность \bar{U} некоторого C^r -пространства \bar{V}^n так, что при этом все геодезические линии, содержащиеся в окрестности U , переходят в геодезические линии окрестности \bar{U} . Тогда f есть отображение, геодезическое в окрестности точки M_0 . Если такие отображения можно определить для некоторой окрестности каждой точки пространства V^n , то говорят, что V^n локально допускает геодезические отображения.

Очевидно, всякое геодезическое отображение пространства V^n на пространство \bar{V}^n является и локальным геодезическим отображением. Более того, из определения геодезического отображения тотчас же вытекает, что C^r -диффеоморфизм между римановыми C^r -пространствами V^n и \bar{V}^n , являющийся локальным геодезическим отображением, будет и геодезическим отображением V^n на \bar{V}^n в целом. Существуют, однако, широкие классы римановых пространств, локально допускающих нетривиальные (отличные от аффинных) геодезические отображения, но не допускающие таких отображений в целом [4].

Пусть координатная окрестность U C^r -пространства V^n ($n > 1, r > 1$) C^r -диффеоморфна некоторой координатной окрестности \bar{U} C^r -пространства \bar{V}^n . Доказано (см., например, [6]), что этот C^r -диффеоморфизм тогда и только тогда будет геодезическим отображением U на \bar{U} , когда в общей по отображению системе координат выполняются условия:

$$(2) \quad \bar{g}_{ij,k} = 2\psi_k \bar{g}_{ij} + \psi_i \bar{g}_{kj} + \psi_j \bar{g}_{ki}.$$

Здесь \bar{g}_{ij} — метрический тензор пространства \bar{V}^n , ψ_i — некоторый ковектор, ковариантное дифференцирование производится в пространстве V^n . Равенство (2) инвариантно относительно выбора локальной системы координат.

В соответствии с приведенными выше определениями, соотношение (2), очевидно, можно использовать и для изучения

геодезических отображений римановых пространств в целом: для того, чтобы C^r -диффеоморфизм между C^r -пространствами V^n и \overline{V}^n ($n \geq 2, r > 1$) был геодезическим отображением V^n на \overline{V}^n необходимо и достаточно, чтобы в окрестности каждой точки пространства V^n в общей по отображению системе координат выполнялись условия (2).

Фигурирующий в (2) ковектор ψ_i определяет рассматриваемое геодезическое отображение. Так как в каждом римановом пространстве V^n

$$\Gamma_{i\alpha}^\alpha = \frac{1}{2} \partial_i \ln |g|,$$

где $g = \det \|g_{ij}\| (\neq 0)$, то

$$(3) \quad \psi_i = \frac{1}{2(n+1)} \partial_i \ln \left| \frac{\overline{g}}{g} \right|,$$

где $\overline{g} = \det \|\overline{g}_{ij}\| (\neq 0)$. В силу того, что $\frac{\overline{g}}{g}$ при преобразовании координат представляет собой инвариант, ковектор градиентен: $\psi_i = \partial_i \psi$. При $\psi_i \equiv 0$ геодезическое отображение вырождается в аффинное и, как уже говорилось, считается тривиальным, при ψ_i не совпадающем тождественно с нулем — нетривиальным.

Если пространство V^n не допускает (локально или глобально) нетривиальных геодезических отображений, то говорят, что оно (локально или глобально) геодезически однозначно определено в том смысле, что его объект аффинной связности единственным образом определяется совокупностью его геодезических линий.

C^r -диффеоморфные римановы C^r -пространства V^n и \overline{V}^n , как и C^r -диффеоморфные окрестности этих пространств, всегда можно отнести к общему по рассматриваемому диффеоморфизму атласу, то есть, фактически, считать, что метрические тензоры g_{ij} и \overline{g}_{ij} определены на одном и том же C^r -многообразии M^n (некоторой его окрестности). Поэтому вопрос о том, допускает ли данное V^n локально или глобально

нетривиальные геодезические отображения, сводится к вопросу существования в некоторой окрестности каждой точки V^n или на всем V^n симметричного неособенного C^{r-1} -тензора \bar{g}_{ij} и C^{r-2} -ковектора $\psi_i (\neq 0)$, удовлетворяющих уравнениям (2), (3). Следовательно, в заданном римановом пространстве V^n (2) и (3) образуют основную систему уравнений теории геодезических отображений (в форме Леви-Чивиты). Это система нелинейных дифференциальных уравнений в ковариантных производных первого порядка относительно компонент тензора \bar{g}_{ij} , не являющаяся системой типа Коши. В общем случае такие системы не допускают эффективного исследования регулярными методами на предмет существования и единственности их решений.

Положив

$$(4) \quad a_{ij} = e^{2\psi} \bar{g}^{\alpha\beta} g_{\alpha i} g_{\beta j},$$

$$(5) \quad \lambda_i = -e^{2\psi} \psi_{\alpha} \bar{g}^{\alpha\beta} g_{\beta i},$$

$$(6) \quad \mu = e^{2\psi} [(n+1)\psi_{\alpha} \psi_{\beta} - \psi_{\alpha, \beta}] \bar{g}^{\alpha\beta},$$

Н. С. Синюков перешел [3] к эквивалентной системе дифференциальных уравнений, допускающей регулярные методы исследования. Точнее, им было доказано, что для того, чтобы риманово C^r -пространство V^n ($n \geq 2, r > 3$) допускало нетривиальные геодезические отображения, необходимо и достаточно, чтобы система дифференциальных уравнений

$$(7) \quad a_{ij, k} = \lambda_i g_{jk},$$

$$(8) \quad n\lambda_{i, k} = \mu g_{ik} + a_{\alpha i} R_{.k}^{\alpha} - a_{\alpha\beta} R_{ik}^{\alpha\beta},$$

$$(9) \quad (n-1)\mu_{, k} = 2(n-1)\lambda_{\alpha} R_{.k}^{\alpha} + a_{\alpha\beta} \left(2R_{.k, .}^{\alpha\beta} - R_{.., k}^{\alpha\beta} \right),$$

имела в этом пространстве решение относительно симметричного неособенного дважды ковариантного C^{r-1} -тензора a_{ij} , ковариантного C^{r-2} -вектора $\lambda_i (\neq 0)$ и C^{r-3} -инварианта μ .

Система (7)–(9) первого порядка, типа Коши, линейная, с однозначно определенными пространством V^n коэффициентами. Ковектор λ_i , удовлетворяющий уравнениям системы (7)–(9), градиентен:

$$(10) \quad \lambda_i = \partial_i \lambda,$$

где, с точностью до постоянной, $\lambda = \frac{1}{2} a_{,\gamma}^\gamma$

$$\mu \equiv \lambda_{,\alpha}^\alpha \equiv g^{ij} \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_i \partial x^j} - \lambda_\alpha \Gamma_{ij}^\alpha \right).$$

По известному решению системы (7)–(9) метрический тензор \bar{g}_{ij} пространства \bar{V}^n , на которое в силу наличия этого решения, рассматриваемое пространство V^n допускает нетривиальное геодезическое отображение, находится из соотношений, обратных к (4)–(6). Именно, из (4) и (5) вытекает, что

$$(11) \quad \psi_i = -\lambda_\alpha a^{\alpha\beta} g_{\beta i} = \frac{1}{2} \partial_i \ln \left| \frac{\tilde{g}}{g} \right|,$$

где $a^{\alpha\beta}$ — элементы матрицы, обратной к $\|a_{ij}\|$, $\tilde{g} = \det \|a_{ij}\|$. Значит, с точностью до постоянной

$$\psi = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\tilde{g}}{g} \right|$$

и в силу (4),

$$(12) \quad \bar{g}_{ij} = e^{2\psi} a^{\alpha\beta} g_{\alpha i} g_{\beta j}.$$

Соотношения перехода (4)–(6) и (11)–(12) показывают, что система (7)–(9), подобно системе основных уравнений в форме Леви-Чивиты, характеризует как локальные геодезические отображения, так и геодезические отображения в целом. Ее решения носят тогда соответственно локальный или глобальный характер.

Применение известной теоремы Грина [2,5] позволяет доказать, что справедлива

Теорема 1. *Геодезическое отображение в целом компактного, ориентируемого, с положительно определенной метрикой риманова C^r -пространства V^n ($n > 1, r > 2$) на риманово C^r -пространство $\overline{V^n}$ тривиально, если имеет место неравенство*

$$(13) \quad \int_{V^n} e^{4\psi} \overline{g}^{\alpha\beta} \overline{g}^{\gamma\sigma} T_{\alpha\gamma\sigma\beta} dv \geq 0,$$

где

$$(14) \quad T_{\alpha\gamma\sigma\beta} = g_{\gamma\beta} R_{\alpha\sigma} - R_{\alpha\gamma\sigma\beta}.$$

Доказательство. Для решения $a_{ij}, \lambda_i (\neq 0), \mu$ системы (7)–(9), отвечающего определенному некоторым ковектором $\psi_i (\neq 0)$ нетривиальному геодезическому отображению в целом рассматриваемого пространства V^n на C^r -пространство $\overline{V^n}$, в соответствии с уравнениями системы (7)–(9) имеют место соотношения:

$$(\lambda^i a^{\cdot\gamma}_{\cdot\gamma})_{,i} = \mu a^{\cdot\gamma}_{\cdot\gamma} + 2\lambda_\alpha \lambda^\alpha,$$

$$(\lambda_\alpha a^{\alpha i}_{\cdot\cdot})_{,i} = \frac{1}{n} \mu a^{\cdot\gamma}_{\cdot\gamma} + \frac{1}{n} a^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot} a^{\cdot\gamma\sigma}_{\cdot\cdot} T_{\alpha\gamma\sigma\beta} + (n+1) \lambda_\alpha \lambda^\alpha.$$

Но по теореме Грина

$$\int_{V^n} (\lambda^i a^{\cdot\gamma}_{\cdot\gamma})_{,i} dv = 0; \quad \int_{V^n} (\lambda_\alpha a^{\alpha i}_{\cdot\cdot})_{,i} dv = 0.$$

Следовательно,

$$(15) \quad \int_{V^n} \mu a^{\cdot\gamma}_{\cdot\gamma} dv = -2 \int_{V^n} \lambda_\alpha \lambda^\alpha dv,$$

$$(16) \quad \int_{V^n} \mu a^{\cdot\gamma}_{\cdot\gamma} dv + \int_{V^n} a^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot} a^{\cdot\gamma\sigma}_{\cdot\cdot} T_{\alpha\gamma\sigma\beta} dv + n(n+1) \int_{V^n} \lambda^\alpha \lambda_\alpha dv = 0.$$

Подставив (15) в (16) и приведя подобные члены, найдем:

$$(17) \quad \int_{V^n} a^{\alpha\beta} a^{\gamma\sigma} T_{\alpha\gamma\sigma\beta} dv + (n-1)(n+2) \int_{V^n} \lambda_\alpha \lambda^\alpha dv = 0.$$

Когда

$$(18) \quad \int_{V^n} a^{\alpha\beta} a^{\gamma\sigma} T_{\alpha\gamma\sigma\beta} dv \geq 0,$$

(17) возможно лишь при $\lambda_i \equiv 0$. Значит, в этом случае отображение пространства V^n не может быть нетривиальным. Подставив в (18) вместо тензора a^{ij} его выражение через метрический тензор \bar{g}_{ij} пространства V^n (формулы (4)) мы перейдем к неравенству (13). \square

Из этой теоремы непосредственно вытекает

Теорема 2. *Компактные, ориентируемые, с положительно определенной метрикой римановы C^r -пространства V^n ($n > 1$, $r > 2$), в которых для произвольного симметричного тензора b^{ij} имеет место неравенство*

$$b^{\alpha\beta} b^{\gamma\sigma} T_{\alpha\gamma\sigma\beta} \geq 0$$

в целом не допускают нетривиальных геодезических отображений.

Известно [4], что обладающие положительно определенной метрикой компактные пространства постоянной неположительной кривизны в целом не допускают нетривиальных геодезических отображений. Подчеркнем, что такие пространства удовлетворяют и условиям теоремы 2. В самом деле, в этом случае

$$T_{ijkl} = -k (ng_{jl}g_{ik} - g_{jk}g_{il})$$

и для произвольного симметричного тензора b^{ij}

$$b^{il}b^{jk}T_{ijkl} = -k \left(nb_{\alpha\beta} b^{\alpha\beta} - (b^\gamma{}_\gamma)^2 \right).$$

Но $nb_{\alpha\beta}b^{\alpha\beta} - (b^\gamma{}_\gamma)^2 \geq 0$, если метрика рассматриваемого пространства положительно определена. Значит, при $k \leq 0$

$$b^{il}b^{jk}T_{ijkl} \geq 0$$

для любого симметричного тензора b^{ij} .

Теорема 3. *Компактные, ориентируемые, с положительно определенной метрикой римановы C^r -пространства V^n ($n > 1$, $r > 2$), в которых для произвольного симметричного тензора b^{ij} справедливо неравенство*

$$(19) \quad b^{\alpha\beta}b^{\gamma\sigma}R_{\alpha\gamma\sigma\beta} \leq 0$$

в целом не допускают нетривиальных геодезических отображений.

Доказательство. Предположим, в удовлетворяющем условиям теоремы 3 пространстве V^n $b^{\alpha\beta}b^{\gamma\sigma}R_{\alpha\gamma\sigma\beta} \leq 0$ для любого симметричного тензора b^{ij} . Положим $b^{ij} = p^iq^j + p^jq^i$, где

$$g_{ij}p^iq^j = 0, \quad g_{ij}p^ip^j = g_{ij}q^iq^j = 1.$$

(Для каждой точки пространства V^n векторы p^i, q^j , удовлетворяющие этим условиям хотя бы в данной точке V^n , можно выбрать всегда [56]). Тогда

$$\begin{aligned} R_{\alpha\gamma\sigma\beta}b^{\alpha\beta}b^{\gamma\sigma} &= R_{\alpha\gamma\sigma\beta} \left(p^\alpha q^\beta + p^\beta q^\alpha \right) \left(p^\gamma q^\sigma + p^\sigma q^\gamma \right) = \\ &= R_{\alpha\gamma\sigma\beta} p^\alpha p^\sigma q^\beta q^\gamma + R_{\alpha\gamma\sigma\beta} p^\gamma p^\beta q^\alpha q^\sigma = \\ &= -2R_{\alpha\gamma\sigma\beta} p^\alpha p^\beta q^\gamma q^\sigma. \end{aligned}$$

Отсюда, в силу (19), получим

$$(20) \quad R_{\alpha\gamma\sigma\beta} p^\alpha p^\beta q^\gamma q^\sigma \geq 0$$

В произвольной точке исследуемого пространства V^n рассмотрим теперь единичный вектор p^i и $(n-1)$ единичных векторов $q^i_{(1)}, q^i_{(2)}, \dots, q^i_{(n-1)}$, ортогональных вектору p^i и между собой. (Их также можно выбрать всегда [6]). Из (20) вытекает,

что $R_{\alpha\gamma\sigma\beta}p^\alpha p^\beta q_{(a)}^\gamma q_{(a)}^\sigma \geq 0$, $a = \overline{1, n-1}$. Кроме того, очевидно, $R_{\alpha\gamma\sigma\beta}p^\alpha p^\beta p^\gamma p^\sigma \equiv 0$. Следовательно,

$$(21) \quad R_{\alpha\gamma\sigma\beta}p^\alpha p^\beta \left(p^\gamma p^\sigma + \sum_{a=1}^{n-1} q_{(a)}^\gamma q_{(a)}^\sigma \right) \geq 0.$$

С другой стороны, известно (см., например, [8]), что

$$p^\gamma p^\sigma + \sum_{a=1}^{n-1} q_{(a)}^\gamma q_{(a)}^\sigma = g^{\gamma\sigma}.$$

Поэтому (21) означает, что

$$(22) \quad R_{\alpha\beta}p^\alpha p^\beta \geq 0$$

для произвольного единичного вектора p^i . Так как метрика рассматриваемого пространства положительно определена, (22) имеет место не только для произвольного единичного, но и вообще для любого вектора p^i в каждой точке пространства V^n . Но тогда для произвольного симметричного тензора b^{ij} в каждой точке пространства V^n

$$R_{\alpha\beta}g_{\gamma\sigma}b^{\alpha\gamma}b^{\beta\sigma} \geq 0.$$

В самом деле, в произвольной точке V^n две формы $g_{\gamma\sigma}$ и $R_{\gamma\sigma}$ ($g_{\gamma\sigma}$ положительно определена) можно одновременно привести к диагональному виду [1]. Тогда

$$R_{\alpha\beta}g_{\gamma\sigma}b^{\alpha\gamma}b^{\beta\sigma} = \sum_{i=1}^n R_{ii} (b^{ii})^2 \geq 0$$

в силу (21).

Теперь очевидно, что в рассматриваемом пространстве V^n

$$T_{\alpha\gamma\sigma\beta}b^{\alpha\beta}b^{\gamma\sigma} = (g_{\gamma\beta}R_{\alpha\sigma} - R_{\alpha\gamma\sigma\beta})b^{\alpha\beta}b^{\gamma\sigma} \geq 0.$$

По теореме 1 такие пространства в целом не допускают нетривиальных геодезических отображений. \square

В [7] И. Сато исследовал свойства так называемых римановых пространств "отделимой", кривизны, тензор Римана которых удовлетворяет соотношениям

$$R_{ijkl} = \sigma S_{ij} S_{kl},$$

где σ — ненулевая постоянная, S_{ij} — некоторый кососимметрический тензор. При этом, в частности, на такие пространства накладывались условия компактности, ориентируемости, положительной определенности метрики.

Нетрудно убедиться в том, что при $\sigma \leq 0$ компактные, ориентируемые, с положительно определенной метрикой римановы пространства "отделимой" кривизны удовлетворяют условиям теоремы 3 и, значит, в целом не допускают нетривиальных геодезических отображений.

Справедливость известной теоремы Грина для векторных полей с компактным носителем, заданных и на некомпактных ориентированных многообразиях с фиксированным элементом объема [2], позволяет распространить доказанные теоремы 1—3 и на некомпактные римановы пространства.

В частности, справедливы следующие теоремы.

Теорема 4. *Ориентируемые, с положительно определенной метрикой римановы C^r -пространства V^n ($n > 1$, $r > 2$), в которых для произвольного симметричного тензора b^{ij} справедливо неравенство*

$$b^{\alpha\beta} b^{\gamma\sigma} T_{\alpha\gamma\sigma\beta} \geq 0,$$

в целом не допускают нетривиальных геодезических отображений, для которых ковектор ψ_i имеет компактный носитель.

Теорема 5. *Ориентируемые, с положительно определенной метрикой римановы C^r -пространства V^n ($n > 1$, $r > 2$), в которых для произвольного симметричного тензора b^{ij} справедливо неравенство*

$$b^{\alpha\beta} b^{\gamma\sigma} R_{\alpha\gamma\sigma\beta} \leq 0$$

в целом не допускают нетривиальных геодезических отображений, для которых ковектор ψ_i имеет компактный носитель.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц // М.: Гостехиздат, 1953, 419 с.
- [2] Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии, т. I. // М.: Наука, 1981, 344 с.
- [3] Синюков Н.С. Геодезические отображения римановых пространств, // М.: Наука, 1979, 255 с.
- [4] Синюкова Е.Н. О геодезических отображениях некоторых специальных римановых пространств, // Матем. заметки — 1981 — **30**, вып.6, с. 889—894
- [5] Степанов С.Е. Теоремы исчезновения в аффинной, римановой и лоренцевой геометриях // Фундаментальная и прикладная математика — 2005 — т. 11 — **1**, с. 35—84
- [6] Эйзенхарт Л. П. Риманова геометрия, М.: ИЛ, 1948, 316 с.
- [7] Sato I. On Riemannian manifolds of separated curvature // Tohoku Math. J. — 1960. — **2**. — Рр.23—34.
- [8] Яно К., Бохнер С. Кривизна и числа Бетти // М., ИЛ, 1957, 152 с.

С. Е. Степанов

*Финансовая Академия при правительстве Российской
Федерации, Москва
E-mail: stepanov@vtsnet.ru*

И. А. Гордеева

*Владимирский государственный гуманитарный
университет, Владимир
E-mail: igordeeva@list.ru*

О существовании псевдокиллинговых и псевдогармонических векторных полей на многообразиях Римана-Картана

Приведена классификация многообразий Римана-Картана. изучены геометрические свойства некоторых из выделенных классов многообразий Римана-Картана. Получены условия, которые препятствуют существованию псевдокиллинговых и псевдогармонических векторных полей на многообразиях Римана-Картана некоторых классов.

Ключевые слова: *многообразия Римана-Картана, псевдокиллинговые и псевдогармонические векторные поля*

1. ВВЕДЕНИЕ

Метрически-аффинным пространством называется триплет $(M, g, \bar{\nabla})$, где M – дифференцируемое многообразие размерности $n > 1$ с метрикой g некоторой сигнатуры и линейной связностью $\bar{\nabla}$ с ненулевым кручением S , которая, вообще говоря, не зависит от g . Именно эти пространства в последние полвека стали объектом интенсивного изучения в теоретической физике, свидетельством чему сотни опубликованных статей.

© С. Е. Степанов, И. А. Гордеева, 2009

Напротив, в дифференциальной геометрии только частные виды метрически-аффинного пространства $(M, g, \bar{\nabla})$ время от времени попадали в поле зрения ученых, о чем мы скажем ниже, но в целом геометрия $(M, g, \bar{\nabla})$ никогда не вызывала их активного интереса.

Начало теории метрически-аффинных пространств было положено Картаном (см. [1]), предложившим вместо связности Леви-Чивита ∇ в GRT (General Relativity Theory) рассматривать несимметричную линейную связность $\bar{\nabla}$, обладающую свойством метричности $\bar{\nabla}g = 0$.

В результате пространство-время получало в дополнение к кривизне еще и кручение. В последствие им было опубликовано еще две работы (см. [2], [3]) в развитие своей теории, которая получила название Einstein-Cartan Theory of Gravity или сокращенно ЕСТ (см. [4]). Результаты Картана нашли отражение в известных монографиях по дифференциальной геометрии первой половины прошлого века (см. [5], [6]).

Вплоть до начала 60-х годов идея Картана не находила поддержки у физиков-теоретиков. Толчком к изучению ЕСТ послужили работы Кибла (см. [7]) и Сциямы (см. [8]), которые независимо друг от друга установили связь между кручением S связности $\bar{\nabla}$ и спин тензором материи s (spin tensor of matter). В последствие были открыты и другие физические приложения ЕСТ (см. [9], [10]).

В последствие теория Эйнштейна-Картана была обобщена за счет снятия требования метричности для линейной связности $\bar{\nabla}$. Новая теория получила название Metric-Affine Gauge Theory of Gravity или сокращенно MAG (см. [11], [12]). Число работ, опубликованных в рамках ЕСТ исчисляется сотнями, а в рамках MAG уже десятками.

Опубликованные результаты имеют в большей степени прикладной физический характер. Все исходные формулы были

позаимствованы физиками из работ Картана вместе с его методом, который сейчас так и называется “метод внешних форм Картана”.

Также нетрудно проследить заимствования и из монографий по дифференциальной геометрии, например, из известной монографии Схоутена и Стройка (см. [6]). В этом контексте характерна работа Мак Креа (см. [13]), где были выведены неприводимые относительно действия псевдоортогональной группы разложения тензоров неметричности $Q = -\bar{\nabla}g$, кручения S и кривизны \bar{R} связности $\bar{\nabla}$, основные соотношения на которые были приведены еще в монографии Схоутена и Стройка.

В свою очередь, идею своей статьи Мак Креа также позаимствовал из дифференциальной геометрии, где уже давно и хорошо известны неприводимые разложения тензоров кривизны R риманова и келерова многообразий.

Воспользовавшись результатом Мак Креа, целый коллектив авторов (см. [14]) так же как это делалось не раз в римановой геометрии, но по другим поводам (см., например, [15]; [17], стр. 586–620), за счет последовательного по-парного обращения в нуль неприводимых компонент разложения тензора кручения S выделил 3 класса пространств $(M, g, \bar{\nabla})$.

Первый класс \mathcal{A} характеризуется условием

$$S = (n - 1)^{-1} \text{trace } S \wedge Id_{TM},$$

второй класс \mathcal{B} — условием $S = \text{Alt } S$ и, наконец, третий класс \mathcal{C} характеризуется следующим строением тензора кручения

$${}^c S = S - \mathcal{A}S - \mathcal{B}S$$

для произвольной $x \in M$.

Также в этой статье была проведена систематизация результатов, полученных в рамках ЕСТ для четырехмерного пространства $(M, g, \bar{\nabla})$. Заметим, что в отличие от геометрической традиции (см., например, [17], стр. 585-620) наряду с классами \mathcal{A} , \mathcal{B} и \mathcal{C} пространств к рассмотрению не были привлечены классы $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \oplus \mathcal{C}$ и $\mathcal{B} \oplus \mathcal{C}$.

На контрасте со все увеличивающимся потоком работ физиков, геометры к настоящему времени почти потеряли интерес к теории, основы которой заложил еще в двадцатых годах прошлого века известный геометр Картан. Наиболее яркими и, к сожалению, последними результатами геометрической теории пространств $(M, g, \bar{\nabla})$ являются результаты Ванхекке и Тричерри по геометрии “многообразий с однородной структурой”.

В принятой современной физикой терминологии эта теория называется Riemann-Cartan Theory или сокращенно RCT. Геометрия Римана-Картана это геометрия метрически-аффинного пространства $(M, g, \bar{\nabla})$, с положительно определенной (римановой) метрикой g и линейной связностью $\bar{\nabla}$ с ненулевым кручением S такой, что $Q = 0$, $\bar{\nabla}R = 0$ и $\bar{\nabla}T = 0$.

Ванхекке и Тричерри ([16]) получили неприводимое относительно действия ортогональной группы разложение тензора деформации $T = \bar{\nabla} - \nabla$ и использовали его для классификации пространств $(M, g, \bar{\nabla})$, а затем в других работах ими была изучена геометрия пространств из выделенных 6 классов.

Из всех видов аффинно-метрических пространств $(M, g, \bar{\nabla})$ в геометрии последовательно в течение длительного времени изучались только “четверть-симметрические метрические пространства”, и их частный вид “полусимметрические метрические пространства”, (см. [18]-[22]).

Четверть-симметрические метрические пространства существуют в рамках RCT и ECT и выделяются дополнительным условием

$$T(X, Y) := U(X)p(Y) - V(Y)p(X) - g(U(X), Y)W,$$

где

$$g(U(X), Y) = (Sym F)(X, Y), g(V(X), Y) = (Alt F)(X, Y)$$

для некоторого ковариантного 2-тензора F и $p(X) := g(W, X)$.

Полусимметрические метрические пространства определяются, в свою очередь, условием

$$T(X, Y) := U(Y)X - U(X)Y$$

для любых векторных полей X и Y на M .

Геометрия “в целом”, метрически-аффинных пространств застыла на результатах Яно, Бохнера и Гольдберга (см. [23]-[25]) середины прошлого века. В их работах в рамках РСТ доказывались “теоремы исчезновения”, (vanishing theorems) для псевдокиллинговых и псевдогармонических векторных полей и тензоров на компактных пространствах $(M, g, \overline{\nabla})$, выделяемых условием $\text{trace } S = 0$.

Даже не смотря на последующие попытки обобщения их результатов за счет введения в рассмотрение компактных метрически-аффинных пространств с границей (см. [26]) это, по-прежнему, было доказательство тех же теорем исчезновения для тех же векторных полей и тензоров.

При этом сформулированные в “теоремах исчезновения”, (vanishing theorems) условия препятствия существованию псевдокиллинговых и псевдогармонических векторных полей и тензоров поражают своей громоздкостью, в отличие от теорем для киллинговых и гармонических векторных полей и тензоров на римановых многообразиях. При этом следует особо отметить, что геометрия таких векторов и тензоров ни до, ни после цитируемых нами работ никем не изучалась.

нам удалось наметить пути модернизации этой техники, при этом первые полученные результаты, анонсированные на Международной конференции “Геометрия в Одессе – 2008” и на Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам в Суздале в 2008 году (см [27], [28]), имеют геометрически содержательный и компактный вид, что внушает уверенность в правильности выбранного направления исследований.

В настоящей статье будут изложены некоторые геометрические свойства некоторых классов пространств Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$, которые до сих пор не попали в поле зрения геометров и условия, препятствующие их существованию.

Кроме того, нами были получены условия препятствия существования псевдокиллинговых и псевдогармонических векторных полей на многообразиях Римана-Картана отдельных классов.

2. МНОГООБРАЗИЕ РИМАНА-КАРТАНА

2.1. Многообразие Римана-Картана определяется (см. [12]) как триплет $(M, g, \bar{\nabla})$, где M - n -мерное ($n \geq 2$) многообразие с положительно определенным метрическим тензором g_{ij} и линейной несимметрической связностью $\bar{\nabla}$ с коэффициентами $\bar{\Gamma}_{jk}^i$ такой, что

$$\bar{\nabla}_k g_{ij} = \partial_k g_{ij} - g_{lj} \bar{\Gamma}_{ik}^l - g_{il} \bar{\Gamma}_{jk}^l = 0, \quad (2.1)$$

где $\partial_k = \partial/\partial x^k$, в локальной системе координат x^1, x^2, \dots, x^n на M . Поскольку связность $\bar{\nabla}$ не предполагается симметричной, то для нее определен тензор кручения связности S с компонентами $S_{ij}^k = 2^{-1}(\bar{\Gamma}_{ij}^k - \bar{\Gamma}_{ji}^k)$.

Коэффициенты связности $\bar{\nabla}$ выражаются через символы Кристоффеля Γ_{jk}^i связности Леви-Чивита ∇ посредством равенства (см. [25], стр. 78)

$$\bar{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + S_{ij}^k - S_{ij}^k - S_{ji}^k. \quad (2.2)$$

Наряду с тензором кручения S связности $\bar{\nabla}$ определяется тензор деформации $T = \bar{\nabla} - \nabla$ связности ∇ в связность $\bar{\nabla}$, чьи компоненты $T_{ij}^k = \bar{\Gamma}_{ij}^k - \Gamma_{ij}^k$ имеют связь с компонентами тензора кручения S , выражающуюся равенствами (2.2) и $S_{ij}^k = 2^{-1}(T_{ij}^k - T_{ji}^k)$. Из них, в частности, следует, что

$$T_{il}^l = 2S_{il}^l. \quad (2.3)$$

Одновременно из (2.1) выводим, что

$$T_{ikj} + T_{jki} = 0. \quad (2.4)$$

Известны также уравнения, связывающие компоненты тензоров кривизны \overline{R} и R , Риччи \overline{Ric} и Ric и скалярные кривизны \overline{Scal} и $Scal$ связностей $\overline{\nabla}$ и ∇ , вида (см. [14]; [25], стр. 80)

$$\overline{R}_{ijk}{}^l = R_{ijk}{}^l + \nabla_i T_{kj}{}^l - \nabla_j T_{ki}{}^l + T_{mi}{}^l T_{kj}{}^m - T_{mj}{}^l T_{ki}{}^m, \quad (2.5)$$

$$\overline{R}_{jk} = R_{jk} + \nabla_l T_{kj}{}^l - \nabla_j T_k{} - T_m T_{kj}{}^m - T_{mj}{}^l T_{kl}{}^m, \quad (2.6)$$

$$\overline{Scal} = Scal - 2\nabla_j T^j - T_{ijk} T^{kij} - T_j T^j, \quad (2.7)$$

где $T^j = g^{kl} T_{jkl}$.

2.2. Если предположить, что многообразие M – компактное и ориентированное с элементом объема

$$dv = \sqrt{\det g} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n,$$

тогда будет справедливой теорема Грина (см. [25], стр. 30)

$$\int_M (div \xi) dv = 0.$$

Здесь на основании (2.3) имеем

$$div \xi = \overline{\nabla}_i \xi^i = \nabla_i \xi^i + 2\xi^k S_{kj}^i,$$

а потому на многообразиях Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ класса $\mathcal{B} \oplus \mathcal{C}$ и только на них справедливы равенства

$$div \xi = trace \overline{\nabla} \xi = trace \nabla \xi$$

для любого векторного поля ξ .

Можно определить также полные скалярные кривизны

$$Scal(M) = \int_M Scal dv$$

и

$$\overline{Scal}(M) = \int_M \overline{Scal} dv$$

многообразия $(M, g, \bar{\nabla})$. При этом на основании теоремы Грина из равенств (2.7) выводится уравнение связи

$$\overline{Scal}(M) = Scal(M) - \int_M (T_{ijk}T^{kij} + 4\|trace S\|^2)dv. \quad (2.8)$$

Для многообразий Римана-Картана $(M, g, \bar{\nabla})$ класса $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ условия связи (2.7) принимают следующий вид:

$$\overline{Scal}(M) = Scal(M) - 4\nabla_j S^j - 3S_{ijk}S^{ijk} - 2(2n-5)(n-1)^{-1}S_j S^j.$$

Данное равенство на основании теоремы Грина приводится к виду

$$\overline{Scal}(M) = Scal(M) - \int_M (3\|S\|^2 + 2(2n-5)(n-1)^{-1}\|trace S\|^2)dv.$$

А потому при $n \geq 3$ существует препятствие для задания несимметрической метрической связности $\bar{\nabla}$ класса $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ на римановом многообразии (M, g) в виде условия на полные скалярные кривизны $\overline{Scal}(M) \geq Scal(M)$ связностей $\bar{\nabla}$ и ∇ , причем равенство выполняется только в случае их совпадения: $\bar{\nabla} = \nabla$.

Также заметим, что из (2.7) для многообразий $(M, g, \bar{\nabla})$ класса \mathcal{B} имеет место равенство $\overline{Scal} = Scal - \|T\|^2$. А потому существует ограничение для задания несимметрической метрической связности $\bar{\nabla}$ класса \mathcal{B} на римановом многообразии (M, g) в виде условия на скалярные кривизны $\overline{Scal} \geq Scal$ связностей $\bar{\nabla}$ и ∇ , причем равенство выполняется только в случае их совпадения: $\bar{\nabla} = \nabla$.

Для многообразий Римана-Картана $(M, g, \bar{\nabla})$ класса \mathcal{A} из (2.7) имеем

$$\overline{Scal} = Scal - 4(\nabla_j S^j + n(n-1)^{-1}S_j S^j).$$

В этом случае для компактного многообразия M уравнения связи (2.8) принимают следующий вид:

$$\overline{Scal}(M) = Scal(M) - 4n(n-1)^{-1} \int_M \|trace S\|^2 dv.$$

А потому существует препятствие для задания несимметрической метрической связности $\overline{\nabla}$ класса \mathcal{A} на римановом многообразии (M, g) в виде условия на полные скалярные кривизны $\overline{Scal}(M) \geq Scal(M)$ связностей $\overline{\nabla}$ и ∇ , причем равенство выполняется только в случае их совпадения: $\overline{\nabla} = \nabla$.

3. ПСЕВДОКИЛЛИНГОВОЕ ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ

3.1. Векторное поле Киллинга ξ определяется на римановом многообразии (M, g) условием $L_\xi g = 0$ для производной Ли L_ξ по отношению к векторному полю ξ . Используя правило вычисления производной Ли (см. [25], стр. 40)

$$L_\xi g_{ij} = \xi^k \partial_k g_{ij} + g_{kj} \partial_i \xi^k + g_{ik} \partial_j \xi^k, \quad (3.1)$$

находим выражение производной Ли в связности ∇ (см. там же)

$$L_\xi g_{ij} = \nabla_i \xi_j + \nabla_j \xi_i, \quad (3.2)$$

и в несимметрической метрической связности $\overline{\nabla}$

$$L_\xi g_{ij} = \overline{\nabla}_i \xi_j + \overline{\nabla}_j \xi_i - 2(S_{kij} + S_{kji})\xi^k. \quad (3.3)$$

Векторное поле ξ на многообразии Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ называется *псевдокиллинговым* (см. [25], стр. 86), если оно удовлетворяет уравнениям

$$\overline{\nabla}_i \xi_j + \overline{\nabla}_j \xi_i = 0. \quad (3.4)$$

Из (3.2) и (3.3) выводим, что для $S_{kij} + S_{kji} = 0$ уравнения киллинговых и псевдокиллинговых векторных полей совпадают, а потому на многообразиях Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ класса \mathcal{B} каждое векторное поле Киллинга является псевдокиллинговым, верно и обратное.

Опираясь на установленный факт заключаем, что условием препятствия для существования псевдокиллинговых векторных полей на компактном многообразии $(M, g, \bar{\nabla})$ класса \mathcal{B} будет хорошо известное условие отрицательной определенности тензора Риччи Ric связности Леви-Чивита ∇ (см. [25], стр. 36).

3.2. В монографии [25] были найдены условия препятствия существованию псевдокиллинговых векторных полей на компактных многообразиях Римана-Картана $(M, g, \bar{\nabla})$ класса $\mathcal{B} \oplus \mathcal{C}$. Условия эти, в чем нетрудно убедиться, носят довольно громоздкий характер. В качестве обобщения полученных результатов (так по тексту) была доказана (см. [25], стр. 91-92) следующая теорема:

Если на компактном многообразии $(M, g, \bar{\nabla})$ с тензором кручения S , удовлетворяющим уравнениям вида $S_{ijk} - S_{ikj} + g_{ij}A_k - g_{ik}A_j = 0$, квадратичная форма $\bar{R}_{ij}\xi^i\xi^j$ является неположительно определенной, то каждое псевдокиллинговое векторное поле ξ должно иметь равные нулю ковариантные производные относительно связности $\bar{\nabla}$. Если же форма $\bar{R}_{ij}\xi^i\xi^j$ является отрицательно определенной, то не существует псевдокиллингова векторного поля, отличного от нуля.

Можно доказать, что данная теорема справедлива только для полусимметрических связностей. Проведем анализ, приведенного в теореме уравнения. Предположим, что тензор кручения S связности $\bar{\nabla}$ удовлетворяет условию

$$S_{ijk} - S_{ikj} + g_{ij}A_k - g_{ik}A_j = 0. \quad (3.5)$$

Перепишем условия (3.5) дважды:

$$S_{ijk} - S_{ikj} + g_{ij}A_k - g_{ik}A_j = 0. \quad (3.5a),$$

$$S_{jik} - S_{jki} + g_{ij}A_k - g_{jk}A_i = 0. \quad (3.5b).$$

Сложим оба уравнения, получим:

$$-S_{ikj} - S_{jki} = S_{kij} + S_{kji} = -2g_{ij}A_k + g_{ik}A_j + g_{jk}A_i.$$

В итоге имеем:

$$S_{kij} + S_{kji} = -2g_{ij}A_k + g_{ik}A_j + g_{jk}A_i. \quad (3.6)$$

Рассмотрим это уравнение совместно с уравнением (3.5)

$$S_{kij} - S_{kji} + g_{ik}A_j - g_{kj}A_i = 0. \quad (3.5c)$$

Вычитая (3.5c) из (3.6), получаем:

$$2S_{kji} = 2(-g_{ij}A_k + g_{ki}A_j)$$

или

$$S_{kji} = g_{ki}A_j - g_{ij}A_k.$$

Откуда сверткой с метрическим тензором g^{ij} находим

$$S_{kl}{}^l = S_{kji}g^{ij} = (1 - n)A_k,$$

т.е.

$$A_k = -(n - 1)^{-1}S_k,$$

где $S_k = S_{kl}{}^l$. Поэтому

$$S_{kji} = (n - 1)^{-1}(g_{ij}S_k - g_{ki}S_j)$$

или

$$S_{kj}{}^i = (n - 1)^{-1}(\delta_j^i S_k - \delta_k^i S_j),$$

что соответствует условиям полусимметрической связности.

В итоге заключаем, что в приведенной выше теореме К. Яно речь идет о многообразиях Римана-Картана $(M, g, \bar{\nabla})$ класса \mathcal{A} и только о них. А потому об обобщении, которое было заявлено, говорить не совсем корректно.

Справедлива

Теорема 1. *Если в компактном многообразии Римана-Картана $(M, g, \bar{\nabla})$ класса \mathcal{A} квадратичная форма $\bar{R}_{ij}\xi^i\xi^j$ является неположительно определенной, то каждое псевдокиллинговое векторное поле ξ должно иметь равные нулю ковариантные*

производные относительно коэффициентов аффинной связности многообразия. Если форма $\bar{R}_{ij}\xi^i\xi^j$ является отрицательно определенной, то не существует псевдокиллингова векторного поля, отличного от нуля.

4. ПСЕВДОГАРМОНИЧЕСКОЕ ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ

Векторное поле ξ называется *псевдогармоническим* (см. [25], стр. 84), если

$$\bar{\nabla}_i\xi_j - \bar{\nabla}_j\xi_i = 0, \quad \bar{\nabla}_i\xi^i = 0. \quad (4.1)$$

Притом, что с учетом равенств

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{ij}^k &= T_{ij}^k + \Gamma_{ij}^k, \\ S_{ij}^k &= 2^{-1}(T_{ij}^k - T_{ji}^k) \end{aligned}$$

и (2.3) уравнениям (4.1) можно придать следующий вид

$$\nabla_i\xi_j - \nabla_j\xi_i + 2\xi_k S_{ij}^k = 0, \quad \nabla_i\xi^i + 2\xi^k S_{ki}^i = 0. \quad (4.2)$$

Из (4.1) и (4.2) непосредственно вытекает, что совпадение псевдогармонических и гармонических векторных полей можно ожидать только на многообразиях Римана-Картана $(M, g, \bar{\nabla})$ класса $\mathcal{B} \oplus \mathcal{C}$.

В монографии [25] были найдены, условия препятствия существованию псевдогармонических векторных полей на компактных многообразиях Римана-Картана $(M, g, \bar{\nabla})$ класса $\mathcal{B} \oplus \mathcal{C}$. Условия эти, как и в случае псевдокиллинговых векторных полей, носили зачастую довольно громоздкий характер. Нами будет доказана следующая

Теорема 2. *Если на компактном многообразии Римана-Картана $(M, g, \bar{\nabla})$ класса $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ квадратичная форма $\bar{R}_{ij}\xi^i\xi^j$ является неотрицательно определенной, то каждое псевдогармоническое векторное поле ξ должно иметь равные нулю ковариантные производные относительно связности $\bar{\nabla}$. Если же форма $\bar{R}_{ij}\xi^i\xi^j$ является положительно определенной, то не*

существует псевдогармонического векторного поля, отличного от нуля.

В начале доказательства сошлемся на теорему 7.20 монографии [25], в которой утверждается, что на компактном многообразии $(M, g, \bar{\nabla})$ не может выполняться неравенство

$$(\bar{R}_{ij} + \bar{R}_{ji})\xi^i \xi^j - 2(S_{ijk} + S_{ikj} - g_{ij}B_k - g_{ik}B_j)\xi^i \bar{\nabla}^k \xi^j + (g_{jl}g_{km} + g_{jm}g_{kl})\bar{\nabla}^k \xi^j \bar{\nabla}^m \xi^l \geq 0$$

для любого векторного поля B_k и псевдогармонического векторного поля ξ , если только не имеет места соответствующее равенство. В частном случае, когда тензор кручения удовлетворяет уравнению вида

$$S_{ijk} + S_{ikj} = g_{ik}B_j + g_{ij}B_k + g_{jk}A_i, \quad (4.3)$$

приведенное выше условие запишется так

$$(\bar{R}_{ij} + \bar{R}_{ji})\xi^i \xi^j + (g_{jl}g_{km} + g_{jm}g_{kl})\bar{\nabla}^k \xi^j \bar{\nabla}^m \xi^l \geq 0 \quad (4.4)$$

и, следовательно, для неотрицательно определенной квадратичной формы $\bar{R}_{ij}\xi^i \xi^j$ из (4.4) следует, что каждое псевдогармоническое векторное поле ξ должно иметь равные нулю ковариантные производные относительно связности $\bar{\nabla}$.

С другой стороны, для положительно определенной квадратичной формы $\bar{R}_{ij}\xi^i \xi^j$ условие (4.4) выполняется автоматически и, следовательно, псевдогармонических векторных полей ξ на таком многообразии Римана-Картана $(M, g, \bar{\nabla})$ не существует.

Проведем анализ уравнений (4.3). Для этого найдем A_i и B_i , свернув (4.3) последовательно с g^{jk} , а затем с g^{ij} . Учитывая, что $S_{ijk} + S_{jik} = 0$, получим:

$$\begin{cases} 2S_i = 2B_i + nA_i \\ -S_k = (1+n)B_k + A_k \end{cases},$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} B_i &= -(n-1)S_i, \\ A_i &= 2(n-1)S_i. \end{aligned}$$

В итоге получаем равенства

$$S_{ijk} + S_{ikj} = (n-1)^{-1}(2g_{jk}S_i - g_{ik}S_j - g_{ij}S_k),$$

которые являются определяющими для многообразий Римана-Картана класса $\bar{\mathcal{V}} \in \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$.

Доказанная теорема является обобщением теоремы 7.10 (см. [25], стр. 85) на случай несимметрической метрической связности класса $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$.

В заключение сделаем одно замечание. Поскольку многообразия Римана-Картана $(M, g, \bar{\mathcal{V}})$ класса $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ включают в себя в качестве частных видов многообразия Римана-Картана $(M, g, \bar{\mathcal{V}})$ классов \mathcal{A} и \mathcal{B} , то доказанная теорема имеет место и для этих классов многообразий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Cartan E.* Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée. Part I. // Ann. Éc. Norm. – 1923. – **40**. – Pp. 325–412.
- [2] *Cartan E.* Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée. Part I. // Ann. Éc. Norm. – 1924. – **41**. – Pp. 1–25.
- [3] *Cartan E.* Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée. Part II. // Ann. Éc. Norm. – 1925. – **42**. – Pp. 17–88.
- [4] *Arkuszewski W., Korpaczynski W., Ponomarev V.N.* Matching Conditions in the Einstein-Cartan Theory of Gravitation // Commun. math. Phys. – 1975. – **45**. – Pp. 183–190.
- [5] *Эйзенхарт Л.П.* Риманова геометрия, –М.: ИЛ, 1948
- [6] *Схоутен И.А., Стройк Д.Дж.* Введение в новые методы дифференциальной геометрии, Т.1.: Пер. с нем. – М.: ИЛ, 1939. – 181 с.
- [7] *Kibble T.W.B.* Lorenz invariance and the gravitational field // J. Math. Phys. – 1961. – **2**. – Pp. 212–221.
- [8] *Sciama D.W.* On the analogy between change and spin in general relativity // Recent developments in General Relativity. – Oxford: Pergamon Press & Warszawa: PWN. – 1962. – Pp. 415–439.

- [9] *Ruggiero M.L. and Tartaglia A.* Einstein–Cartan theory as a theory of defects in space-time. // Amer. J. Phys. – 2003. – **71**. – Pp. 1303–1313.
- [10] *Penrose R.* Spinors and torsion in general relativity. // Found. of Phys., – 1983. – **13**. – Pp. 325–339.
- [11] *Hehl F.W., McCrea J.D., Mielke E.W., Ne’eman Y.* Metric-Affine Gauge Theory of Gravity: Field Equations, Noether Identities, World Spinors, and Breaking of Dilation Invariance. // Phys. Rep. – 1995. – **258**.
- [12] *Trautman A.* The Einstein–Cartan theory // Encyclopedia of Mathematical Physics // Oxford: Elsevier. – 2006. – **2**. – Pp. 189–195.
- [13] *McCrea J. D.*, Irreducible decompositions of non-metricity, torsion, curvature and Bianchi identities in metric affine space-times. // Class.Quant.Grav.–1992. – **9**. – Pp. 553–568.
- [14] *Capozziello S., Lambiase G., Stornaiolo C.* Geometric classification of the torsion tensor in space-time. // Annalen Phys. – 2001. – **10**. – Pp. 713–727.
- [15] *Gray A. and Hervella L. M.* The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants. // Ann. Mat. Pura e Appl. – 1980. – **123**. – Pp.35–58.
- [16] *Triccerri F. and Vanhecke L.* Homogeneous structures on Riemannian manifolds. // London Math. Soc. Lecture Notes Series, Cambridge Univ. Press, Cambridge. – 1983., **83**.
- [17] *Бессе А.* Многообразия Эйнштейна: В 2-х т. Т. II. Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 384 с.
- [18] *Yano K.* On semi-symmetric metric connection. // Revue Roumaine math. pur. appl. – 1970. – **15**. – Pp. 1579–1586.
- [19] *De U.C., Sengupta J.* On a type of semi-symmetric metric connection on an almost contact metric manifold. // Filomat. – 2000. – **14**. – Pp. 33–42.
- [20] *Prasad B., Verma R.K.* On a type of semi-symmetric non-metric connection on a Riemannian manifold // Bull. Calcutta Math. Soc. – 2004. – **96**. №6. – Pp.483–488.
- [21] *Uysal S.A., Laleoğlu R.Ö.* On weakly symmetric spaces with semi-symmetric metric connection // Publ. Math. – 2005. – **67**. №1–2. – Pp. 145–154.
- [22] *Yaşar E., Cöken A.C., Yücesan A.* Totally umbilical lightlike hypersurfaces in semi-Riemannian manifold with semi-symmetric metric connection // Int. J. Pure Appl. Math. – 2005. – **23**. №3. – Pp. 379–391.
- [23] *Bochner S., Yano K.* Tensor-fields in non-symmetric connections. // The Annals of Mathematics, 2nd Ser. – 1952. – **56**. №3. – Pp. 504–519.
- [24] *Goldberg S.I.* On pseudo-harmonic and pseudo-Killing vector in metric manifolds with torsion. // The Annals of Mathematics, 2nd Ser. – 1956. – **64**. №2. – Pp. 364–373.

-
- [25] Яно К., Бохнер С. Кривизна и числа Бетти.: Пер. с англ. – М.: ИЛ., 1957. – 152 с.
- [26] Kubo Y. Vector fields in a metric manifold with torsion and boundary. // Kodai Math. Sem. Rep. – 1972. – **24**. – Pp. 383–395.
- [27] Гордеева И.А. Псевдокиллинговые векторные поля на многообразиях Римана-Картана. – Тезисы докладов Международной конференции “Геометрия в Одессе” (Одесса, 19-24 мая 2008 г.), Фонд “Наука”, Одесса, – 2008. 73–75 с.
- [28] Гордеева И.А., Степанов С.Е. Теорема исчезновения для псевдогармонических векторных полей на многообразии Римана-Картана. Тезисы докладов Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 27 июня-2 июля 2008 г.), ВлГУ, Владимир, – 2008, 71–73 с.

С. Е. Степанов

*Финансовая Академия при правительстве Российской
Федерации, Москва
E-mail: stepanov@vtsnet.ru*

В. Н. Шелепова

*Владимирский государственный гуманитарный
университет, Россия
E-mail: verrochka@list.ru*

Инфинитезимальные гармонические преобразования и солитоны Риччи

Классическими методами математического анализа с использованием инфинитезимальных гармонических преобразований изучаются солитоны Риччи на некомпактных и компактных многообразиях.

Ключевые слова: *Инфинитезимальные гармонические преобразования, солитоны Риччи*

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Теория потоков Риччи на гладких многообразиях, основы которой заложил Р. С. Гамильтон в серии статей, опубликованных в 80–90-х годах прошлого века, сегодня стала невероятно популярной (см. [1]; [2] и цитируемую там литературу).

Самоподобное решение уравнений Гамильтона потока Риччи связано с наличием на многообразии так называемого солитона Риччи, который может быть рассмотрен как фиксированная “стартовая” точка этого потока (см. [1], стр.21-22; [2], стр. 154-156).

1.2. Известные результаты в теории гамильтоновых потоков Риччи, в которых присутствуют солитоны Риччи, связаны, как

правило, с требованием компактности для многообразий, на которых они рассматриваются (см. [2], стр. 128, 245, 266, 388, 514; [4], стр. 7; [5], стр. 123, 126-127 и др.).

С другой стороны список “открытых проблем” в теории гамильтоновых потоков Риччи (см. [2], стр. 265, 389-390) наряду с задачами, где присутствует условие компактности для многообразий с солитонами Риччи, включает и задачи с солитонами Риччи на некомпактных многообразиях.

Например, требуется доказать, что на некомпактном многообразии $M^n (n \geq 3)$ не существует *растягивающегося* градиентного солитона Риччи с метрикой положительно заземленной кривизны Риччи. Это дополнило бы известный результат о растягивающемся солитоне Риччи на компактном многообразии, где он является градиентным (см. [4], стр. 7; [5], стр. 126-127) с эйнштейновой метрикой отрицательной кривизны Риччи (см. [1], стр. 117; [2], стр. 353; [5], стр. 123; 127).

Притом, что аналогичные результаты для *стабильного* солитона Риччи известны как на компактном (см. там же), так и некомпактном (см. [2], стр. 364) многообразиях. В последнем случае условием препятствия для существования градиентного стабильного солитона Риччи служит положительная заземленность кривизны Риччи его метрики.

В настоящей статье мы изучим методами классического анализа солитоны Риччи, используя введенное ранее понятие инфинитезимального гармонического преобразования.

Результаты этой работы были анонсированы на двух международных конференциях (см. [12], стр. 127-128; [13], стр. 260-261).

2. Солитоны и потоки Риччи

2.1. *Солитоном Риччи* (см. [1], стр. 22; [2], стр. 353; [3]) на n -мерном ($n \geq 2$) связном дифференцируемом многообразии M^n называется решение (g_0, X_0, λ) дифференциальных уравнений

$$-2Ric_0 = L_{X_0}g_0 + 2\lambda g_0 \quad (2.1)$$

где g_0 — полная риманова метрика, X_0 — полное векторное поле, L_{X_0} — производная Ли по отношению к векторному полю X_0 и λ — некоторая постоянная.

Солитон Риччи называется *стабильным* (steady), если $\lambda = 0$, *стягивающимся* (shrinking), если $\lambda < 0$, и, наконец, *растягивающимся* (expanding), если $\lambda > 0$ (см. [1], стр. 22; [2], стр. 154; 353).

Солитон Риччи называется *градиентным* (см. [1], стр. 22; [2], стр. 154), если векторное поле X_0 является градиентом некоторой скалярной функции f . В этом случае уравнения (2.1) принимают вид

$$-Ric_0 = \nabla^0 \nabla^0 f + \lambda g_0 \quad (2.2)$$

для связности Леви-Чивита ∇^0 метрики g_0 . Для градиентного солитона Риччи принято обозначение (g_0, f, λ) .

2.2. Если на n -мерном ($n \geq 2$) связном дифференцируемом многообразии M^n задан солитон Риччи (g_0, X_0, λ) , то на включающем 0 интервале $J \subset \mathbb{R}$ существует порождаемое векторными полями $Y_t = (1 + \lambda t)^{-1} X_0$ 1-параметрическое семейство диффеоморфизмов $\psi_t = \psi(t)$ многообразия M^n , которое, в свою очередь, задает 1-параметрическое семейство метрик $g_t = g(t) = (1 + \lambda t) \psi_t^* g_0$, являющееся решением уравнений Гамильтона потока Риччи (см. [1], стр. 21-22; [2], стр. 154-156)

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -2Ric_t$$

для тензора Риччи Ric_t метрики $g_t = g(t)$. Верно и обратное.

3. ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

3.1. *Инфинитезимальным гармоническим преобразованием* риманова многообразия (M^n, g) называется векторное поле X

такое, что индуцированная им 1-параметрическая группа локальных преобразований многообразия (M^n, g) состоит из локальных гармонических диффеоморфизмов (см. [6] - [8]).

Множество инфинитезимальных гармонических преобразований представляет собою \mathbf{R} -модуль, который на компактном многообразии (M^n, g) имеет конечную размерность (см. [6]; [8]). При этом алгебра Ли инфинитезимальных изометрий многообразия (M^n, g) содержится в \mathbf{R} -модуле инфинитезимальных гармонических преобразований (см. там же).

Инфинитезимальные гармонические преобразования составляют ядро определенного в [6] самосопряженного лапласиана Яно

$$\square = \delta \circ \delta^* - \delta^* \circ \delta,$$

где δ — оператор кодифференцирования, формально сопряженный оператору $\delta^* X = L_X g = 0$. Установлена связь между известным (см., напр., [10], стр. 167) лапласианом Ходжа Δ_H и лапласианом Яно \square , имеющая вид (см. [6]; [8])

$$\square = \Delta_H - 2Ric^*, \quad (3.1)$$

где Ric^* - оператор Риччи, соответствующий относительно метрики g тензору Риччи Ric .

3.2. Рассмотрим солитон Риччи (g_0, X_0, λ) на n -мерном ($n \geq 2$) связном дифференцируемом многообразии M^n . Справедлива

Лемма 1. *Векторное поле X_0 солитона Риччи (g_0, X_0, λ) , заданного на n -мерном ($n \geq 2$) многообразии M^n , является инфинитезимальным гармоническим преобразованием риманова многообразия (M^n, g_0) .*

Доказательство. Перепишем уравнения (2.1) солитона Риччи (g_0, X_0, λ) в локальных координатах x^1, \dots, x^n многообразия M^n

$$-R_{ij} = \frac{1}{2} L_{X_0} g_{ij} + \lambda g_{ij} \quad (3.2)$$

для $L_{X_0}g_{ij} := \nabla_i X_j + \nabla_j X_i$. Здесь $X_i = g_{ij}X^j$, R_{ij} и g_{ij} — компоненты 1-формы ω_0 , двойственной векторному полю X_0 , тензоров Риччи Ric_0 и g_0 , а также ∇_k — символ ковариантного дифференцирования связности Леви-Чивита ∇^0 в направлении $\partial_k = \partial/\partial x^k$, в записи которых символ “0” мы для упрощения обозначений опускаем.

Для символов Кристоффеля Γ_{ij}^k связности Леви-Чивита ∇^0 справедливы формулы ([9], Глава 1, формулы (5.12) и (5.21))

$$L_X \Gamma_{ij}^k = \nabla_i \nabla_j X^k + R_{ilj}^k X^l;$$

$$L_X \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \{ \nabla_i (L_X g_{lj}) + \nabla_j (L_X g_{il}) - \nabla_l (L_X g_{ij}) \},$$

Сведем эти две формулы в одну и на основании (5.1) придадим ей следующий вид

$$\nabla_i \nabla_j X^k + R_{ilj}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \{ -\nabla_i R_{lj} - \nabla_j R_{il} + \nabla_l R_{ij} \}. \quad (3.3)$$

Если свернуть левую и правую части равенства (3.3) с g^{ij} , получим

$$\square X^k := -(g^{ij} \nabla_i \nabla_j X^k + R_l^k X^l) = 0, \quad (3.4)$$

поскольку $2g^{ij} \nabla_i R_{jl} = \nabla_l s_0$.

Следовательно, векторное поле X_0 солитона Риччи

$$(g_0, X_0, \lambda),$$

как и двойственная ему 1-форма ω_0 , принадлежат ядру оператора K . Ясно \square (см. [9], стр. 40). Последнему, как это показано в [6] и [8], можно придать вид $\square = \delta \circ \delta^* - \delta^* \circ \delta$. В силу (3.1) равенство (3.4) можно еще представить в следующем виде (см. [7])

$$\Delta_H X^j = 2R_k^j X^k, \quad (3.5)$$

где R_k^j — компоненты оператора Риччи Ric_0^* . \square

Замечание 1. Зная, что вектор X_0 солитона Риччи

$$(g_0, X_0, \lambda)$$

является инфинитезимальным гармоническим преобразованием, свойства этого преобразования можно приписать солитону Риччи не только на римановом, но келеровом многообразиях (см. [6] - [8]).

4. ЭНЕРГИЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ СОЛИТОНА РИЧЧИ

4.1. Для векторного поля X_0 солитона Риччи (g_0, X_0, λ) введем в рассмотрение скалярную функцию $E(X_0) = 2^{-1}g_0(X_0, X_0)$, называемую энергией векторного поля X_0 (см., напр., [11]). Справедлива

Теорема 1. Пусть (g_0, X_0, λ) — солитон Риччи на некомпактном многообразии $M^n (n \geq 2)$. Если энергия $E(X_0)$ векторного поля X_0 имеет критическую точку $x \in M^n$, в которой $X_0(x) \neq 0$, тогда солитон Риччи будет стягивающимся (соответственно растягивающимся или стабильным), если в этой точке $Ric_0(X_0, X_0) > 0$ (соответственно $Ric_0(X_0, X_0) < 0$ или $Ric_0(X_0, X_0) = 0$).

Доказательство. Из уравнений солитона Риччи (3.2) следует

$$-Ric_0(X_0, X_0) = X_0(E(X_0)) + 2\lambda E(X_0), \quad (4.1)$$

поскольку

$$X_0(E(X_0)) = g(X_0, \nabla_{X_0}^0 X_0).$$

Пусть теперь $x \in M^n$ — критическая точка функции $E(X_0)$, тогда в этой точке $X_0(E(X_0)) = 0$. В итоге

$$Ric_0(X_0(x), X_0(x)) = -2\lambda E(X_0)(x).$$

Если при этом $X_0(x) \neq 0$, то утверждения теоремы 1 становятся очевидными. \square

Замечание 2. Из теоремы, в частности, следует, что на компактном многообразии солитон Риччи с положительной кривизной Риччи и необращающимся в нуль векторным полем X_0 с необходимостью является стягивающимся.

Теорема 2. Пусть (g_0, X_0, λ) — солитон Риччи на компактном многообразии $M^n (n \geq 2)$ такой, что метрика g_0 имеет отрицательную кривизну Риччи, тогда солитон Риччи будет растягивающимся, если энергия $E(X_0)$ векторного поля X_0 имеет локальный максимум в некоторой точке $x \in M^n$.

Доказательство. Допустим, что энергия $E(X_0)$ векторного поля X_0 имеет локальный максимум в некоторой точке $x \in M^n$, тогда в этой точке $\Delta E(X_0) \leq 0$. С другой стороны, для $E(X_0)$ непосредственные вычисления с использованием равенства (3.4) дают

$$\begin{aligned} \Delta E(X_0) &:= \text{trace}_g(\text{Hess}(E(X_0))) = \\ &= g_0(\nabla^0 X_0, \nabla^0 X_0) - \text{Ric}_0(X_0, X_0). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Из (4.2) в предположении об отрицательной определенности кривизны Риччи следует, что на M^n всюду $\Delta E(X_0) > 0$, если только $X_0 \neq 0$. Из этих двух неравенств заключаем, что X_0 должен быть нулем в точке $x \in M^n$. Но так как $E(X_0)$ имеет локальный максимум в $x \in M^n$ и при этом $E(X_0) > 0$ всюду на M^n , если только $X_0 \neq 0$, то X_0 должен обращаться в нуль в некоторой окрестности U_x точки $x \in M^n$.

Тогда же в окрестности U_x уравнения (2.1) примут вид

$$\text{Ric}_0 = -\lambda g_0,$$

из которых следует, что $\lambda > 0$, а потому (g_0, X_0, λ) — растягивающийся солитон Риччи. \square

4.2. В заключение рассмотрим компактный вариант теоремы 1.

Теорема 3. Пусть на компактном многообразии M^n задан солитон Риччи (g_0, X_0, λ) . Если тензор Риччи Ric_0 метрики g_0 удовлетворяет условию $\text{Ric}_0(X_0, X_0) \leq 0$, то солитон — стабильный, метрика g_0 — Риччи-плоская, а векторное поле X_0 — ковариантно постоянное. Если же тензор Риччи отрицательно определен, то солитон — растягивающийся, метрика g_0 — эйнштейновая, а векторное поле X_0 — нулевое.

Доказательство. Рассмотрим для компактного многообразия M^n ($n \geq 2$) ориентированное двулистное накрытие и воспользуемся теоремой Грина $\int_{M^n} \operatorname{div} X dv = 0$ для $\operatorname{div} X = \Delta E(X_0)$. Тогда в соответствии с (4.2) получим:

$$\int_{M^n} [g_0(\nabla^0 X_0, \nabla^0 X_0) - \operatorname{Ric}_0(X_0, X_0)] = 0. \quad (4.3)$$

При $\operatorname{Ric}_0(X_0, X_0) \leq 0$ из (4.3) заключаем, что $\operatorname{Ric}_0(X_0, X_0) = 0$ и $\nabla_0 X_0 = 0$. При этом из (4.1) следует, что $\lambda = 0$, а из (2.1), что $\operatorname{Ric}_0 = 0$. Более того, если $\operatorname{Ric}_0(X_0, X_0) < 0$, то из (4.3) заключаем, что $X_0 = 0$, а это автоматически влечет, что $\lambda > 0$. При этом из (2.1) следует, что $\operatorname{Ric}_0 = -\lambda g_0$. \square

Замечание 3. *Поскольку доказано (см. Введение), что растягивающийся и стабильный солитоны Риччи на компактном многообразии являются градиентными с метриками соответственно эйнштейновой с отрицательной кривизной Риччи и Риччи-плоской, то теорему 3 можно рассматривать как обратное, дополняющее данное утверждение.*

5. СОЛИТОНЫ РИЧЧИ С МЕТРИКОЙ ПОСТОЯННОЙ СКАЛЯРНОЙ КРИВИЗНЫ

5.1. Пусть скалярная кривизна s_0 метрики g_0 , определяемая как след оператора Риччи Ric_0^* , является постоянной величиной. Справедлива

Теорема 4. *Пусть (g_0, X_0, λ) — солитон Риччи на некомпактном многообразии M^n ($n \geq 2$) с метрикой g_0 постоянной скалярной кривизны s_0 . Если $s_0 = 0$, то метрика g_0 будет Риччи-плоской, а векторное поле X_0 — инфинитезимальной гомотетией. Если же $s_0 \neq 0$, то ненулевые λ и s_0 имеют разные знаки и при этом для*

- (1) *стабильного солитона метрика g_0 будет Риччи-плоской, а векторное поле X_0 — инфинитезимальной изометрией;*

- (2) *стягивающегося солитона* $0 < s_0 \leq n|\lambda|$;
 (3) *растягивающегося солитона* $-n\lambda \leq s_0 < 0$.

Доказательство. На основании равенства $\delta\Delta_H = \Delta_H\delta$ (см. [10], стр. 167) из уравнений (5.4) выводим:

$$\Delta_H\delta X_0 = \delta(2Ric_0^*X_0),$$

где в левой части имеем нуль, поскольку

$$\Delta_H\delta X_0 = -\Delta_H\text{div}X_0 = \Delta_H(s_0 + n\lambda) = 0,$$

и одновременно в правой части имеем:

$$\begin{aligned} \delta(2Ric_0^*X_0) &= -(2\nabla^k R_{kj})X^j - 2R_{kj}\nabla^k X^j = \\ &= -X^j\nabla_j s_0 - R_{kj}(\nabla^k X^j + \nabla^j X^k) = -R_{kj}(\nabla^k X^j + \nabla^j X^k). \end{aligned}$$

В итоге приходим к равенству

$$R_{kj}(\nabla^k X^j + \nabla^j X^k) = 0. \quad (5.1)$$

Из уравнений солитона Риччи (3.2) находим:

$$L_{X_0}g_{ij} = -2(R_{ij} + \lambda g_{ij}),$$

с учетом этого из (5.1) выводим, что

$$-2R_{kj}(R^{kj} + \lambda g^{kj}) = -2(\|Ric\|^2 + \lambda s_0) = 0,$$

откуда

$$\lambda s_0 = -\|Ric\|^2 \leq 0. \quad (5.2)$$

Из (5.2) следует, во-первых, что ненулевые λ и s_0 имеют разные знаки и, во-вторых, что при $\lambda = 0$ или $s_0 = 0$ метрика g_0 с необходимостью становится Риччи-плоской. Причем в первом случае векторное поле X_0 — инфинитезимальная изометрия, что очевидно, а во втором — инфинитезимальная гомотетия, поскольку $L_{X_0}g_0 = -2\lambda g_0$.

Согласно (3.2) имеем: $R_{ij} = -2^{-1}L_{X_0}g_{ij} - \lambda g_{ij}$ и тогда из (5.1) следует, что $\|L_{X_0}g_{ij}\|^2 - 4\lambda(s_0 + n\lambda) = 0$, откуда

$$\lambda(s_0 + n\lambda) = \frac{1}{4}\|L_{X_0}g_{ij}\|^2 \geq 0 \quad (5.3)$$

Если теперь предположить, что $s_0 > 0$, тогда из (5.3) при $\lambda < 0$ следует, что $0 < s_0 \leq n |\lambda|$. Если же $s_0 < 0$ и $\lambda > 0$, то из (5.3) следует, что $-n\lambda \leq s_0 < 0$. \square

5.2. Поскольку геометрия растягивающегося и стабильного солитона Риччи на компактном многообразии известна (см. теорему 3), то компактный вариант теоремы 4 сформулируем как теорему о стягивающемся солитоне Риччи.

Теорема 5. *Для того чтобы на компактном многообразии M^n ($n > 2$) метрика g_0 стягивающегося солитона Риччи*

$$(g_0, X_0, \lambda)$$

была эйнштейновой, необходимо и достаточно, чтобы ее скалярная кривизна s_0 была постоянной величиной.

Доказательство. Пусть метрика g_0 солитона Риччи (g_0, X_0, λ) , заданного на компактном многообразии M^n , имеет постоянную скалярную кривизну s_0 . Воспользуемся интегральной формулой К. Яно (см. [9], Глава II, формула (1.14))

$$\int_{M^n} (g(\square X + n^{-1}(n-2)\nabla\delta X, X) - 2^{-1} \|L_{X_0}g + 2n^{-1}\delta X_0g\|^2) dV = 0,$$

являющейся одной из разновидностей теоремы Грина.

Для векторного поля X_0 солитона Риччи (g_0, X_0, λ) и постоянной скалярной кривизны s_0 имеем $\square X_0 = 0$ и

$$\nabla^0\delta X_0 = \nabla^0(s_0 + n\lambda) = 0.$$

В результате из формулы следует, что $L_{X_0}g = -2n^{-1}\delta X_0g_0$. Более того, с помощью теоремы Грина $\int_{M^n} \delta X dv = 0$ находим, что $s_0 = -n\lambda > 0$, а с учетом (5.3) и $L_{X_0}g_0 = 0$. Тогда уравнения (2.1) солитона Риччи примут вид $Ric_0 = -\lambda g_0 = n^{-1}s_0g_0$. Обратное очевидно. \square

Замечание 4. *Если в дополнение к условиям теоремы 5 потребовать заземлённость кривизны Риччи вида $Ric_0 < \frac{1}{2}s_0g_0$,*

то метрика g_0 будет иметь положительную постоянную секционную кривизну.

6. ДВУМЕРНЫЕ ГРАДИЕНТНЫЕ СОЛИТОНЫ РИЧЧИ

6.1. Рассмотрим солитон Риччи (g_0, X_0, λ) на двумерном связном многообразии M^2 . Тогда $Ric_0 = 2^{-1}s_0g_0$, причем в общем случае $s_0 \neq \text{const}$. Одновременно из уравнений солитона Риччи (2.1) выводим

$$L_{X_0}g_0 = -2(2^{-1}s_0 + \lambda)g_0 \quad (6.1)$$

и, следовательно, X_0 — инфинитезимальное конформное преобразование. Справедлива следующая

Теорема 6. Пусть на связном многообразии M^2 существует градиентный солитон Риччи (g_0, f, λ) , тогда при $f \neq \text{const}$ риманово многообразие (M^2, g_0) конформно сфере 3-мерного евклидова пространства R^3 .

Доказательство. Для градиентного солитона (g_0, f, λ) уравнения (6.1) предстанут в следующем виде

$$\nabla^0 \nabla^0 f = -(2^{-1}s_0 + \lambda)g_0,$$

откуда следует, что $\Delta f = -2(2^{-1}s_0 + \lambda)$, а потому уравнения градиентного солитона Риччи запишутся следующим образом $\nabla^0 \nabla^0 f = 2^{-1}\Delta f g_0$.

Теперь осталось сослаться на теорему (см. [9], Глава 2, Теорема 6.3), согласно которой наличие на n -мерном ($n \geq 2$) связном полном римановом многообразии (M^n, g_0) скалярной функции f ($f \neq \text{const}$) являющейся решением уравнений

$$\nabla^0 \nabla^0 f = n^{-1}\Delta f g_0,$$

служит необходимым и достаточным условием конформности риманова многообразия (M^n, g_0) гиперсфере n -мерного евклидова пространства R^{n+1} . \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Chow B., Knopf D.* The Ricci flow: An introduction // American Mathematical Society, Science Press. – 2004.
- [2] *Chow B., Lu P., Ni L.* Hamilton's Ricci flow. // American Mathematical Society, Science Press. – 2006.
- [3] *Hamilton R.S.* The Ricci flow on surfaces. // Contemp.Math. – 1988.– **71**. – Pp.237–261.
- [4] *Perelman G.* The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications. // arXiv:math.DG/0211159v1 [math.DG]– 11 Nov 2002
- [5] *Cao H.-D.* Geometry of Ricci solitons. // Chin. Ann. Math., Series B. – 2006.– **27**. – Pp.142.
- [6] *Stepanov S.E., Shandra I.G.* Geometry of infinitesimal harmonic transformations. // Annals of Global Analysis and Geometry. – 2003.– **24**. – Pp.291–299.
- [7] *Степанов С.Е., Шандра И.Г.* Гармонические диффеоморфизмы многообразий. // Алгебра и Анализ. – 2004.– **16**. №2. – Pp.154–171.
- [8] *Смольникова М.В., Степанов С.Е., Шандра И.Г.* Инфинитезимальные гармонические преобразования. // Известия вузов. Математика. – 2004.– **5**. – Pp.69–75.
- [9] *Yano K.* Integral formulas in Riemannian geometry. // New York, Marcel Dekker. – 1970.
- [10] *Ж.де Рам.* Дифференцируемые многообразия. // М. – 1956
- [11] *Udriste C.* Properties of torse forming vector fields. // Tensor, N.S. – 1985.– **42**. – Pp.137–144.
- [12] *Степанов С.Е., Шелепова В.Н.* О солитонах Риччи с условиями на скалярную кривизну и кривизну Риччи. // Тезисы докладов межд. конф. “Геометрия в Одессе-2008”. – 2008.– Pp.127–128.
- [13] *Шелепова В.Н.* Солитоны Риччи на двумерном полном многообразии. // Межд. конф. по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, Суздаль. – 2008.– Pp.260–261.

И. С. Стрельцова

Астраханский государственный университет, Астрахань
E-mail: strelzova_i@mail.ru

\mathbb{R} -конформная геометрия кривых на плоскости: алгебра дифференциальных инвариантов

В работе описывается структура алгебры скалярных дифференциальных инвариантов кривых на плоскости с метриками Евклида или Минковского относительно \mathbb{R} -конформных преобразований.

We describe a structure of the algebra of scalar differential invariants of plane curves with respect to conform transformations.

Ключевые слова: *differential invariants, invariant differentiation*

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть \mathbb{R}_ε^2 — плоскость с метрикой $ds^2 = dy^2 + \varepsilon dx^2$. Здесь x, y — координаты на плоскости и $\varepsilon = \pm 1$. При $\varepsilon = 1$ это — плоскость Евклида, а при $\varepsilon = -1$ — плоскость Минковского.

Преобразование ϕ плоскости \mathbb{R}_ε^2 называется *конформным*, при преобразовании метрика умножается на некоторую положительную функцию, то есть

$$(1) \quad \phi^*(ds^2) = \lambda ds^2$$

для некоторой функции $\lambda \in C^\infty(\mathbb{R}_\varepsilon^2)$, $\lambda > 0$ [3].

Если же при преобразовании ϕ метрика умножается на положительную константу (то есть в формуле (1) $\lambda \in \mathbb{R}^+$), то такое преобразование будем называть *\mathbb{R} -конформным*.

Множество \mathbb{R} -конформных преобразований плоскости является группой Ли, которую мы будем называть *\mathbb{R} -конформной*

группой Ли и обозначать $G_{\text{см}}$. Она представляет собой полупрямое произведение группы движений $G_{\text{м}}$ и группы гомотетией $G_{\text{н}}$.

В предлагаемой работе мы даем полное описание алгебры дифференциальных инвариантов кривых относительно \mathbb{R} -конформных преобразований плоскости $\mathbb{R}_{\varepsilon}^2$.

Мы вводим понятие \mathbb{R} -конформной кривизны кривой, которая в нашем случае играет такую же важную роль, как и обычная кривизна на плоскости Евклида. Но, в отличие от кривизны кривой, \mathbb{R} -конформная кривизна — дифференциальный инвариант не второго, а третьего порядка. Дифференциальные инварианты k -го порядка получаются из нее последовательным применением операции инвариантного дифференцирования.

Полученное описание алгебры дифференциальных инвариантов можно применить к интегрированию нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, допускающих алгебру симметрий $\mathcal{G}_{\text{см}}$.

Отметим, что в работе [5] описана структура алгебры дифференциальных инвариантов расслоения кривых на плоскости Минковского.

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ И ИНВАРИАНТНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Базис алгебры Ли $\mathcal{G}_{\text{см}}$ состоит из следующих векторных полей: $X = \partial_x$, $Y = \partial_y$ (параллельные переносы), $Z = x\partial_y + \varepsilon y\partial_x$ (повороты¹) и $H = x\partial_x + y\partial_y$ (гомотетии). Заметим, что эти векторные поля — контактные векторные поля с производящими функциями

$$(2) \quad h_1 = p_1, \quad h_2 = 1, \quad h_3 = x + \varepsilon y p_1, \quad h_4 = y - p_1 x$$

¹Для плоскости Минковского — гиперболические повороты.

соответственно. Поэтому алгебру Ли $\mathcal{G}_{\text{см}}$ можно отождествить с алгеброй Ли контактных векторных полей X_h с производящими функциями вида

$$(3) \quad h(x, y, p_1) = a_1 + a_2 p_1 + a_3(x + \varepsilon y p_1) + a_4(y - p_1 x),$$

где a_1, \dots, a_4 — константы [2, 7].

Пусть φ — некоторая кривая на \mathbb{R}_ε^2 , заданная в виде графика функции $y = f(x)$ и пусть $J^k\mathbb{R}$ — пространство k -джетов гладких функций на \mathbb{R} . Напомним, что функция $I \in C^\infty(J^k\mathbb{R})$ называется (скалярным) *дифференциальным инвариантом* кривой относительно группы Ли G , если она не является постоянной и сохраняется под действием k -го продолжения этой группы [1]. Число k называется *порядком* дифференциального инварианта.

Найдем дифференциальный инвариант кривой третьего порядка относительно группы $G_{\text{см}}$. Для его построения используем дифференциальные инварианты группы движений G_m . Пусть $x, y, p_1, p_2, \dots, p_k$ — канонические координаты на пространстве $J^k\mathbb{R}$. Как известно, первый дифференциальный инвариант кривой относительно группы G_m это — кривизна кривой, являющаяся инвариантом второго порядка:

$$(4) \quad I_2 = \frac{p_2}{(p_1^2 + \varepsilon)^{\frac{3}{2}}}.$$

Дифференцирование ∇ на $J^\infty\mathbb{R}$ будем называть *инвариантным дифференцированием* группы Ли G если для любого векторного поля $X^* \in \mathcal{G}^\infty$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(J^\infty\mathbb{R}) & \xrightarrow{\nabla} & C^\infty(J^\infty\mathbb{R}) \\ X^* \downarrow & & \downarrow X^* \\ C^\infty(J^\infty\mathbb{R}) & \xrightarrow{\nabla} & C^\infty(J^\infty\mathbb{R}) \end{array}$$

коммутативна.

Инвариантное дифференцирование позволяет строить новые дифференциальные инварианты из уже известных. Действительно, пусть, например, I — дифференциальный инвариант группы Ли G и ∇ — инвариантное дифференцирование. Тогда

$$X^*(\nabla(I)) = \nabla(X^*(I)) = 0$$

для любого векторного поля $X^* \in \mathcal{G}^\infty$. Таким образом, функция $\nabla(I)$ тоже является дифференциальным инвариантом.

Через $\frac{d}{dx} : C^\infty(J^\infty\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(J^\infty\mathbb{R})$ обозначим полную производную по переменной x :

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + p_1 \frac{\partial}{\partial y} + \cdots + p_k \frac{\partial}{\partial p_{k-1}} \cdots .$$

Пусть $X = A(x, y)\partial_x + B(x, y)\partial_y$ — векторное поле на \mathbb{R}^2 из алгебры Ли \mathcal{G} . Следующая лемма [4] указывает метод вычисления инвариантных дифференцирований.

Лемма 1. *Если функция $\lambda \in C^\infty(J^k\mathbb{R})$ удовлетворяет уравнению*

$$(5) \quad X^*(\lambda) - \lambda \frac{dA}{dx} = 0$$

для любого векторного поля $X^* \in \mathcal{G}^\infty$, то $\nabla = \lambda \frac{d}{dx}$ — инвариантное дифференцирование группы Ли G .

Применим доказанную лемму к группе движений.

Лемма 2. *Дифференцирование*

$$D = \frac{1}{\sqrt{p_1^2 + \varepsilon}} \frac{d}{dx}$$

является инвариантным дифференцированием группы движений G_m .

Доказательство. Для доказательства достаточно применить предыдущую лемму к векторным полям X, Y, Z при $k = 1$.

Продолжения этих векторных полей в пространство 1-джетов имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} X^{(1)} &= \partial_x, \\ Y^{(1)} &= \partial_y, \\ Z^{(1)} &= -\varepsilon y \partial_x + x \partial_y + (1 + \varepsilon p_1^2) \partial_{p_1}. \end{aligned}$$

Следовательно функция $\lambda = \lambda(x, y, p_1)$ должна удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial y} = 0, \quad (1 + \varepsilon p_1^2) \frac{\partial \lambda}{\partial p_1} + p_1 \lambda = 0.$$

Ее общее решение имеет вид:

$$\lambda = \frac{C}{\sqrt{p_1^2 + \varepsilon}},$$

где C — произвольная постоянная. □

Дифференциальный инвариант третьего порядка относительно группы движений G_m получим, применяя к инварианту I_2 оператор D :

$$I_3 = \frac{p_3(p_1^2 + \varepsilon) - 3p_1 p_2^2}{(p_1^2 + \varepsilon)^3}.$$

3. \mathbb{R} -КОНФОРМНАЯ КРИВИЗНА

Векторное поле H порождает 1-параметрическую группу

$$h_t : (x, y) \mapsto (e^t x, e^t y)$$

на плоскости. Ее поднятие в пространство 3-джетов имеет вид:

$$h_t^{(3)} : (x, y, p_1, p_2, p_3) \mapsto (e^t x, e^t y, p_1, e^{-t} p_2, e^{-2t} p_3).$$

Поэтому на дифференциальные инварианты I_2 и I_3 она действует следующим образом:

$$(6) \quad h_t^{(3)*}(I_2) = e^{-t} I_2 \quad \text{и} \quad h_t^{(3)*}(I_3) = e^{-2t} I_3.$$

Мы видим, что абсолютные инварианты I_2 и I_3 группы Ли G_m являются относительными инвариантами группы Ли G_{cm} . Таким образом, функция

$$(7) \quad J_3 = \frac{I_3}{I_2^2} = \frac{p_3(p_1^2 + \varepsilon) - 3p_1p_2^2}{p_2^2}$$

является (абсолютным) дифференциальным инвариантом третьего порядка группы G_{cm} . Этот инвариант мы будем называть \mathbb{R} -конформной кривизной.

Пусть φ — некоторая кривая, заданная уравнением $y = f(x)$. Ограничение J_3 на график 3-джета функции f будем называть \mathbb{R} -конформной кривизной кривой φ и обозначать K_φ , то есть

$$K_\varphi = J_3|_{j^3(f)}.$$

Очевидно, \mathbb{R} -конформная кривизна не определена в точках кривой, где вторая производная функции f обращается в нуль. В том числе она не определена для прямых.

Пример 8. \mathbb{R} -конформная кривизна параболы $y = x^2 + px + q$ (p, q — постоянные) равна $-6x$.

Пример 9. Найдём кривые, для которых \mathbb{R} -конформная кривизна равна нулю. Для этого нужно решить обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка $K_\varphi = 0$, или, в терминах функции y , уравнение

$$y''' = \frac{3y'y''^2}{y'^2 + \varepsilon}.$$

Поэтому искомые кривые удовлетворяют уравнению

$$(y + a)^2 + \varepsilon(x + b)^2 = c^2,$$

и определяют либо окружности (при $\varepsilon = 1$), либо гиперболы (при $\varepsilon = -1$). Здесь a, b, c — произвольные постоянные.

Теорема 1. Для всякой гладкой функции $\lambda = \lambda(x)$, определенной в интервале $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$, существует кривая φ , такая, что ее конформная кривизна K_φ равна $\lambda(x)$ в некотором интервале $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$.

Доказательство. Для доказательства рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{y'''(y'^2 + \varepsilon) - 3y'y''^2}{y''^2} = \lambda(x)$$

относительно функции y .

Пусть $\varepsilon = -1$. Зададим начальные данные для функции y в некоторой фиксированной точке x_0 так, чтобы $y'(x_0) \neq \pm 1$ и $y''(x_0) \neq 0$. Значение функции y в этой точке можно выбрать произвольным. Для $\varepsilon = 1$ начальные данные достаточно выбрать так, чтобы $y''(x_0) \neq 0$. Тогда по теореме существования для значений x из некоторой окрестности точки x_0 это уравнение имеет решение $y = f(x)$. Таким образом, конформная кривизна кривой φ , задаваемой уравнением $y = f(x)$ равна $K_\varphi(x) = \lambda(x)$. \square

4. СТРУКТУРА АЛГЕБРЫ СКАЛЯРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИНВАРИАНТОВ

Найдем алгебру скалярных дифференциальных инвариантов кривых относительно группы $G_{\text{см}}$. Применяя лемму 1 к векторным полям X, Y, Z, H при $k = 2$ мы находим, что

$$\lambda = \frac{p_1^2 + \varepsilon}{p_2}.$$

Таким образом, оператор

$$\nabla = \frac{p_1^2 + \varepsilon}{p_2} \frac{d}{dx}$$

является инвариантным дифференцированием. Используя инвариантное дифференцирование ∇ , мы можем построить дифференциальные инварианты высших порядков:

$$J_4 = \nabla(J_3), \dots, J_k = \nabla(J_{k-1}), \dots$$

Укажем вид дифференциального инварианта четвертого порядка в координатах:

$$J_4 = -\frac{1 + p_1^2}{p_2^4} (3p_2^4 - 2p_2^2 p_1 p_3 + 2p_3^2 + 2p_3^2 p_1^2 - p_2 p_4 - p_2 p_4 p_1^2).$$

Теорема 2. *Функции $J_3, J_4, \dots, J_k, \dots$ образуют полную систему локальных дифференциальных инвариантов кривой относительно \mathbb{R} -конформных преобразований плоскости \mathbb{R}_x^2 .*

Доказательство. Простой подсчет размерности алгебры дифференциальных инвариантов группы G_{cm} показывает, что не существует дифференциальных инвариантов порядка < 3 и существует ровно $k - 2$ дифференциальных инвариантов порядка не выше k ($k \geq 3$).

В самом деле, размерность орбиты общего положения продолжения в пространство 3-джетов группы Ли G_{cm} равна четырем, а размерность самого пространства $J^3\mathbb{R}$ равна пяти. Поэтому существует только один дифференциальный инвариант третьего порядка. При повышении порядка джетов на единицу размерность орбиты группы G_{cm} не меняется, а размерность пространства джетов увеличивается на единицу. Поэтому каждый раз при переходе от пространства $(k - 1)$ -джетов к пространству k -джетов возникает только один новый дифференциальный инвариант, который имеет порядок k . Но так как инвариант J_k получается из J_{k-1} применением к последнему инвариантного дифференцирования ∇ , то (с точностью до калибровочного преобразования) J_k и есть этот новый инвариант. \square

Следствие 1. *Всякий локальный дифференциальный инвариант кривой порядка $\leq k$ ($k \geq 3$) имеет вид*

$$F(J_3, \dots, J_k),$$

где F — некоторая гладкая функция.

5. \mathbb{R} -КОНФОРМНАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ КРИВЫХ

Две кривые φ и γ на плоскости \mathbb{R}_ε^2 будем называть *конформно эквивалентными*, если существует \mathbb{R} -конформное преобразование, переводящее одну кривую в другую.

У группы Ли $G_{\text{см}}$ есть вырожденные орбиты.

Кривую φ будем называть *невыврожденной* если ее поднятие в $J^4\mathbb{R}$ не имеет общих точек с вырожденной орбитой.

Пусть φ — кривая на плоскости, на которой дифференциал конформной кривизны невырожден, то есть $dK_\varphi \neq 0$. Тогда функцию K_φ можно принять за новый параметр t на кривой и ограничение дифференциального инварианта $J = J_4$ на кривую φ может быть представлено в виде некоторой функции от этого параметра: $J_\varphi = F_\varphi(t)$.

Теорема 3. *Если на двух невырожденных кривых φ и γ дифференциалы конформных кривизн не вырождаются, то одна кривая может быть переведена в другую \mathbb{R} -конформным преобразованием тогда и только тогда, когда $F_\varphi \equiv F_\gamma$.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Пусть для кривых $\gamma = \{y = g(x)\}$ и $\varphi = \{y = f(x)\}$ выполняется условие $F_\varphi \equiv F_\gamma \equiv F$. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$(8) \quad J = F(K),$$

определяющее гиперповерхность E в пространстве 4-джетов. Так как функции $y = g(x)$ и $y = f(x)$ являются решениями этого дифференциального уравнения, то поднятия кривых γ и φ в пространство $J^4\mathbb{R}$ лежат на гиперповерхности E .

Пусть $\gamma^{(4)}$ и $\varphi^{(4)}$ — поднятия кривых γ и φ в пространство 4-джетов соответственно. Покажем, что кривую $\gamma^{(4)}$ сдвигом вдоль траекторий векторных полей X, Y, Z, H можно перевести в кривую $\varphi^{(4)}$. Для этого достаточно показать, что поднятие группы $G_{\text{см}}$ в $J^4\mathbb{R}$ действует транзитивно на решениях уравнения (8).

Любое векторное поле $X \in \mathcal{G}_{\text{см}}^{(4)}$ является инфинитезимальной симметрией уравнения E . Здесь $\mathcal{G}^{(4)}$ — поднятие алгебры Ли \mathcal{G} в $J^4\mathbb{R}$. Каждая симметрия уравнения раскладывается на две составляющие — характеристическую симметрию и тасующую симметрию [7].

Напомним [7], что характеристические симметрии действуют на пространстве $J^k\mathbb{R}$ вдоль решений и, стало быть, переводят каждое решение в себя. С точностью до умножения на функцию они представляют собой векторное поле

$$\Delta_k = \frac{\partial}{\partial x} + p_1 \frac{\partial}{\partial y} + \cdots + p_k \frac{\partial}{\partial p_{k-1}}.$$

Тасующие же симметрии, напротив, переводят одно решение в другие. Укажем вид тасующих симметрий. Поднятие векторного поля $X = A(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \in \mathcal{G}_{\text{см}}$ в пространство k -джетов имеет вид:

$$X_h^{(k)} = S_h^{(k)} + A\Delta_k,$$

где $h = B - p_1 A$. Поэтому

$$S_h^{(k)} = X_h^{(k)} - A\Delta_k,$$

то есть

$$S_h^{(k)} = h \frac{\partial}{\partial y} + \Delta_1(h) \frac{\partial}{\partial p_1} + \cdots + \Delta_k^{(k)}(h) \frac{\partial}{\partial p_k},$$

Векторное поле $S_h^{(k)}$ называют *эволюционным дифференцированием*.

В силу теоремы единственности решения задачи Коши для уравнения E , достаточно доказать транзитивность действия группы $G_{\text{см}}^{(3)}$ на пространстве начальных данных решений. Не сложно показать, что группа Ли, порожденная векторными полями $S_{h_1}^{(4)}, \dots, S_{h_4}^{(4)}$ действует на E глобально транзитивно. Таким образом, любая точка $a_0 \in E$ может быть переведена в любую другую точку $a_1 \in E$ комбинацией сдвигов вдоль векторных полей $S_{h_1}^{(4)}, \dots, S_{h_4}^{(4)}$. Поэтому из теоремы единственности

решения задачи Коши для уравнения E следует, что кривая γ может быть (локально) переведена в кривую φ . \square

Пример 10. Проиллюстрируем доказанную теорему на примере кривых

$$\varphi = \{y = -x^2 | x < 0\}$$

и

$$\gamma = \{y = -\sqrt{x} | x > 0\}.$$

Вычисляя для них конформные кривизны, получим: $K_\varphi = 6x$ и $K_\gamma = -6\sqrt{x}$. Дифференциальные инварианты четвертого порядка равны

$$J_\varphi = 3 + 12x^2$$

и

$$J_\gamma = 12x \left(1 + \frac{1}{4x}\right)$$

соответственно. Мы видим, что функции F для этих кривых совпадают:

$$F_\varphi(t) = F_\gamma(t) = 3 + \frac{t^2}{3}.$$

В то же время очевидно, что поворотом на угол $\frac{\pi}{2}$ вокруг начала координат кривая φ совмещается с кривой γ .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Алексеевский Д.В., Виноградов А.М., Лычагин В.В. *Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии*, Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, **28**, М., 1988, 297 стр.
- [2] Виноградов А.М., Красильщик И.С., Лычагин В.В. *Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений*, М., "Наука" 1986. 336 стр.
- [3] Кобаяси Ш. *Группы преобразований в дифференциальной геометрии*, М. "Наука", 1986. 224 стр.
- [4] Коновенко Н.Г. *Алгебры дифференциальных инвариантов геометрических величин на аффинной прямой*. (в печати)
- [5] Кузаконь В.М., Стрельцова И.С. *Расслоения кривых на плоскости Минковского*, "Симметрии: теоретический и методический аспекты" Сборник научных трудов II международного семинара, (12 – 14 сентября 2007 г., Астрахань), Астрахань, 2007. стр. 53 – 58.

-
- [6] Кузаконь В.М., Стрельцова И.С. *Дифференциальные инварианты расслоенных кривых на плоскости Минковского.*, Науковий журнал Математичні методи та фізико-механічні поля. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача, т. 50, №4. - Львів; 2007. - с.49.
- [7] Kushner A., Lychagin V., Rubtsov V., *Contact Geometry and Nonlinear Differential Equations*, Cambridge University Press, 496 pp., (2007).

Г. А. Толстихина

Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: science@tversu.ru

О локально симметрической структуре, связанной с обобщенной левой три-тканью Бола $B_l(p, q, q)$

The generalized left Bol 3-web $B_l(p, q, q)$ on a smooth manifold \mathcal{M} , $\dim \mathcal{M} = p + q$, defined by a local smooth Bol quasigroup is considered. The symmetric space structure connected with the web $B_l(p, q, q)$ is studied.

Ключевые слова: *three-web, Bol quasigroup, symmetric space*

Пусть $Q(*)$ — локальная дифференцируемая q -мерная квазигруппа, Y — гладкое p -мерное многообразие, ($p \leq q$),

$$f : Q \times Y \rightarrow Y, \quad z = f(a, y), \quad (1)$$

— гладкая функция, такая, что в каждой точке множества $Q \times Y$ ранги матриц Якоби $(\partial f / \partial a)$ и $(\partial f / \partial y)$ максимальны и для любых $y \in Y$ и $a, b \in Q$ выполняется условие

$$f(a, f^{-1}(b, f(a, y))) = f(a * b, y), \quad (2)$$

где $f^{-1} : Q \times Y \rightarrow Y$, $y = f^{-1}(a, z)$. Тогда будем говорить (см. [5]), что квазигруппа $Q(*)$ действует на многообразии Y по правилу (2).

С другой стороны, согласно [3], функция f задает на многообразии $\mathcal{M} = Q \times Y$ размерности $p + q$ три-ткань $W(p, q, q)$, образованную тремя слоениями

$$\lambda_1 : a = \text{const}, \quad \lambda_2 : y = \text{const}, \quad \lambda_3 : z = f(a, y) = \text{const}$$

размерностей p , q и q соответственно. Уравнение $z = f(a, y)$ называется *уравнением три-ткани* $W(p, q, q)$ [5]. Это уравнение определяет трехбазисную бинарную операцию

$$(\cdot) : Q \times Y \rightarrow Y, \quad z = a \cdot y \equiv f(a, y),$$

которая называется *локальным координатным группоидом три-ткани* $W(p, q, q)$.

При $p = q$ уравнение $z = a \cdot y$ является локально однозначно разрешимым относительно переменных a и y , поэтому операция (\cdot) является гладкой локальной квазигруппой. Напомним [1], что последняя называется локальной координатной квазигруппой соответствующей три-ткани $W(q, q, q)$. Для три-ткани $W(p, q, q)$ размерности многообразий Q и Y , вообще говоря, различны, поэтому операция (\cdot) квазигруппой, вообще говоря, не является.

Переменные a , y и z , входящие в уравнение ткани, допускают преобразования вида

$$\tilde{a} = \alpha(a), \quad \tilde{y} = \beta(y), \quad \tilde{z} = \gamma(z),$$

где α , β , γ — локальные диффеоморфизмы. При этом уравнение ткани преобразуется к виду

$$\tilde{z} = \tilde{f}(\tilde{a}, \tilde{y}) = \gamma \circ f(\alpha^{-1}(\tilde{a}), \beta^{-1}(\tilde{y})).$$

Тройка локальных биекций (α, β, γ) называется *изотопическим преобразованием* или *изотопией* координатного группоида три-ткани $W(p, q, q)$.

В [5] доказана

Теорема 1. *Если квазигруппа $Q(*)$ действует на многообразии Y по правилу (2), то она изотопна левой лупе Бола.*

Напомним [4], что лупа (квазигруппа с единицей) называется левой лупой Бола, если в ней выполняется левое тождество Бола

$$(u \circ (v \circ u)) \circ w = u \circ (v \circ (u \circ w)).$$

В [5] функция $f : Q \times Y \rightarrow Y$, удовлетворяющая тождеству (2), названа *квазигруппой Бола преобразований*, а $Q(*)$ — *параметрической квазигруппой* квазигруппы Бола преобразований. Три-ткань $W(p, q, q)$, определяемая квазигруппой Бола преобразований, называется *обобщенной левой тканью Бола* и обозначается $B_l(p, q, q)$.

Теорема 2. *База первого слоения три-ткани $B_l(p, q, q)$ является локально симметрическим пространством.*

Доказательство. На базе Q первого слоения λ_1 три-ткани $B_l(p, q, q)$ определим семейство функций $S_a(b) = a*b$, где $a \in Q$, $b \in U_a \subset Q$, U_a — достаточно малая окрестность точки a . В силу (2) операция $(*)$ идемпотентна: $a * a = a$, левобратима: $a * (a * b) = b$ и леводистрибутивна: $a * (b * c) = (a * b) * (a * c)$ [5], поэтому согласно [4] (см. также [2]) функции S_a являются локальными симметриями, а многообразие $\{Q, S_a\}$ будет локально симметрическим пространством. \square

Пример 11. В [6] найдены уравнения некоторой обобщенной левой ткани Бола $B_l(2, 3, 3)$:

$$\begin{cases} z^1 = a^1 + y^1 - a^3 y^2 (a^2 + y^2), \\ z^2 = a^2 + y^2. \end{cases} \quad (3)$$

С другой стороны, уравнения (3) задают действие некоторой трехпараметрической квазигруппы Бола $Q(*)$ на двумерном многообразии Y . Найдем уравнения $c = a * b$ этой квазигруппы. Запишем тождество (2) в виде двух равенств:

$$f(a, y) = f(b, \bar{y}), \quad f(c, y) = f(a, \bar{y}) \quad (4)$$

((2) получается из (4) исключением переменной \bar{y}).

Для три-ткани (3) имеем:

$$\begin{aligned} a^1 + y^1 - a^3 y^2 (a^2 + y^2) &= b^1 + \bar{y}^1 - b^3 \bar{y}^2 (b^2 + \bar{y}^2), \\ a^2 + y^2 &= b^2 + \bar{y}^2, \\ c^1 + y^1 - c^3 y^2 (c^2 + y^2) &= a^1 + \bar{y}^1 - a^3 \bar{y}^2 (a^2 + \bar{y}^2) \\ c^2 + y^2 &= a^2 + \bar{y}^2. \end{aligned}$$

Исключая $\bar{y} = (\bar{y}^1, \bar{y}^2)$ из последней системы, получим уравнения, которые удовлетворяются тождественно относительно $y = (y^1, y^2)$ в том и только в том случае, если выполняются равенства

$$\begin{cases} c^1 = 2a^1 - b^1 - (a^2 - b^2)(a^2(a^3 - b^3) + a^3(a^2 - b^2)), \\ c^2 = 2a^2 - b^2, \\ c^3 = 2a^3 - b^3. \end{cases} \quad (5)$$

Уравнения (5) определяют трехпараметрическую квазигруппу Бола квазигруппы Бола преобразований (3). С другой стороны, согласно теореме 2 уравнения (5) задают локальные симметрии $S_a(b) = a * b$ на трехмерной базе Q первого слоения рассматриваемой три-ткани $B_l(2, 3, 3)$.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что параметрическая квазигруппа (5) является идемпотентной, левообратимой и леводистрибутивной, а изотопная ей лупа — левой лупой Бола. Можно показать также, что левая обратная квазигруппа последней определяет известную шестимерную среднюю ткань Бола (ткань B_m) с симметричным тензором кручения a^{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) ранга 1 [7]:

$$\begin{cases} w^1 = u^1 + v^1 - u^2 v^2 (u^3 + v^3), \\ w^2 = u^2 + v^2, \\ w^3 = u^3 + v^3. \end{cases}$$

В [8] показано, что эта три-ткань B_m является *эластичной* (тканью E), то есть в ее координатных лупах выполняется тождество эластичности: $(u \circ v) \circ u = u \circ (v \circ u)$. В [8] эта ткань обозначена E_1 .

Пример 12. Рассмотрим другую шестимерную эластичную три-ткань E_2 (см. [8]), определяемую уравнениями

$$\begin{cases} z^1 = x^1 + y^1, \\ z^2 = x^2 + y^2 e^{-2x^1} + (x^3 y^1 - x^1 y^3) e^{-2x^1}, \\ z^3 = x^3 + y^3. \end{cases}$$

Поскольку эластичные ткани образуют собственный подкласс тканей B_m [8], то эта ткань является средней тканью Бола. Изотопическим преобразованием

$$x^2 e^{2x^1} + x^1 x^3 \rightarrow x^2, \quad y^2 - y^1 y^3 \rightarrow y^2, \quad z^2 e^{2z^1} + z^3 z^1 \rightarrow z^2$$

уравнения ткани E_2 приводятся к виду

$$\begin{cases} z^1 = x^1 + y^1, \\ z^2 = (x^2 + y^2) e^{2y^1} + (x^3 + y^3)(x^1 + y^1 + (y^1 - x^1) e^{2y^1}), \\ z^3 = x^3 + y^3. \end{cases} \quad (6)$$

Найдем левую обратную квазигруппу для квазигруппы (6), затем переобозначим переменные: $x^i \rightarrow z^i$, $z^i \rightarrow a^i$, $y^i \rightarrow -y^i$. В результате получим уравнения

$$\begin{cases} z^1 = a^1 + y^1, \\ z^2 = (a^2 - a^3 a^1) e^{2y^1} + y^2 + a^3 (a^1 + 2y^1), \\ z^3 = a^3 + y^3. \end{cases} \quad (7)$$

Эти уравнения, с одной стороны, определяют шестимерную левую ткань Бола, а, с другой стороны, задают действие некоторой трехпараметрической квазигруппы Бола $Q(*)$ на трехмерном многообразии Y .

Найдем уравнения соответствующей параметрической квазигруппы $c = a * b$. Для этого запишем равенства (4) с учетом (7) и исключим из полученной системы переменные y^i и \bar{y}^i . После вычислений получим:

$$\begin{cases} c^1 = 2a^1 - b^1, \\ c^2 = a^2 (e^{-2(a^1 - b^1)} + e^{2(a^1 - b^1)}) - b^2, \\ c^3 = 2a^3 - b^3. \end{cases} \quad (8)$$

Это и есть уравнения искомой квазигруппы $c = a * b$.

Покажем, что первые два уравнения системы (7):

$$\begin{cases} z^1 = a^1 + y^1, \\ z^2 = (a^2 - a^3 a^1) e^{2y^1} + y^2 + a^3(a^1 + 2y^1) \end{cases} \quad (9)$$

задают действие квазигруппы (8) на некотором двумерном многообразии. В самом деле, в правую часть уравнений (9) не входит переменная y^3 . Это означает, что (9) определяют группоид $f : Q \times \bar{Y} \rightarrow \bar{Y}$, где $\bar{Y} = \{(y^1, y^2)\}$, $\bar{Y} \subset Y$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что в рассматриваемом случае равенства (2) удовлетворяются тождественно в силу (8). Следовательно, уравнения (9) задают действие трехпараметрической квазигруппы Бола (8) на двумерной плоскости \bar{Y} и определяют обобщенную левую ткань Бола $B_l(2, 3, 3)$ на пятимерном многообразии $Q \times \bar{Y}$. На трехмерной базе Q первого слоя этой ткани уравнения (8) задают локальные симметрии вида $S_a(b) = a * b$.

Пример 13. Для координатной квазигруппы шестимерной три-ткани B_m с симметричным тензором a^{ij} ранга 2 (см. [7]):

$$\begin{cases} z^1 = x^1 + y^1 e^{-2z^3}, \\ z^2 = x^2 e^{-2z^3} + y^2 - 2z^1 y^3, \\ z^3 = x^3 + y^3 \end{cases} \quad (10)$$

уравнения левой обратной квазигруппы некоторым изотопическим преобразованием приводятся к виду

$$\begin{cases} z^1 = a^1 + y^1 e^{-a^3}, \\ z^2 = a^2 + (y^2 - a^1 y^3) e^{a^3}, \\ z^3 = a^3 + y^3. \end{cases} \quad (11)$$

Эти уравнения, с одной стороны, определяют шестимерную левую ткань Бола, а, с другой, задают на трехмерном многообразии Y действие трехпараметрической левой квазигруппы Бола

$Q(*)$:

$$\begin{cases} c^1 = a^1 + (a^1 - b^1)e^{b^3 - a^3}, \\ c^2 = a^2 + (a^2 - b^2)e^{a^3 - b^3} - (a^1 - b^1)(a^3 - b^3)e^{a^3}, \\ c^3 = 2a^3 - b^3. \end{cases} \quad (12)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что уравнения

$$\begin{cases} z^2 = a^2 + (y^2 - a^1 y^3)e^{a^3}, \\ z^3 = a^3 + y^3, \end{cases} \quad (13)$$

(второе и третье уравнения системы (11)), задают действие трехпараметрической квазигруппы (12) на двумерной плоскости $\bar{Y} = \{(y^2, y^3)\}$, $\bar{Y} \subset Y$.

Уравнения (13) определяют также обобщенную левую ткань Бола $B_l(2, 3, 3)$ на пятимерном многообразии $Q \times \bar{Y}$. Множество Q с локальными симметриями $S_a(b) = a * b$, которые задаются уравнениями (12), будет трехмерным симметрическим пространством.

Пример 14. Рассмотрим последнюю из трех шестимерных тканей B_m , уравнения которых найдены в [7]:

$$\begin{cases} z^1 = x^1 e^{2z^3} + y^1 + 2z^2 x^3, \\ z^2 = x^2 + y^2 e^{2z^3}, \\ z^3 = x^3 + y^3. \end{cases} \quad (14)$$

Для этой ткани, как и для ткани (10), тензор a^{ij} имеет ранг 2.

Уравнения левой ткани Бола B_l , определяемой левой обратной квазигруппой координатной квазигруппы (14), могут быть приведены к виду

$$\begin{cases} z^1 = a^1 + (y^1 - y^3 a^2)e^{-a^3}, \\ z^2 = a^2 + y^2 e^{a^3}, \\ z^3 = a^3 + y^3. \end{cases} \quad (15)$$

Эти уравнения определяют также действие некоторой трехпараметрической левой квазигруппы Бола $Q(*)$ на трехмерном

многообразии Y . Уравнения квазигруппы $Q(*)$ находятся непосредственными вычислениями и имеют вид

$$\begin{cases} c^1 = a^1 + (a^1 - b^1)e^{b^3 - a^3} - (a^2 - b^2)(a^3 - b^3)e^{-a^3}, \\ c^2 = a^2 + (a^2 - b^2)e^{a^3 - b^3}, \\ c^3 = 2a^3 - b^3. \end{cases} \quad (16)$$

Как и выше, можно показать, что уравнения

$$\begin{cases} z^1 = a^1 + (y^1 - a^2 y^3)e^{-a^3}, \\ z^3 = a^3 + y^3, \end{cases} \quad (17)$$

(первое и третье уравнения системы (15)), задают действие квазигруппы (16) на двумерной плоскости $\bar{Y} = \{(y^1, y^3)\}$, $\bar{Y} \subset Y$. Уравнения (17) определяют также обобщенную левую ткань Бола $B_l(2, 3, 3)$ на пятимерном многообразии $Q \times \bar{Y}$. База Q первого слоения этой ткани с локальными симметриями $S_a(b) = a * b$, которые задаются уравнениями (16), будет трехмерным симметрическим пространством.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Акивис М. А. Локальные дифференцируемые квазигруппы и три-ткани многомерных поверхностей // Исслед. по теории квазигрупп и луп. - Кишинев. - Штиинца. - 1973. - С. 3-12.
- [2] Акивис М. А., Герасименко С. А. О некоторых фигурах замыкания на многообразиях с симметрией // Ткани и квазигруппы. - Калинин. - 1982. - С. 7-11.
- [3] Акивис М. А., Гольдберг В. В. О многомерных три-тканях, образованных поверхностями разных размерностей // Докл. АН СССР. - 1972. - Т. 203. - № 2. - С. 263-266.
- [4] Сабинин Л. В., Михеев П. О. Теория гладких луп Бола // Москва. - Ун-т дружбы народов. - 1985. - 80 с.
- [5] Толстихина Г. А., Шелехов А. М. О квазигруппах Бола преобразований // Докл. РАН. - 2005. - Т. 401. - № 2. - С. 166-168.
- [6] Толстихина Г. А., Шелехов А. М. О три-ткани Бола, образованной слоениями разных размерностей // Изв. Вузов. Мат. - 2005. - № 5(516). - С. 56-62.
- [7] Федорова В. И. Шестимерные три-ткани Бола с симметричным тензором a_{ij} // Ткани и квазигруппы, Калинин, 1981, С. 10-123.

- [8] *Шелехов А. М.* О три-тканях с эластичными координатными лупами//
Деп. в ВИНТИ 02.12.1987. №8465-В87.

А. М. Шелехов

Тверской государственный университет, Тверь

E-mail: shelekhov@duma.gov.ru

О достаточном условии боловости многомерной три-ткани

Дано новое простое доказательство теоремы В. И. Федоровой: частичная кососимметричность тензора кривизны многомерной три-ткани достаточна для того, чтобы эта ткань была тканью Бола.

Ключевые слова: *ткань Бола, связность Черна, автотопия*

1. ВВЕДЕНИЕ

В [1] было впервые доказано, что тензор кривизны ткани Бола кососимметричен по двум нижним индексам. В [2] была доказана достаточность этого условия для того, чтобы ткань была боловой. Приведенное в [2] красивое, но весьма сложное геометрическое доказательство опирается на геодезические свойства канонической связности Черна, присоединенной к три-ткани.

В настоящей работе приводится более простое доказательство, идею которого мы использовали в работе [3] для описания тканей Бола, образованных слоениями разных размерностей. Но, указав в [3] тензорные условия боловости, их достаточность мы не доказали. Здесь приведено подробное доказательство для "классических" тканей Бола, то есть тканей, образованных слоениями одинаковой размерности.

Напомним, что теорема формулируется следующим образом [1].

Теорема 1. Пусть W — три-ткань, образованная тремя слоениями размерности r на гладком многообразии M размерности $2r$. Если тензор кривизны ткани W удовлетворяет условию

$$b_{j(k\ell)}^i = 0, \quad (1)$$

то ткань W является средней тканью Бола.

1. Согласно [4], корепер ω_1^i, ω_2^i ($i, j, k = 1, 2, \dots, r$) на многообразии M можно выбрать так, что слоения ткани будут задаваться уравнениями $\omega_1^i = 0, \omega_2^i = 0, \omega_3^i = 0$ причем формы нормированы условием

$$\omega_1^i + \omega_2^i + \omega_3^i = 0. \quad (2)$$

Формы ω_1^i, ω_2^i удовлетворяют уравнениям структуры [4]:

$$d\omega_1^i = \omega_1^j \wedge \omega_j^i + a_{jk}^i \omega_1^j \wedge \omega_1^k, \quad d\omega_2^i = \omega_2^j \wedge \omega_j^i - a_{jk}^i \omega_2^j \wedge \omega_2^k, \quad (3)$$

$$d\omega_j^i - \omega_j^k \wedge \omega_k^i = b_{jkl}^i \omega_1^k \wedge \omega_2^l. \quad (4)$$

Здесь величины a_{jk}^i кососимметричны по нижним индексам и образуют тензор кручения ткани W . Величины b_{jkl}^i образуют тензор кривизны ткани W . Эти тензоры связаны рядом соотношений, которые мы не приводим. Согласно [4], тензорные поля кручения и кривизны однозначно определяют три-ткань $W = (X, \lambda_\alpha)$.

Пусть для некоторой ткани W выполняется условие (1). Рассмотрим на ткани W две области U и \bar{U} , и пусть дифференциальные формы в области U обозначены, как и выше, через ω_α^i и ω_j^i , а в области \bar{U} — через $\bar{\omega}_\alpha^i$ и $\bar{\omega}_j^i$. Естественно, формы с чертой удовлетворяют тем же структурным уравнениям (3) и (4).

С помощью уравнений (3), (4) и условия (1) непосредственно проверяется, что верно

Предложение 1. Система уравнений

$$\omega_1^i = -\bar{\omega}_2^i, \quad \omega_2^i = -\bar{\omega}_1^i, \quad \omega_j^i = \bar{\omega}_j^i \quad (5)$$

вполне интегрируема на ткани W .

Система (5) определяет некоторое семейство отображений ткани W на себя. Пусть f — одно из них. Из уравнений (5) непосредственно вытекает

Предложение 2. Отображение f переводит слои первого слоения ткани W в слои второго слоения и наоборот, а слои третьего слоения переводит в слои третьего слоения.

Действительно, уравнения $\omega_1^i = 0$, $\omega_2^i = 0$ и $\omega_1^i + \omega_2^i = 0$ влекут, соответственно, $\bar{\omega}_2^i = 0$, $\bar{\omega}_1^i = 0$ и $\bar{\omega}_1^i + \bar{\omega}_2^i = 0$.

Отображение f переводит ткань W в ткань W , но меняет местами слои первых двух слоений. Поэтому, как это принято в теории квазигрупп (см., например, [5]), такое преобразование ткани будем называть *главной автотопией*.

Как видно из системы (5), ее решение зависит от $2r + \rho$ параметров, где ρ — ранг системы форм ω_j^i . Следовательно, рассматриваемая три-ткань W допускает $2r + \rho$ -параметрическое семейство главных автотопий.

Эти автотопии, очевидно, сохраняют каноническую связность Черна три-ткани (определяемую структурными уравнениями (3) и (4)). В частности, они переводят геодезические подмногообразия в геодезические.

Поскольку множество автотопий рассматриваемой три-ткани W зависит от $2r + \rho$ параметров, то среди них имеются, вообще говоря, такие, которые обладают неподвижными точками. В неподвижной точке координаты образа и прообраза совпадают, следовательно, в такой точке $\omega_1^i = \bar{\omega}_1^i$, $\omega_2^i = \bar{\omega}_2^i$, так что две первые серии уравнений (5) отображения f совпадают и принимают вид $\omega_1^i = -\omega_2^i$. Но это уравнения третьего слоения ткани W . Проинтегрировав их, получим уравнение

третьего слоения в некоторых локальных координатах:

$$z_0 = F(x, y), \quad (6)$$

где F — функция ткани, x, y, z_0 — параметры, соответственно, первого второго и третьего слоений ткани W , причем параметры x и y являются переменными, а z_0 фиксировано. Согласно определению функции ткани получаем, что соответствующие слои первых двух слоений отображения f , определяемого уравнением (6), пересекаются в точках слоя третьего слоения, определяемого уравнением $z = z_0$. Таким образом, отображение f является симметрией относительно этого слоя.

С другой стороны, x и y являются локальными координатами неподвижной точки. Итак, доказано

Предложение 3. *Существуют главные автотопии ткани W , которые являются симметриями относительно слоев третьего слоения, причем последние представляют собой многообразия неподвижных точек этих автотопий.*

Отсюда вытекает, во-первых, что множество главных автотопий ткани W , допускающих неподвижные точки, зависит от r параметров.

Во-вторых, из того факта, что отображение f , допускающее неподвижные точки, является симметрией относительно слоя третьего слоения и из предложения 2 вытекает, что на три-ткани W замыкаются средние фигуры Бола, что и доказывает теорему 1.

2. Рассмотрим, например, шестимерную три-ткань Бола [6], которая является также эластичной тканью (ткань E_1 , см. [4], стр. 157):

$$\begin{aligned} z^1 &= x^1 + y^1 - (x^2 + y^2)x^3y^3, \\ z^2 &= x^2 + y^2, \\ z^3 &= x^3 + y^3 \end{aligned} \quad (7)$$

Уравнения (7) получены в результате интегрирования структурных уравнений. В процессе интегрирования были найдены следующие формы, входящие в структурные уравнения (3) и (4) (не указанные формы равны нулю):

$$\begin{aligned}\omega_1^1 &= -udx^2 - (w + x^2y^3)dx^3 + x^2x^3dx^3 + dx^1, \\ \omega_2^1 &= -udy^2 - (w + y^2x^3)dy^3 + y^2y^3dy^3 + dy^1, \\ \omega_1^2 &= \varphi(-vdx^3 + dx^2), \quad \omega_2^2 = \varphi(-vdy^3 + dy^2), \\ \omega_1^3 &= \varphi^{-\frac{1}{2}}dx^3, \quad \omega_2^3 = \varphi^{-\frac{1}{2}}dy^3,\end{aligned}\tag{8}$$

и

$$\begin{aligned}\omega_2^1 &= \varphi^{-1}du, \quad \omega_3^2 = \varphi^{\frac{3}{2}}dv, \\ \omega_3^1 &= \varphi^{\frac{1}{2}}(x^2dy^3 + y^2dx^3 + vdu + dw),\end{aligned}\tag{9}$$

где x^i, y^i и u, v, w — соответственно, главные и вторичные параметры, причём

$$x^3 - y^3 = 2\varphi^{\frac{1}{2}}.\tag{10}$$

Формы (8) и (9) удовлетворяют некоторой системе внешних квадратичных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. При этом все 9 форм (а, следовательно, и все 9 перечисленных параметров) являются независимыми.

Система (5) для этой ткани принимает вид:

$$\begin{aligned}-udx^2 - (w + x^2y^3)dx^3 + x^2x^3dx^3 + dx^1 &= \\ = \bar{u}d\bar{y}^2 + (\bar{w} + \bar{y}^2\bar{x}^3)d\bar{y}^3 - \bar{y}^2\bar{y}^3d\bar{y}^3 - d\bar{y}^1, \\ -udy^2 - (w + y^2x^3)dy^3 + y^2y^3dy^3 + dy^1 &= \\ = \bar{u}d\bar{x}^2 + (\bar{w} + \bar{x}^2\bar{y}^3)d\bar{x}^3 - \bar{x}^2\bar{x}^3d\bar{x}^3 - d\bar{x}^1, \\ \varphi(-vdx^3 + dx^2) &= -\bar{\varphi}(-\bar{v}d\bar{y}^3 + d\bar{y}^2), \\ \varphi(-vdy^3 + dy^2) &= -\bar{\varphi}(-\bar{v}d\bar{x}^3 + d\bar{x}^2), \\ \varphi^{-\frac{1}{2}}dx^3 &= -\bar{\varphi}^{-\frac{1}{2}}d\bar{y}^3, \\ \bar{\varphi}^{-\frac{1}{2}}d\bar{x}^3 &= -\varphi^{-\frac{1}{2}}dy^3\end{aligned}\tag{11}$$

и

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1} du &= \bar{\varphi}^{-1} d\bar{u}, \quad \varphi^{\frac{3}{2}} dv = \\
&= \bar{\varphi}^{\frac{3}{2}} d\bar{v}, \\
\varphi^{\frac{1}{2}} (x^2 dy^3 + y^2 dx^3 + v du + dw) &= \\
&= \bar{\varphi}^{\frac{1}{2}} (\bar{x}^2 d\bar{y}^3 + \bar{y}^2 d\bar{x}^3 + \bar{v} d\bar{u} + d\bar{w}).
\end{aligned} \tag{12}$$

Здесь, как и выше,

$$\bar{x}^3 - \bar{y}^3 = 2\bar{\varphi}^{\frac{1}{2}}. \tag{13}$$

Последовательно интегрируя эту систему, найдем конечные уравнения преобразования:

$$\begin{aligned}
\bar{\varphi} &= k\varphi, \quad \bar{u} = ku + p, \quad \bar{v} = k^{-\frac{3}{2}}v + q, \\
\bar{x}^2 &= -k^{-1}y^2 - k^{\frac{1}{2}}qy^3 + \bar{x}_0^2, \quad \bar{y}^2 = -k^{-1}x^2 - k^{\frac{1}{2}}qx^3 + \bar{y}_0^2, \\
\bar{x}^3 &= -k^{\frac{1}{2}}y^3 + \bar{x}_0^3, \quad \bar{y}^3 = -k^{\frac{1}{2}}x^3 + \bar{y}_0^3, \\
\bar{x}^1 &= -y^1 - pk^{-1}y^2 - k^{\frac{1}{2}}pqy^3 - k^{\frac{1}{2}}\bar{w}_0y^3 - \\
&\quad \frac{1}{2}k(\bar{x}_0^2 + \bar{y}_0^2)(y^3)^2 + \frac{1}{3}k^{\frac{3}{2}}(y^3)^3 + \bar{x}_0^1, \\
\bar{y}^1 &= -x^1 - pk^{-1}x^2 - k^{\frac{1}{2}}pqx^3 - k^{\frac{1}{2}}\bar{w}_0x^3 - \\
&\quad \frac{1}{2}k(\bar{x}_0^2 + \bar{y}_0^2)(x^3)^2 + \frac{1}{3}k^{\frac{3}{2}}(x^3)^3 + \bar{y}_0^1, \\
\bar{w} &= k^{-\frac{1}{2}}w - kqx^3y^3 - kqu + k^{\frac{1}{2}}\bar{x}_0^2x^3 + k^{\frac{1}{2}}\bar{y}_0^2y^3 + \bar{w}_0.
\end{aligned} \tag{14}$$

Здесь $k, p, q, \bar{x}_0^1, \bar{y}_0^1, \dots, \bar{w}_0$ — постоянные интегрирования. Из этих уравнений находим, в частности, что $\bar{x}^3 - \bar{y}^3 = k^{\frac{1}{2}}(x^3 - y^3) + \bar{x}_0^3 - \bar{y}_0^3 = 0$. Отсюда в силу равенств (10) и (13) получаем

$$\bar{x}_0^3 = \bar{y}_0^3. \tag{15}$$

Непосредственно проверяется, что при преобразованиях (14) слои третьего слоения рассматриваемой ткани E_1 переходят также в слои третьего слоения.

Неподвижные точки преобразования (12) определяются из условия $x^i = \bar{x}^i$, $y^i = \bar{y}^i$, в силу которого из (10) и (13) находим, что $\varphi = \bar{\varphi}$, и из (12) следует $k = 1$. В результате уравнения (14) дают:

$$\begin{aligned}
 x^3 + y^3 &= \bar{x}_0^3, \\
 x^2 + y^2 &= -qy^3 + \bar{x}_0^2 = -qx^3 + \bar{y}_0^2, \\
 x^1 + y^1 &= -py^2 - pqy^3 - \bar{w}_0y^3 - \frac{1}{2}(\bar{x}_0^2 + \bar{y}_0^2)(y^3)^2 + \\
 &+ \frac{1}{3}(y^3)^3 + \bar{x}_0^1 = \\
 &= -px^2 - pqx^3 - \bar{w}_0x^3 - \frac{1}{2}(\bar{x}_0^2 + \bar{y}_0^2)(x^3)^2 + \frac{1}{3}(x^3)^3 + \bar{y}_0^1, \\
 \bar{u} &= u + p, \quad \bar{v} = v + q, \\
 \bar{w} &= w - qx^3y^3 - qu + \bar{x}_0^2x^3 + \bar{y}_0^2y^3 + \bar{w}_0.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Уравнений (16) содержат 5 соотношений на локальные координаты x^i и y^i . Таким образом, получается следующий вывод: *преобразование (14) ткани E_1 содержит неподвижные точки при условии $k = 1$, причем множество неподвижных точек является, вообще говоря, одномерным.*

Как видно из уравнений (16), максимальная размерность многообразия неподвижных точек может быть 3, причем, как легко проверить, это достигается при условии, что во второй и третьей сериях уравнений (16) остается по одному независимому уравнению. Простое вычисление показывает, что *преобразование (14) ткани E_1 содержит трехмерное многообразие неподвижных точек при условии $k = 1, p = q = 0, \bar{x}_0^1 = \bar{x}_0^2 = 0, \bar{y}_0^1 = \bar{y}_0^2 = 0, \bar{w}_0 = -\bar{x}_0^2\bar{x}_0^3$. Таких преобразований трехпараметрическое семейство, и их неподвижные точки являются слоями третьего слоя ткани E_1 .*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Аквис М.А.; Шелехов А.М. О вычислении тензоров кривизны и кручения многомерной три-ткани. Сиб.мат.ж., 1971, т.12, 5, с. 953–960.
- [2] Федорова, В.И. Об условии, определяющем многомерные три-ткани Бола. Сиб.мат.ж., 1978, т.19, 4, с. 922–928.
- [3] Толстихина Г.А., Шелехов А.М. О три-ткани Бола, образованной слоениями разных размерностей. Изв. Вузов. Математика.- 2005.- № 5 (516). - с. 56-62.
- [4] Аквис М.А., Шелехов А.М. Geometry and Algebra of Multidimensional Three-webs. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 1992, 375 pp.
- [5] Белоусов, В.Д. Основы теории квазигрупп и луп. М., Наука, 1967, 223 с.
- [6] Федорова, В.И. Шестимерные три-ткани Бола с симметричным тензором a^{ij} . В сб. "Ткани и квазигруппы Калинин, Калининский госуниверситет, 1981, с. 110–123.

J. B. Cooper

Johannes Kepler Universität, Linz, Austria

E-mail: cooper@bayou.uni-linz.ac.at

T. Russell

Santa Clara University, USA

E-mail: trussell@scu.edu

On Samuelson Submanifolds in Four Space

The object of study in this talk is a general class of submanifolds of \mathbf{R}^4 . The motivation for this work was the derivation of the following equation which answered a question posed by the distinguished economist P. A. Samuelson.

1. THE HOLY GRAIL EQUATION

The Holy Grail Equation has the following form:

$$\begin{aligned} & -b^3 \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} - a^3 \frac{\partial^2 b}{\partial y^2} + 2 \left(\frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial x} \right)^2 - 2b^2 \left(\left(\frac{\partial a}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 a}{\partial x \partial y} \right) \\ & + a^2 \left(b \frac{\partial^2 b}{\partial y^2} - 2 \left(\left(\frac{\partial b}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 b}{\partial x \partial y} \right) \right) \\ & + a \left(b^2 \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} + \frac{\partial b}{\partial y} \left(3 \frac{\partial a}{\partial y} - 4 \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial b}{\partial x} + 2b \left(2 \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial^2 a}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 b}{\partial x \partial y} \right) \right) \right) \\ & + \left(\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} \right) + b \left(\frac{\partial b}{\partial y} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y} \right) \left(-4 \frac{\partial a}{\partial y} + 3 \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} \right) = 0. \end{aligned}$$

We will discuss the origins of this equation below.

We turn to our central definition. For reasons which will soon be apparent, we write (x, y, u, v) for the coordinates of a typical point of \mathbf{R}^4 . Consider such a point. If it lies on a given two dimensional

submanifold M then by the implicit function theorem, indeed by the definition of a submanifold, there is a neighbourhood of U of (x, y, u, v) so that $U \cap M$ is the graph of a smooth function. There are 6 possibilities:

- I. u and v as functions of x and y ,
- II. x and y as functions of u and v ,
- III. u and x as functions of v and y ,

and the 3 analogous cases: u and y as functions of v and x , v and x as functions of u and y resp. u and x as functions of v and y .

We say that M is a Samuelson submanifold if, in case I, $u = f(x, y)$, $v = g(x, y)$, where f and g satisfy the equations

$$\begin{aligned} &\left(\frac{g_2}{J} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{g_1}{J} \frac{\partial}{\partial y}\right) \left(-\frac{f_2}{J} \frac{\partial J}{\partial x} + \frac{f_1}{J} \frac{\partial J}{\partial y}\right) = \\ &\left(\frac{g_2}{J} \frac{\partial J}{\partial x} + \frac{g_1}{J} \frac{\partial J}{\partial y}\right) \left(-\frac{f_2}{J} \frac{\partial J}{\partial x} + \frac{f_1}{J} \frac{\partial J}{\partial y}\right). \end{aligned}$$

Here J is the Jacobi-determinant $f_1g_2 - f_2g_1$ - subscripts denote partial derivatives.

In case II we demand that

$$J^{-1} J_{uv}^{-1} = J_u J_v$$

where $J^{-1} = f_1g_2 - f_2g_1$ and $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$.

In case III with $u = f(v, x)$, $y = g(v, x)$, the required equation is

$$J \frac{1}{f_2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial J}{\partial v} - \frac{f_1}{f_2} \frac{\partial J}{\partial y}\right) = \frac{1}{f_2} \frac{\partial J}{\partial y} \left(\frac{\partial J}{\partial v} - \frac{f_1}{f_2} \frac{\partial J}{\partial y}\right)$$

where $J = -f_1/g_2$.

Thus definition is motivated by the concept of a Samuelson configuration which was introduced in [9] following a suggestion of Professor Samuelson. In view of further applications it seems to be advantageous to introduce the more symmetric version above. The relation between the two concepts is clarified below.

2. THE CONNECTION WITH WEBS

For the general concept of webs, we refer to the classical text [6]. A more modern version is in [1]. In this paper we will only be concerned with 1-webs in 2-space.

The relation between the above notion and the subject of webs lies in the following simple observation.

Suppose we have such a manifold. Then this, generically, describes a two web in \mathbb{R}^2 as follows: we project the manifold successively onto the (x, y, u) and (x, y, v) spaces and then consider the intersections with planes parallel to the (x, y) plane.

At this point, we describe briefly various ways to specify webs in the plane:

- (1) As the level curves $u(x, y) = c$ of a smooth real valued function. (*Example:* if $u(x, y) = x^2 + y^2$ we get the family of concentric circles centered at the origin.)
- (2) As indexed families $x = c_1(\lambda, t)$, $y = c_2(\lambda, t)$ of parametrized curves. (*Example:* $x = \lambda \cos t$, $y = \lambda \sin t$ describes the same family.)
- (3) As the flow lines of a vector field $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ i.e. the solution curves of the system

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= F_1(x(t), y(t)) \\ \frac{dy}{dt} &= F_2(x(t), y(t)).\end{aligned}$$

(*Example:* $\mathbf{F} = (-y, x)$ again produces the family of concentric circles.)

- (4) As the family of solutions of the differential equation $\frac{dy}{dx} = a(x, y)$ for a given smooth functions on the plane ($a(x, y)$ is the gradient of the curve through (x, y)). This can be regarded as a special case of 3 where \mathbf{F} is the directional field $(1, a(x, y))$, (the concentric circles correspond to $a(x, y) = -\frac{x}{y}$).

A key point in our discussion is the fact that these associations are not uniquely determined. Thus if we are given two functions u and v , then their level curves form a 2-web in \mathbb{R}^2 . However these webs do not uniquely determine u and v . This is the motivation for the following definition.

Let u be a smooth real-valued function on the plane. Then a *recalibration* of u is a function of the form $U = \phi \circ V$ where ϕ is a diffeomorphism between open intervals of \mathbb{R} . More formally, U is a member of the orbit of u under the group of diffeomorphisms of the line (more accurately, the pseudo-group of diffeomorphisms of the above type).

We now turn to our main result which gives various characterizations of Samuelson submanifolds and which we will formulate in the spirit of classical differential geometry (i.e. without detailing what may occur in non-generic cases). Hence the quotation marks around the word equivalent in our formulation.

Let be M a 2-manifold in \mathbb{R}^4 , \mathcal{W} the 2-web it induces on \mathbb{R}^2 (i.e. the configuration of two webs).

Then following concepts are “equivalent”:

- (1) M is a Samuelson submanifold.
- (2) \mathcal{W} is an S -configuration [9].
- (3) The Jacobi-determinant $J = u_x v_y - u_y v_x$ splits multiplicatively as a function of u and v .
- (4) The gradient fields $a(x, y)$ and $b(x, y)$ of the webs satisfy the Holy Grail equation.
- (5) The derivative of the differential form

$$\operatorname{div} \mathbf{F} \cdot \omega_1 - \omega_1([\mathbf{F}, \mathbf{G}])\omega_2$$

vanishes. Here ω_1 and ω_2 are the differential forms dual to the bases generated by the fields \mathbf{F}, \mathbf{G} . In coordinates,

$$\omega_1 = \frac{1}{F_1 G_2 - G_2 F_1} (G_2, -G_1)$$

and

$$\omega_2 = \frac{1}{F_1 G_2 - G_2 F_1} (-F_2, F_1).$$

(6) There are two vector fields \mathbf{F} and \mathbf{G} with

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \operatorname{div} \mathbf{G} = [\mathbf{F}, \mathbf{G}] = 0$$

so that the webs consist of the flow lines of \mathbf{F} and \mathbf{G} resp.

(7) There are recalibrations U and V of u and v for which the Jacobi-determinant is 1.

In the formulation of the next conditions we remark that $\operatorname{Diff}(\mathbb{R})^2$ acts on $\mathbb{R}^4(\mathbb{R}^5)$ and so on the family of submanifolds of $\mathbb{R}^4(\mathbb{R}^5)$ via the formula

$$\begin{aligned} (x, y, u, v) &\mapsto (x, y, \phi(u), \psi(v)) \\ (x, y, u, v, E) &\mapsto (x, y, \phi(u), \phi(\psi), E). \end{aligned}$$

(8) M is equivalent to a Lagrangian submanifold of \mathbb{R}^4 with the canonical symplectic structure $x \wedge y - u \wedge v$, under this group action.

(9) The manifold is equivalent to the projection of a Legendrian submanifold of \mathbb{R}^5 onto \mathbb{R}^4 , when we regard \mathbb{R}^5 as a contact manifold with the differential form $E \pm x dv \pm u dy$. (The four possible choices of sign depend on which of the four cases in III above holds) [4].

We remark that in [17] Tabachnikov has introduced a connection on 2-webs in the symplectic space $(\mathbb{R}^2, x \wedge y)$ where he states that any of the above conditions is equivalent to the vanishing of this connection.

We mention briefly connections with themes in economics, cartography, thermodynamics, elementary geometry.

3. ECONOMICS

The first use of the mathematical theory of webs in economics was by Debreu, [11, 12]. Debreu had earlier obtained conditions for a preference ordering to be representable by a numerical function, Debreu [10]. Once such a function exists, it was natural for

economists to ask when it would be additively separable. Debreu showed that this question was equivalent to requiring that a 3-web in the plane given by the level curves of the function, the verticals, and the horizontals be equivalent to the trivial 3-web. This in turn required the satisfaction of the Blasche/Thomsen/Bol hexagon condition, Thomsen [18], Blaschke [5], see also Vind [19] and Wakker [20].

Here we will use web theory in a quite different way. As noted in the introduction, the original motivation for the derivation of the Holy Grail equation was to provide a test for the presence of maximization processes in economics. Such processes, Samuelson [16], are mathematically equivalent to the processes of classical thermodynamics. In this section we will show how web theory can also be used to provide a test for maximizing behavior. We focus on the economic situation, but, suitably reinterpreted, the underlying ideas are equally applicable to classical thermodynamics.

We use the same framework as Samuelson [16]. We consider a firm which hires 2 inputs, say \mathbf{L}_1 and \mathbf{L}_2 , at competitive prices \mathbf{W}_1 and \mathbf{W}_2 respectively. The firm sells its output as a monopolist into a downward sloping demand function. In principle we can experimentally construct two families of demand functions. The first, steeper, family, $\mathbf{L}_1(\mathbf{W}_1, \overline{\mathbf{L}}_2)$ gives the demand for \mathbf{L}_1 at input price \mathbf{W}_1 when \mathbf{L}_2 , the quantity of the other input, is held fixed. The second, flatter family $\mathbf{L}_1(\mathbf{W}_1, \overline{\mathbf{W}}_2)$, gives the demand when the price of the second input is held fixed, see Samuelson [16].

As discussed earlier, view this data as a 2-web given by the projection of a manifold in \mathbb{R}^4 onto 3-dimensional $\mathbf{W}_1\mathbf{L}_1\mathbf{W}_2$ and $\mathbf{W}_1\mathbf{L}_1\mathbf{L}_2$ space respectively, the resulting projected manifold being then intersected by planes parallel to the $\mathbf{W}_1\mathbf{L}_1$ plane.

A key question in economics is the identification of the conditions on this 2-web necessary for the firm to be acting so as to maximize profits. Samuelson proposed the following simple test.

Samuelson Maximization Test: A firm whose input demand data is given by a 2-web cannot be a profit maximizer unless $ab =$

cd , where a, b, c, d are areas of quadrilaterals bounded by “threads” of the web.

As Tabachnikov has shown, Tabachnikov [17], when the Samuelson area condition is satisfied, the 2-web is trivial under an area preserving transformation. Thus we can calibrate the leaves of the web in such a way that there is unit area between the threads labeled x and $x + 1$ and y and $y + 1$, for each respective member of the family. In classical thermodynamics this calibration corresponds to the passage from empirical temperature and entropy to absolute temperature and entropy. In economics this recalibration is not possible, so the relevant test for maximization is whether or not the already calibrated 2-web, when trivialized to the horizontal/vertical web already satisfies the equal area condition.

Tabachnikov [17] gives a further characterization of the profit maximizing condition. If we place the standard area (symplectic) form $d\mathbf{L}_1 \wedge d\mathbf{W}_1$ on \mathbb{R}^2 , the 2-web of factor demands is a Lagrangian 2-web since all curves on the symplectic plane are Lagrangian sub-manifolds. Tabachnikov’s theorem 0.1 now applies directly and a symplectic, torsion free, connection (the Hess connection [15], can be associated with the web. As Tabachnikov shows, when the Samuelson test is satisfied with equality, this connection is flat. This provides an alternative characterization of profit maximizing behavior.

Finally we note that if we impose the standard symplectic form

$$d\mathbf{L}_1 \wedge d\mathbf{W}_1 + d\mathbf{L}_2 \wedge d\mathbf{W}_2$$

on \mathbb{R}^4 , the 2-dimensional sub-manifold is a Lagrangian sub-manifold of \mathbb{R}^4 . This means that the mapping from $\mathbf{L}_1, \mathbf{W}_1$ to $\mathbf{L}_2, \mathbf{W}_2$ is area preserving and orientation reversing as we have just seen. Since maximizing economic processes take place on Lagrangian sub-manifolds, economics, too, succumbs to Weinstein’s Lagrangian creed. That everything is a Lagrangian submanifold [21].

4. CARTOGRAPHY

(The Central Problem of Mathematical Cartography.)

Our starting points are the two basic map projections:

- the Lambert projection which is an equal area projection,
- the Mercator projection which is a conformal projection (see, for example, Brown [7]).

All equal area (conformal) projections arise from the composition of these projections with area preserving maps (conformal maps) of the plane. (We remark that it follows from our main result that a 2 web is the family of meridians resp. parallels of an equal-area projection iff they form an S -configuration.)

The central problems of cartography were to characterize all equal area (conformal) projections whose meridians and parallels are (generalized) circles (cf. [7]).

The conformal case was solved by Lagrange, the equal area case by Gravé, a mathematician at the University of Kiev. In order to get the flavour of Gravé's result, consider the equation

$$\begin{aligned}x &= \delta \cos \frac{u + \epsilon}{k} - \sin \frac{u + \epsilon}{k} \sqrt{2kv + e}, \\y &= \delta \sin \frac{u + \epsilon}{k} + \cos \frac{u + \epsilon}{k} \sqrt{2kv + e}\end{aligned}$$

(δ, ϵ, k, l are parameters), which is taken from article [14] with his solution to the second problem. Then the mapping from (u, v) to (x, y) described by this formula is an equal area mapping of the plane with the required property. Gravé's result consists of a list of analogous formulae which includes all possible equal-area projections with the above property.

We note that it follows easily from the main result that certain special S -configurations can be generated by groups in either of the following ways:

- A) if we are given 2 one-parameter groups of area-preserving transformations $A(t), B(t)$ so that A and B commute, then their orbits form an S -configuration;

B) if $A(t)$ is as above and Γ is a generic curve, then the webs formed by the orbits of A resp. the images of Γ under A form an S -configuration.

It is natural to express the result of Gravé's in terms of such groups. Thus we require one-parametric groups whose orbits are generalized circles. There are three natural candidates:

- the translation group.
- the rotation group.
- the dilatation group.

We can then use these three groups together with an additional generalized circle to generate S -configurations as in B) and hence equal area projections. It turns out that all of Gravé's configurations arise in this manner and this provides a much more accessible version of his characterization.

5. THERMODYNAMICS

Suppose we are given two functions u and v (empirical temperature and empirical entropy). Then the basic facts of thermodynamics are contained in the statement: u and v can be recalibrated to satisfy the Maxwell relations, if and only if their level curves (the "isotherms" and "adiabatics") form an S -configuration. These recalibrations, which are essentially unique, are absolute temperature and absolute entropy.

We remark that this application was our motivation for seeking a more symmetric version of Samuelson's area condition. The equations of state for a thermodynamic substance involve two relationships between the four quantities p, V, T, S (pressure, volume, (empirical) temperature, (empirical) entropy) but there is no necessity (empirical or theoretical) which dictates the choice of dependent and independent variables.

Examples:

- Ideal gas: $u = xy, v = xy^\gamma,$

- Van der Waals gas: $u = (x + \frac{1}{y^2})(y-1)$, $v = (x + \frac{1}{y^2})(y-1)^\gamma$,
- Feynman gas: $u = xy$, $v = xy^{\gamma(xy)}$,
- $u = (x + \frac{1}{y^2})(y-1)$, $v = (x + \frac{1}{y^2})(y-1)^{\gamma((x + \frac{1}{y^2})(y-1))}$.

All of these satisfy the Holy Grail theorem and so have unique recalibrations for which they satisfy the Maxwell relationships. The resulting computations provide insights into the nature of real gases.

6. GEOMETRY

We close with the remark that a number of elegant geometrical configurations which we call Apostol-Tabachnikov configurations are examples of S -configurations and this gives a simple and elegant approach to some of their properties. These are generated by a single curve and a web of tangential curves, one at each point. The second web is obtained by moving the initial curve along the latter in a suitable manner.

- (1) *Apostol configurations.* In this case we move a curve along its tangents. Analytically, thus is given by the equations

$$x(u, v) = c_1(u) + v \frac{(\dot{c}_1(u), \dot{c}_2(u))}{\sqrt{\dot{c}_1^2(u) + \dot{c}_2^2(u)}},$$

$$y(u, v) = c_2(u) + v \frac{(\dot{c}_1(u), \dot{c}_2(u))}{\sqrt{\dot{c}_1^2(u) + \dot{c}_2^2(u)}}.$$

- (2) *Tait-Kneser configurations.* Here the second foliation consists of the family of osculating circles:

$$(x(u, v), y(u, v)) = (c_1(u), c_2(u)) + \begin{bmatrix} \cos v & -\sin v \\ \sin v & \cos v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1(u) - C_1(u) \\ c_2(u) - C_2(u) \end{bmatrix}.$$

($C(u)$ is the center of curvature).

- (3) *Tait-Kneser-Tabachnikov configurations* generated by the curve $y = f(x)$.

$$x(u, v) = u + v,$$

$$y(u, v) = \sum_{r=0}^n \frac{v^r}{r!} f^{(r)}(u).$$

(For these configurations, see references [2], [3] and [13].) In each case it is a routine matter to compute the Jacobi-determinant and to verify that it splits multiplicatively in the required manner.

REFERENCES

- [1] Akivis M.A., Goldberg V.V., Differential geometry of webs, Handbook of differential geometry, Vol 1, Amsterdam, (2000), 1–152.
- [2] Apostol T.M., Mnatsakanian M.A., Tangents and subtangents used to calculate areas, Amer. Math. Monthly, 109, (2002), 900–908.
- [3] Apostol T.M., Mnatsakanian M.A., Subtangents – an aid to visual calculus, Amer. Math. Monthly, 109, (2002), (525–533).
- [4] Arnold V., Contact geometry: the geometrical method of Gibbs' thermodynamics, D. Caldi and G. Mostow (eds.), Proceedings of the Gibbs Symposium, American Mathematical Society, Providence, (1990), 163–179.
- [5] Blaschke, W., Topologische Fragen der Differentialgeometrie 1, Mathematische Zeitschrift, 28, (1928), 150–157.
- [6] Blaschke W., Einführung in die Geometrie der Waben, Stuttgart (1955).
- [7] Brown B.H., Conformal and equi-area world maps, Amer. Math. Monthly, 42, (1935), 212–223.
- [8] Cooper J.B., Russell T., The Surprising Ubiquity of the Samuelson Configuration, Samuelsonian Economics and the Twenty-First Century: Michael Szenberg, Lall Ramrattan, Aron A. Gottesman eds. OUP (2006).
- [9] Cooper J.B., Russell T., Samuelson P.A., Characterizing an Area Condition Associated with Minimizing Systems, Economic Theory, Dynamic and Markets: Essays in Honor of R. Sato, Edited by T. Negishi, R. Ramachandran, K. Mino, Kluwer, Boston, (2001), 391–403.
- [10] Debreu G., Representation of a Preference Ordering by a Numerical Function, Thrall et al., editors, Decision Processes, (1954).
- [11] Debreu G., Cardinal Utility for Even-Chance Mixtures of Pairs of Sure Prospects, Review of Economic Studies, Vol 71, (1959), 174–177.

-
- [12] Debreu G., Topological Methods in Cardinal Utility Theory, *Mathematical Methods in the Social Sciences 1959*, Kenneth J. Arrow, Karlin S. and Suppes P. ed., (1960), 16–26.
 - [13] Fuchs D., Tabachnikov S., *Mathematical Omnibus*, Amer. Math. Soc., Providence, (2007).
 - [14] Gravé, Sur la construction des cartes géographiques, *Journal de Liouville*, 5, 317–361.
 - [15] Hess H., Connections on symplectic manifolds and geometric quantization, *Differential Geometrical Methods in Mathematical Physics (Aix en Provence/Salamanca, 1979)*, *Lecture Notes in Math.*, 836, Springer, Berlin, 153–166, Zbl. 0464.58012 MR 0607691.
 - [16] Samuelson Paul A., Maximum Principles in Analytical Economics, *American Economic Review*, American Economic Association, vol. 62 (3), (1972), 249–262.
 - [17] Tabachnikov S., Geometry of Lagrangian and Legendrian 2-webs, *Differential Geometry and its Applications*, 3, (1993), 265–284.
 - [18] Thomsen G., Un teorema topologico sulle schiere di curve e una caratterizzazione geometrica delle superficie isoterma-asintotiche, *Bollettino della Unione Matematica italiana*, 6, (1927), 80–85.
 - [19] Vind K., *Independence, Additivity, Uncertainty*, Springer, (2002).
 - [20] Wakker P., *Additive Representations of Preferences.*, Springer, (1988).
 - [21] Weinstein A., Symplectic geometry, *Bull. Am. Math. Soc.*, 5, (1981), 1–13.

V. V. Goldberg

New Jersey Institute of Technology, Newark, NJ, USA

E-mail: vladislav.goldberg@gmail.com

V. V. Lychagin

University of Tromsø, Tromsø, Norway

E-mail: lychagin@math.uit.no

Geodesic Webs and PDE Systems of Euler Equations

We find necessary and sufficient conditions for the foliation defined by level sets of a function $f(x_1, \dots, x_n)$ to be totally geodesic in a torsion-free connection and apply them to find the conditions for d -webs of hypersurfaces to be geodesic, and in the case of flat connections, for d -webs ($d \geq n + 1$) of hypersurfaces to be hyperplanar webs. These conditions are systems of generalized Euler equations, and for flat connections we give an explicit construction of their solutions.

Keywords: *web, hyperplanar web, Euler equation, foliation, connection*

1. INTRODUCTION

In this paper we study necessary and sufficient conditions for the foliation defined by level sets of a function to be totally geodesic in a torsion-free connection on a manifold and find necessary and sufficient conditions for webs of hypersurfaces to be geodesic. These conditions has the form of a second-order PDE system for web functions. The system has an infinite pseudogroup of symmetries and the factorization of the system with respect to the pseudogroup leads us to a first-order PDE system. In the planar case (cf. [1]), the system coincides with the classical Euler equation and therefore can be solved in a constructive way. We provide a method to solve the system in arbitrary dimension and flat connection.

© V. V. Goldberg, V. V. Lychagin, 2009

2. GEODESIC FOLIATIONS AND FLEX EQUATIONS

Let M^n be a smooth manifold of dimension n . Let vector fields $\partial_1, \dots, \partial_n$ form a basis in the tangent bundle, and let $\omega^1, \dots, \omega^n$ be the dual basis. Then

$$[\partial_i, \partial_j] = \sum_k c_{ij}^k \partial_k$$

for some functions $c_{ij}^k \in C^\infty(M)$, and

$$d\omega^k + \sum_{i < j} c_{ij}^k \omega^i \wedge \omega^j = 0.$$

Let ∇ be a linear connection in the tangent bundle, and let Γ_{ij}^k be the Christoffel symbols of second type. Then

$$\nabla_i (\partial_j) = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k,$$

where $\nabla_i \stackrel{\text{def}}{=} \nabla_{\partial_i}$, and

$$\nabla_i (\omega^k) = - \sum_j \Gamma_{ij}^k \omega^j.$$

In [1] we proved the following result.

Theorem 1. *The foliation defined by the level sets of a function $f(x_1, \dots, x_n)$ is totally geodesic in a torsion-free connection ∇ if and only if the function f satisfies the following system of PDEs:*

$$(1) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial_i (f_i)}{f_i f_i} - \frac{\partial_i (f_j) + \partial_j (f_i)}{f_i f_j} + \frac{\partial_j (f_j)}{f_j f_j} = \\ & = \sum_k \left(\Gamma_{ii}^k \frac{f_k}{f_i f_i} + \Gamma_{jj}^k \frac{f_k}{f_j f_j} - (\Gamma_{ij}^k + \Gamma_{ji}^k) \frac{f_k}{f_i f_j} \right) \end{aligned}$$

for all $i < j, i, j = 1, \dots, n$; here $f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$.

We call such a system a *flex system*.

Note that conditions (1) can be used to obtain necessary and sufficient conditions for a d -web formed by the level sets of the functions $f_\alpha(x_1, \dots, x_n), \alpha = 1, \dots, d$, to be a *geodesic d -web*, i.e., to have the leaves of all its foliations to be totally geodesic: one should apply conditions (1) to the all web functions $f_\alpha, \alpha = 1, \dots, d$

2.1. Geodesic Webs on Manifolds of Constant Curvature.

In what follows, we shall use the following definition.

Definition 1. We call by $(\text{Flex } f)_{ij}$ the following function:

$$(\text{Flex } f)_{ij} = f_j^2 f_{ii} - 2f_i f_j f_{ij} + f_i^2 f_{jj},$$

where $i, j = 1, \dots, n$, $f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ and $f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.

It is easy to see that $(\text{Flex } f)_{ij} = (\text{Flex } f)_{ji}$, and $(\text{Flex } f)_{ii} = 0$.

Proposition 1. Let (\mathbb{R}^n, g) be a manifold of constant curvature with the metric tensor

$$g = \frac{dx_1^2 + \dots + dx_n^2}{(1 + \kappa(x_1^2 + \dots + x_n^2))^2},$$

where κ is a constant. Then the level sets of a function

$$f(x_1, \dots, x_n)$$

are geodesics of the metric g if and only if the function f satisfies the following PDE system:

$$(2) \quad (\text{Flex } f)_{ij} = \frac{2\kappa(f_i^2 + f_j^2)}{1 + \kappa(x_1^2 + \dots + x_n^2)} \sum_k x_k f_k$$

for all i, j .

Proof. To prove formula (2), first note that the components of the metric tensor g are

$$g_{ii} = b^2, \quad g_{ij} = 0, \quad i \neq j,$$

where

$$b = \frac{1}{1 + \kappa (x_1^2 + \cdots + x_n^2)}.$$

It follows that

$$g^{ii} = g_{ii}^{-1}, \quad g^{ij} = 0, \quad i \neq j.$$

We compute Γ_{jk}^i using the classical formula

$$(3) \quad \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right)$$

and get

$$\begin{aligned} \Gamma_{ii}^k &= 2\kappa x_k b, \quad k \neq i; \quad \Gamma_{ii}^i = -2\kappa x_i b; \quad \Gamma_{ij}^k = 0, \quad i, j \neq k, \quad i \neq j; \\ \Gamma_{ij}^i &= -2\kappa x_j b, \quad i \neq j; \quad \Gamma_{ij}^j = -2\kappa x_i b, \quad i \neq j. \end{aligned}$$

Substituting these values of Γ_{jk}^i into the right-hand side of formula (1), we get formula (2). \square

Note that if $n = 2$, then PDE system (2) reduces to the single equation

$$\text{Flex } f = \frac{2\kappa (x_1 f_1 + x_2 f_2) (f_1^2 + f_2^2)}{1 + \kappa (x_1^2 + x_2^2)},$$

where $\text{Flex } f = (\text{Flex } f)_{12}$.

This formula coincides with the corresponding formula in [1].

We rewrite formula (2) as follows:

$$(4) \quad \frac{(\text{Flex } f)_{ij}}{f_i^2 + f_j^2} = 2\kappa b \sum_k x_k f_k.$$

The left-hand side of equation (4) does not depend on i and j . Thus we have

$$\frac{(\text{Flex } f)_{ij}}{f_i^2 + f_j^2} = \frac{(\text{Flex } f)_{kl}}{f_k^2 + f_l^2}$$

for any i, j, k , and l .

It follows that if

$$(5) \quad (\text{Flex } f)_{ij} = 0$$

for some fixed i and j , then (5) holds for any i and j .

In other words, one has the following result.

Theorem 2. *Let W be a geodesic d -web on the manifold (\mathbb{R}^n, g) given by web-functions $\{f^1, \dots, f^d\}$ such that $(f_k^a)^2 + (f_l^a)^2 \neq 0$ for all $a = 1, \dots, d$ and $k, l = 1, 2, \dots, n$. Assume that the intersection of W with the plane (x_{i_0}, x_{j_0}) , for given i_0 and j_0 , is a linear planar d -web. Then the intersection of W with arbitrary planes (x_i, x_j) are linear webs too.*

2.2. Geodesic Webs on Hypersurfaces in \mathbb{R}^n .

Proposition 2. *Let $(M, g) \subset \mathbb{R}^n$ be a hypersurface defined by an equation $x_n = u(x_1, \dots, x_{n-1})$ with the induced metric g and the Levi-Civita connection ∇ . Then the foliation defined by the level sets of a function $f(x_1, \dots, x_{n-1})$ is totally geodesic in the connection ∇ if and only if the function f satisfies the following system of PDEs:*

$$(6) \quad (\text{Flex } f)_{ij} = \frac{u_1 f_1 + \dots + u_{n-1} f_{n-1}}{1 + u_1^2 + \dots + u_{n-1}^2} (f_j^2 u_{ii} - 2f_i f_j u_{ij} + f_i^2 u_{jj}).$$

Proof. To prove formula (6), note that the metric induced by a surface $x_n = u(x_1, \dots, x_{n-1})$ is

$$g = ds^2 = \sum_{k=1}^{n-1} (1 + u_k^2) dx_k^2 + 2 \sum_{i,j=1(i \neq j)}^{n-1} u_i u_j dx_i dx_j.$$

Thus the metric tensor g has the following matrix:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 + u_1^2 & u_1 u_2 & \dots & u_1 u_{n-1} \\ u_2 u_1 & 1 + u_2^2 & \dots & u_2 u_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1 & u_{n-1} u_2 & \dots & 1 + u_{n-1}^2 \end{pmatrix},$$

and the inverse tensor g^{-1} has the matrix

$$(g^{ij}) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{n-1} (1 + u_k^2)} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \sum_{k=2}^{n-1} (1 + u_k^2) & -u_1 u_2 & \dots & -u_1 u_{n-1} \\ -u_2 u_1 & \sum_{k=1(k \neq 2)}^{n-1} (1 + u_k^2) & \dots & -u_2 u_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -u_{n-1} u_1 & -u_{n-1} u_2 & \dots & \sum_{k=1}^{n-2} (1 + u_k^2) \end{pmatrix}.$$

Computing Γ_{jk}^i by formula (3), we find that

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{u_k u_{ij}}{1 + \sum_{k=1}^{n-1} (1 + u_k^2)}.$$

Applying these formulas to the right-hand side of (1), we get formula (6). □

We rewrite equation (6) in the form

$$(7) \quad \frac{(\text{Flex } f)_{ij}}{f_j^2 u_{ii} - 2f_i f_j u_{ij} + f_i^2 u_{jj}} = \frac{u_1 f_1 + \dots + u_n f_n}{1 + u_1^2 + \dots + u_n^2}.$$

It follows that the left-hand side of (7) does not depend on i and j , i.e., we have

$$\frac{(\text{Flex } f)_{ij}}{f_j^2 u_{ii} - 2f_i f_j u_{ij} + f_i^2 u_{jj}} = \frac{(\text{Flex } f)_{kl}}{f_l^2 u_{kk} - 2f_k f_l u_{kl} + f_k^2 u_{ll}}$$

for any i, j, k and l . This means that if

$$(\text{Flex } f)_{ij} = 0$$

for some fixed i and j , then

$$(\text{Flex } f)_{kl} = 0$$

for any k and l .

In other words, we have a result similar to the result in Theorem 2.

Theorem 3. *Let W be a geodesic d -web on the hypersurface (M, g) given by web functions $\{f^1, \dots, f^d\}$ such that*

$$(f_j^a)^2 u_{ii} - 2f_i^a f_j^a u_{ij} + (f_i^a)^2 u_{jj} \neq 0,$$

for all $a = 1, \dots, d$ and $k, l = 1, 2, \dots, n$. Assume that the intersection of W with the plane (x_{i_0}, x_{j_0}) , for given i_0 and j_0 , is a linear planar d -web. Then the intersection of W with arbitrary planes (x_i, x_j) are linear webs too.

3. HYPERPLANAR WEBS

In this section we consider hyperplanar geodesic webs in \mathbb{R}^n endowed with a flat linear connection ∇ .

In what follows, we shall use coordinates x_1, \dots, x_n in which the Christoffel symbols Γ_{jk}^i of ∇ vanish.

The following theorem gives us a criterion for a web of hypersurfaces to be hyperplanar.

Theorem 4. *Suppose that a d -web of hypersurfaces, $d \geq n + 1$, is given locally by web functions $f_\alpha(x_1, \dots, x_n)$, $\alpha = 1, \dots, d$. Then the web is hyperplanar if and only if the web functions satisfy the following PDE system:*

$$(8) \quad (\text{Flex } f)_{st} = 0,$$

for all $s < t = 1, \dots, n$.

Proof. For the proof, one should apply Theorem 1 to all foliations of the web. \square

In order to integrate the above PDEs system, we introduce the functions

$$A_s = \frac{f_s}{f_{s+1}}, \quad s = 1, \dots, n-1,$$

and the vector fields

$$X_s = \frac{\partial}{\partial x_s} - A_s \frac{\partial}{\partial x_{s+1}}, \quad s = 1, \dots, n-1.$$

Then the system can be written as

$$X_s(A_t) = 0,$$

where $s, t = 1, \dots, n-1$.

Note that

$$[X_s, X_t] = 0$$

if the function f is a solution of (8).

Hence, the vector fields X_1, \dots, X_{n-1} generate a completely integrable $(n-1)$ -dimensional distribution, and the functions

$$A_1, \dots, A_{n-1}$$

are the first integrals of this distribution.

Moreover, the definition of the functions A_s shows that

$$X_s(f) = 0, \quad s = 1, \dots, n-1,$$

also.

As a result, we get that

$$A_s = \Phi_s(f), \quad s = 1, \dots, n-1,$$

for some functions Φ_s .

In these terms, we get the following system of equations for f :

$$\frac{\partial f}{\partial x_s} = \Phi_s(f) \frac{\partial f}{\partial x_{s+1}}, \quad s = 1, \dots, n-1,$$

or

$$(9) \quad \frac{\partial f}{\partial x_s} = \Psi_s(f) \frac{\partial f}{\partial x_n}, \quad s = 1, \dots, n-1,$$

where $\Psi_{n-1} = \Phi_{n-1}$, and

$$\Psi_s = \Phi_{n-1} \cdots \Phi_s$$

for $s = 1, \dots, n-2$.

This system is a sequence of the Euler-type equations and therefore can be integrated. Keeping in mind that a solution of the single Euler-type equation

$$\frac{\partial f}{\partial x_s} = \Psi_s(f) \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

is given by the implicit equation

$$f = u_0(x_n + \Psi_s(f) x_s),$$

where $u_0(x_n)$ is an initial condition, when $x_s = 0$, and Ψ_s is an arbitrary nonvanishing function, we get solutions f of system (8) in the form:

$$f = u_0(x_n + \Psi_{n-1}(f) x_{n-1} + \cdots + \Psi_1(f) x_1),$$

where $u_0(x_n)$ is an initial condition, when

$$x_1 = \cdots = x_{n-1} = 0,$$

and Ψ_s are arbitrary nonvanishing functions.

Thus, we have proved the following result.

Theorem 5. *Web functions of hyperplanar webs have the form*

$$(10) \quad f = u_0(x_n + \Psi_{n-1}(f) x_{n-1} + \cdots + \Psi_1(f) x_1),$$

where $u_0(x_n)$ are initial conditions, when $x_1 = \cdots = x_{n-1} = 0$, and Ψ_s are arbitrary nonvanishing functions.

Example 15. *Assume that $n = 3$,*

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1, \quad f_2(x_1, x_2, x_3) = x_2, \quad f_3(x_1, x_2, x_3) = x_3,$$

and take $u_0 = x_3$, $\Psi_1(f_4) = f_4^2$, $\Psi_2(f_4) = f_4$ in (10). Then we get the hyperplanar 4-web with the remaining web function

$$f_4 = \frac{x_2 - 1 \pm \sqrt{(x_2 - 1)^2 - 4x_1x_3}}{2x_1}.$$

It follows that the level surfaces $f_4 = C$ of this function are defined by the equation

$$x_1(C^2x_1 - Cx_2 + x_3 + C) = 0,$$

i.e., they form a one-parameter family of 2-planes

$$C^2x_1 - Cx_2 + x_3 + C = 0.$$

Differentiating the last equation with respect to C and excluding C , we find that the envelope of this family is defined by the equation

$$(x_2)^2 - 4x_1x_3 - 2x_2 + 1 = 0.$$

Therefore, the envelope is the second-degree cone.

Example 16. Assume that $n = 3$,

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1, \quad f_2(x_1, x_2, x_3) = x_2, \quad f_3(x_1, x_2, x_3) = x_3,$$

and take $u_0 = x_3$, $\Psi_1(f_4) = 1$, $\Psi_2(f_4) = f_4^2$ in (10). Then we get the linear 4-web with the remaining web function

$$f_4 = \left(\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x_2(x_1 + x_3)}}{2x_2} \right)^2.$$

The level surfaces $f_4 = C^2$ of this function are defined by the equation

$$x_2(x_1 + C^2x_2 + x_3 - C) = 0,$$

i.e., they form a one-parameter family of 2-planes

$$x_1 + C^2x_2 + x_3 - C = 0.$$

Differentiating the last equation with respect to C and excluding C , we find that the envelope of this family is defined by the equation

$$4x_1x_2 + 4x_2x_3 - 1 = 0.$$

Therefore, the envelope is the hyperbolic cylinder.

In the next example no one foliation of a web W_3 coincides with a foliation of coordinate lines, i.e., all four web functions are unknown.

Example 17. Assume that $n = 3$ and take

Description 1.

- (i) $u_{01} = x_3, \Psi_1(f_1) = f_1^2, \Psi_2(f_1) = f_1;$
- (ii) $u_{02} = x_3, \Psi_1(f_2) = 1, \Psi_2(f_2) = f_2^2;$
- (iii) $u_{03} = x_3^2, \Psi_1(f_3) = f_3, \Psi_2(f_3) = 1;$
- (iv) $u_{04} = x_3, \Psi_1(f_4) = \Psi_2(f_4) = f_4.$

in (10). Then we get the linear 4-web with the web functions

$$f_1 = \frac{x_2 - 1 \pm \sqrt{(x_2 - 1)^2 - 4x_1x_3}}{2x_1},$$

$$f_2 = \left(\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x_2(x_1 + x_3)}}{2x_2} \right)^2$$

(see Examples 15 and 16) and

$$f_3 = \left(\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x_1(x_2 + x_3)}}{2x_1} \right)^2,$$

$$f_4 = \frac{x_3}{1 - x_1 - x_2}.$$

It follows that the leaves of the foliation X_1 are tangent 2-planes to the second-degree cone

$$(x_2)^2 - 4x_1x_3 - 2x_2 + 1 = 0$$

(cf. Example 15 and 16), the leaves of the foliation X_2 and X_3 are tangent 2-planes to the hyperbolic cylinders

$$4x_1x_2 + 4x_2x_3 - 1 = 0 \text{ and } 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 1 = 0$$

(cf. Example 16), and the leaves of the foliation X_4 are 2-planes of the one-parameter family of parallel 2-planes

$$Cx_1 + Cx_2 + x_3 = 1,$$

where C is an arbitrary constant.

REFERENCES

- [1] *Goldberg, V. V. and V. V. Lychagin* Geodesic webs on a two-dimensional manifold and Euler equations. *Acta Math. Appl.*-2009.-**103** (to appear).

V. V. Lychagin

Department of Mathematics, University of Tromsø (Tromsø, Norway) and Institute of Control Science, Russian Academy of Science (Moscow, Russia)

E-mail: lychagin@yahoo.com

Feedback Equivalence of 1-dimensional Control Systems of the 1-st Order

The problem of local feedback equivalence for 1-dimensional control systems of the 1-st order is considered. The algebra of differential invariants and criteria for the feedback equivalence for regular control systems are found.

Keywords: *differential invariants, invariant differentiation*

1. INTRODUCTION

In this paper we study the problem of local feedback equivalence for 1-dimensional control systems of 1-st order.

As in paper ([8]) we use the method of differential invariants. To this end we consider control systems as underdetermined ordinary differential equations. This gives a representation of feedback transformations as a special type of Lie transformations, and we study and find differential invariants of these representation.

Remark also that from the EDS point of view the case of control systems considered here is equivalent to the case of second order systems considered in ([8]), but from ODE point of view they have different algebras of feedback differential invariants.

To find a structure of the algebra of feedback differential invariants we first find 3 feedback invariant derivations. Then the differential invariants algebra is generated by two basic differential

invariants J and K of orders 2 and 3 respectively and by all their invariant derivations.

This description allows us to find invariants for the formal feedback equivalence problem.

To get a local feedback equivalence we introduce a notion of *regular* control system and connect with such a system a 3-dimensional submanifold Σ in \mathbb{R}^{14} .

The main result of the paper states that two regular control systems are locally feedback equivalent if and only if the corresponding 3-dimensional submanifolds Σ coincide.

2. REPRESENTATION OF FEEDBACK PSEUDOGROUP

Let

$$(1) \quad \dot{x} = F(x, u, \dot{u}),$$

be an autonomous 1-dimensional control system of the 1-st order.

Here the function $x = x(t)$ describes a dynamic of the state of the system, and $u = u(t)$ is a scalar control parameter.

We shall consider this system as an undetermined ordinary differential equation of the first order on sections of 2-dimensional bundle $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, where $\pi : (x, u, t) \mapsto t$.

Let $\mathcal{E} \subset J^1(\pi)$ be the corresponding submanifold. In the canonical jet coordinates $(t, x, u, x_1, u_1, \dots)$ this submanifold is given by the equation:

$$x_1 = F(x, u, u_1).$$

It is known (see, for example, [6]) that Lie transformations in jet bundles $J^k(\pi)$ for 2-dimensional bundle π are prolongations of point transformations, that is, prolongations of diffeomorphisms of the total space of the bundle π .

We shall restrict ourselves by point transformations which are automorphisms of the bundle π .

Moreover, if these transformations preserve the class of systems (1) then they should have the form

$$(2) \quad \Phi : (x, u, t) \rightarrow (X(x), U(x, u), t).$$

Diffeomorphisms of form (2) is called *feedback transformations*. The corresponding infinitesimal version of this notion is a *feedback vector field*, i.e. a plane vector field of the form

$$X_{a,b} = a(x) \partial_x + b(x, u) \partial_u.$$

The feedback transformations in a natural way act on the control systems of type (1):

$$\mathcal{E} \mapsto \Phi^{(1)}(\mathcal{E}),$$

where $\Phi^{(1)} : J^1(\pi) \rightarrow J^1(\pi)$ is the first prolongation of the point transformation Φ .

Passing to functions F , defining the systems, we get the following action on these functions: $\widehat{\Phi} : F \mapsto G$, where the function G is a solution of the equation

$$(3) \quad X_x G = F(X, U, U_x G + U_u u_1).$$

The infinitesimal version of this action leads us to the following representation $X_{a,b} \mapsto \widehat{X}_{a,b}$ of feedback vector fields:

$$(4) \quad \widehat{X}_{a,b} = a \partial_x + b \partial_u + (u_1 b_u + f b_x) \partial_{u_1} + a_x f \partial_f.$$

In this formula $\widehat{X}_{a,b}$ is a vector field on the 4-dimensional space \mathbb{R}^4 with coordinates (x, u, u_1, f) , and this field corresponds to the above action in the following sense.

Each control system (1) determines a 3-dimensional submanifold $L_F \subset \mathbb{R}^4$, the graph of F :

$$L_F = \{f = F(x, u, u_1)\}.$$

Let A_t be the 1-parameter group of shifts along vector field $X_{a,b}$ and let $B_t : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ be the corresponding 1-parameter group of shifts along $\widehat{X}_{a,b}$, then these two actions related as follows

$$L_{A_t(F)} = B_t(L_F).$$

In other words, if we consider an 1-dimensional bundle

$$\kappa : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

where $\kappa((u, u, u_1, f)) = (u, u, u_1)$, then formula (4) defines the representation $X \mapsto \widehat{X}$ of the Lie algebra of feedback vector fields into the Lie algebra of Lie vector fields on $J^0(\kappa)$, and the action of Lie vector fields \widehat{X} on sections of bundle κ corresponds to the action of feedback vector fields on right hand sides of (1)

3. FEEDBACK DIFFERENTIAL INVARIANTS

By a *feedback differential invariant* of order $\leq k$ we understand a function $I \in C^\infty(J^k\kappa)$ on the space of k -jets $J^k(\kappa)$, which is invariant under of the prolonged action of feedback transformations.

Namely,

$$\widehat{X_{a,b}}^{(k)}(I) = 0,$$

for all feedback vector fields $X_{a,b}$.

In what follows we shall omit subscript of order of jet spaces, and say that a function I on the space of infinite jets $I \in C^\infty(J^\infty\kappa)$ is a feedback differential invariant if

$$\widehat{X_{a,b}}^{(\cdot)}(I) = 0,$$

where $\widehat{X_{a,b}}^{(\cdot)}$ is the prolongation of the vector field $X_{a,b}$ in the space of infinite jets $J^\infty\kappa$.

In a similar way one defines a *feedback invariant derivations* as combinations of total derivatives

$$\begin{aligned} \nabla &= A \frac{d}{dx} + B \frac{d}{du} + C \frac{d}{du_1}, \\ A, B, C &\in C^\infty(J^\infty\kappa), \end{aligned}$$

which are invariant with respect to prolongations of feedback transformations, that is,

$$[\widehat{X_{a,b}}^{(\cdot)}, \nabla] = 0$$

for all feedback vector fields $X_{a,b}$.

Remark that for these derivations functions $\nabla(I)$ are differential invariants (of order, as a rule, higher then order of I) for any feedback differential invariant I . This observation allows us to

construct new differential invariants from known ones only by the differentiations.

Recall the construction of the Tresse derivations in our case. Let $J_1, J_2, J_3 \in C^\infty(J^k\kappa)$ be three feedback differential invariants, and let

$$\widehat{d}J_i = \frac{dJ_i}{dx}dx + \frac{dJ_i}{du}du + \frac{dJ_i}{du_1}du_1$$

be their total derivatives.

Assume that we are in a domain \mathcal{D} in $J^k\kappa$, where

$$\widehat{d}J_1 \wedge \widehat{d}J_2 \wedge \widehat{d}J_3 \neq 0.$$

Then, for any function $V \in C^\infty(J^l\kappa)$ over domain \mathcal{D} , one has decomposition

$$\widehat{d}V = \lambda_1\widehat{d}J_1 + \lambda_2\widehat{d}J_2 + \lambda_3\widehat{d}J_3.$$

Coefficients λ_1, λ_2 and λ_3 of this decomposition are called the *Tresse derivatives* of V and are denoted by

$$\lambda_i = \frac{DV}{DJ_i}.$$

The remarkable property of these derivatives is the fact that they are feedback differential invariants (of higher, as a rule, order than V) each time when V is a feedback differential invariant.

In other words, the Tresse derivatives

$$\frac{D}{DJ_1}, \frac{D}{DJ_2} \text{ and } \frac{D}{DJ_3}$$

are feedback invariant derivations.

4. DIMENSIONS OF ORBITS

First of all, we remark that the submanifold $\{f = 0\}$ is a singular orbit for the feedback action in the space of 0-jets $J^0\kappa$. The generating function of the feedback vector field $\widehat{X}_{a,b}$ has the form:

$$\phi_{a,b} = a_x f - a f_x - b f_u - (u_1 b_u + f b_x) f_z,$$

and the formula for prolongations of vector fields ([6]) shows that in the space of 1-jets $J^1\kappa$, in addition, we have one more singular orbit $\{f_{u_1} = 0\}$. In similar way, we have one more singular orbit $\{f_{u_1 u_1} = 0\}$ in the space of 2-jets. There are no more additional singular orbits in the spaces of k -jets, when $k \geq 3$.

We say that a point $x_k \in J^k\kappa$ is *regular*, if $f \neq 0, f_{u_1} \neq 0, f_{u_1 u_1} \neq 0$ at this point.

In what follows we shall consider orbits of regular points only.

It is easy to see, that the k -th prolongation of the feedback vector field $\widehat{X}_{a,b}$ depends on $(k + 1)$ -jet of function $a(x)$ and $(k + 1)$ -jet of function $b(x, u)$.

Denote by V_i^k and W_{ij}^k the components of the decomposition

$$\widehat{X}_{a,b}^{(k)} = \sum_{0 \leq i \leq k+1} a^{(i)}(x) V_i^k + \sum_{0 \leq i+j \leq k+1} \frac{\partial^{i+j} b}{\partial x^i \partial u^j} W_{ij}^k.$$

Then, by the construction, the vector fields $V_i^k, 0 \leq i \leq k + 1$, and $W_{ij}^k, 0 \leq i + j \leq k + 1$, generate a completely integrable distribution on the space of k -jets, integral manifolds of which are orbits of the feedback action in $J^k\kappa$.

Straightforward computations show that there are no non trivial feedback differential invariants of the 1-st order.

Let \mathcal{O}_{k+1} be a feedback orbit in $J^{k+1}\kappa$, then the projection $\mathcal{O}_k = \kappa_{k+1,k}(\mathcal{O}_{k+1}) \subset J^k\kappa$ is an orbit too, and to determine dimensions of the orbits one should find dimensions of the bundles: $\kappa_{k+1,k} : \mathcal{O}_{k+1} \rightarrow \mathcal{O}_k$. To do this we should find conditions on functions a and b under which $\widehat{X}_{a,b}^{(k)} = 0$ at a point $x_k \in J^k\kappa$.

Assume that $\widehat{X}_{a,b}^{(k-1)} = 0$ at the point $x_{k-1} \in J^{k-1}\kappa$. Then the vector field $\widehat{X}_{a,b}^{(k)}$ is a $\kappa_{k,k-1}$ -vertical over this point.

Components

$$\frac{d^k \phi}{dx^i du^j} \frac{\partial}{\partial f_{\sigma_{ij}}}$$

of this vector field, where $\sigma_{ij} = (\underbrace{x, \dots, x}_{i\text{-times}}, \underbrace{u, \dots, u}_{j\text{-times}})$, $i + j = k$, and components

$$\frac{d^k \phi}{dx^i du^j du_1} \frac{\partial}{\partial f_{\tau_{ij}}},$$

where $\tau_{ij} = (\underbrace{x, \dots, x}_{i\text{-times}}, \underbrace{u, \dots, u}_{j\text{-times}})$, $i + j = k - 1$ depend on

$$\frac{\partial^{k+1} b}{\partial x^i \partial u^j},$$

and

$$\frac{d^{k+1} a}{dx^{k+1}}$$

respectively.

All others components

$$\frac{d^k \phi}{dx^r du^s du_1^t} \frac{\partial}{\partial f_{\sigma}}$$

are expressed in terms of k -jet of $b(x, u)$ and k -jet of function $a(x)$.

It shows that the bundles: $\kappa_{k,k-1} : \mathcal{O}_k \rightarrow \mathcal{O}_{k-1}$ are $(k + 3)$ -dimensional, when $k > 1$.

Feedback orbits in the space of 2-jets can be found by direct integration of 12-dimensional completely integrable distribution generating by the vector fields $V_i^1, 0 \leq i \leq 3$, and $W_{ij}^1, 0 \leq i + j \leq 2$. Summarizing, we get the following result.

Theorem 1. (1) *The first non-trivial differential invariants of feedback transformations appear in order 2 and they are functions of the basic invariant*

$$J = \frac{f^2 f_{u_1 u_1}}{(u_1 f_{u_1} - f) f_{u_1}^2}.$$

(2) *There are*

$$\frac{k(k+1)}{2} - 2$$

independent differential invariants of pure order k .

- (3) Dimension of the algebra of differential feedback invariants of order $k \geq 2$, is equal to

$$\frac{k^3}{6} + \frac{k^2}{2} - \frac{5k}{3} + 1.$$

- (4) Dimension of the regular feedback orbits in the space of k -jets, $k \geq 2$, is equal to

$$\frac{(k+1)^2}{2} + \frac{23k}{3} + \frac{5}{2}.$$

5. INVARIANT DERIVATIONS

We'll need the following result which allows us to compute invariant derivations.

Assume that an infinitesimal Lie pseudogroup \mathfrak{g} is represented in the Lie algebra of contact vector fields on the manifold of 1-jets $J^1(\mathbb{R}^n)$.

Moreover, we will identify elements \mathfrak{g} with the corresponding contact vector fields, i.e. we assume that elements of \mathfrak{g} have the form X_f (see [6]), where f is the generating function.

Lemma 1. *Let x_1, \dots, x_n be coordinates in \mathbb{R}^n , and let*

$$(x_1, \dots, x_n, u, p_1, \dots, p_n)$$

be the corresponding canonical coordinates in the 1-jet space $J^1(\mathbb{R}^n)$. Then a derivation

$$\nabla = \sum_{i=1}^n A_i \frac{d}{dx_i}$$

is \mathfrak{g} -invariant if and only if functions $A_i \in C^\infty(J^\infty\mathbb{R}^n)$, $j = 1, \dots, n$, are solutions of the following PDE system:

$$(5) \quad X_f(A_i) + \sum_{j=1}^n \frac{d}{dx_j} \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \right) A_j = 0,$$

for all $i = 1, \dots, n$, and $X_f \in \mathfrak{g}$.

Proof. We have, [6]:

$$X_f^\bullet = \mathbf{E}_f - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{d}{dx_i},$$

where

$$\mathbf{E}_f = \sum_{\sigma} \frac{d^{|\sigma|} f}{dx^{\sigma}} \frac{\partial}{\partial p_{\sigma}}$$

is the evolutionary derivation, σ is a multi index and $\{p_{\sigma}\}$ are the canonical coordinates in $J^{\infty}\mathbb{R}^n$.

Using the fact that evolutionary derivations commute with the total ones and the relation

$$[\nabla, X_f^\bullet] = 0,$$

we get

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\sum_{j=1}^n A_j \frac{d}{dx_j}, \mathbf{E}_f - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{d}{dx_i} \right] \\ &= - \sum_j \mathbf{E}_f(A_j) \frac{d}{dx_j} + \sum_{i,j} \left(-A_j \frac{d}{dx_j} \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \right) \frac{d}{dx_i} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{dA_j}{dx_i} \frac{d}{dx_j} \right) \\ &= - \sum_s \left(X_f^\bullet(A_s) + \sum_j A_j \frac{d}{dx_j} \left(\frac{\partial f}{\partial p_s} \right) \right) \frac{d}{dx_s}. \end{aligned}$$

□

In our case we expect three linear independent feedback invariant derivations. To solve PDE system (5) we first assume that the unknown functions are functions on the 1-jet space $J^1\mathbb{R}^3$. Then collect terms in (5) with a, a', a'' and $b, b_x, b_u, b_{xx}, b_{xu}$ and b_{uu} we get the system of 8 differential equations for 3 unknown functions. Solving the system we found two independent invariant derivations. The last one we get in a similar way by assuming that the unknown functions are functions on the 2-jet space $J^2\mathbb{R}^3$.

Finally, we have 3 feedback invariant derivations:

$$\begin{aligned} \nabla_1 &= \frac{u_1 f_{u_1} - f}{f_{u_1}} \frac{d}{du} + \frac{f - u_1 f_{u_1}}{f_{u_1}^2} f_u \frac{d}{du_1}, \\ \nabla_2 &= \frac{f}{f_{u_1}} \frac{d}{du_1}, \\ \nabla_3 &= f \frac{d}{dx} + \frac{f}{f_{u_1}} \frac{d}{du} + \\ &\quad \left(\frac{f_x f_{u_1} + f_u - z f_{u u_1} - f_{x u_1}}{f_{u_1 u_1}} + \frac{u_1 f_{u_1} - f}{f_{u_1}^2} f_u \right) \frac{d}{du_1}. \end{aligned}$$

These derivations obey the following commutation relations

$$\begin{aligned} [\nabla_2, \nabla_1] &= J \nabla_1 \\ [\nabla_3, \nabla_1] &= K \nabla_2 \\ [\nabla_3, \nabla_2] &= -\nabla_3 + J \nabla_1 + L \nabla_2 \end{aligned}$$

where K and L are some differential invariants of the 3rd order (see below).

6. DIFFERENTIAL INVARIANTS OF THE 3-RD ORDER

Theorem 1 shows that there are four independent differential invariants of the 3-rd order. We get three of them simply by invariant differentiations:

$$\nabla_1(J), \nabla_2(J), \nabla_3(J).$$

The symbols of these invariants contain:

- symbol of $\nabla_2(J)$ depends on $f_{u_1 u_1 u_1}$,
- symbol of $\nabla_1(J)$ depends on $f_{u_1 u_1 u_1}$ and $f_{u u_1 u_1}$,
- symbol of $\nabla_3(J)$ depends on $f_{u_1 u_1 u_1}$, $f_{u u_1 u_1}$ and $f_{x u_1 u_1}$.

It shows that these differential invariants are independent.

The similar observation shows that the differential invariant L , which appears in the commutation relations, is a function of

$J, \nabla_1(J), \nabla_2(J), \nabla_3(J)$, and the differential invariant K is the fourth independent invariant. It has the following form:

$$K = -u_1 f_{xu} + 2u_1 \frac{f_u^2}{f f_{u_1}} - 2 \frac{f_u^2}{f_{u_1}^2} + \\ + \frac{f_{uu}u_1 - 2f_u f_x + f f_{xu}}{f_{u_1}} - u_1 \frac{(f_{uu}u_1 - 2f_u f_x)}{f} + \\ + \frac{c_1}{f_{u_1} f_{u_1 u_1}^2} + \frac{c_2}{f f_{u_1 u_1}^2} + \frac{c_3}{f_{u_1 u_1}^2} + \frac{c_4}{f f_{u_1 u_1}} + \frac{c_5}{f_{u_1} f_{u_1 u_1}} + \frac{c_6}{f_{u_1 u_1}},$$

where

$$c_1 = -f f_u f_{xu} f_{u_1 u_1 u_1} - u_1 f_u f_{uu_1} f_{u_1 u_1 u_1} + f_u^2 f_{u_1 u_1 u_1}, \\ c_2 = u_1 (f_u f_{u_1} f_{uu_1 u_1} - f_u^2 f_{u_1 u_1 u_1} - f_x f_u f_{u_1} f_{u_1 u_1 u_1} + f_x f_{u_1}^2 f_{uu_1 u_1}) \\ + u_1^2 f_{uu_1} (-f_{u_1} f_{uu_1 u_1} + f_u f_{u_1 u_1 u_1}), \\ c_3 = f f_{xu_1} f_{uu_1 u_1} + f_x f_u f_{u_1 u_1 u_1} - f_u f_{uu_1 u_1} - f_x f_{u_1} f_{uu_1 u_1} \\ + u_1 (f_u f_{xu_1} f_{u_1 u_1 u_1} - f_{u_1} f_{xu_1} f_{uu_1 u_1} + f_{uu_1} f_{uu_1 u_1}), \\ c_4 = -u_1 (2f_{u_1} f_x f_{uu_1} - f_{u_1} f_u f_{xu_1} + f_u f_{uu_1} + f_{u_1} f_{uu} + f_{u_1}^2 f_{xu}) \\ + u_1^2 (f_{u_1} f_{uuu_1} - f_u f_{uu_1 u_1} + f_{uu_1}^2), \\ c_5 = f f_u f_{xu_1 u_1} - f f_{xu_1} f_{uu_1} + f_u f_{uu_1} + u_1 (f_u f_{uu_1 u_1} - f_{uu_1}^2), \\ c_6 = f_{uu} - f_u f_{xu_1} + 2f_x f_{uu_1} + f_{u_1} f_{xu} - f f_{xuu_1} \\ + u_1 (f_{u_1} f_{xuu_1} - f_{uuu_1} + f_{xu_1} f_{uu_1} - f_u f_{xu_1 u_1}).$$

7. ALGEBRA OF FEEDBACK DIFFERENTIAL INVARIANTS

By *regular orbits* we mean feedback orbits of regular points.

Counting the dimensions of regular feedback orbits shows that the following result is valid.

Theorem 2. *Algebra of feedback differential invariants in a neighborhood of a regular orbit is generated by differential invariant J of the 2-nd order, differential invariant K of the 3-rd order and all their invariant derivatives.*

8. THE FEEDBACK EQUIVALENCE PROBLEM

Consider two control systems given by functions F and G . Then, to establish feedback equivalence, we should solve the differential equation

$$(6) \quad F(X, U, U_x G(x, u, u_1) + U_u u_1) - X_x G(x, u, u_1) = 0$$

with respect to unknown functions $X(x)$ and $U(x, u)$.

Let us denote the left hand side of (6) by H . Then assuming the general position one can find functions X, X_x, U, U_x, U_u from the equations

$$H = H_{u_1} = H_{u_1}^{(2)} = H_{u_1}^{(3)} = H_{u_1}^{(4)} = 0.$$

Remark, that the above general conditions are feedback invariant, depends on finite jet of the system and holds in a dense open domain of the jet space. Therefore, it holds in regular points.

Assume that we get

$$\begin{aligned} U &= A(x, u, u_1), U_x = B(x, u, u_1), \\ U_u &= C(x, u, u_1), X = D(x, u, u_1), \\ X' &= E(x, u, u_1) \end{aligned}$$

Then the conditions

$$\begin{aligned} A_{u_1} &= B_{u_1} = C_{u_1} = D_{u_1} = E_{u_1} = 0, \\ D_u &= E_u = 0 \end{aligned}$$

and

$$B = A_x, C = A_u, E = D_x$$

show that if (6) has a formal solution at each point (x, u, u_1) in a domain then this equation has a local smooth solution.

On the other hand if system F at a point $p = (x^0, u^0, u_1^0)$ and system G at a point $\tilde{p} = (\tilde{x}^0, \tilde{u}^0, \tilde{u}_1^0)$ has the same differential invariants then, by the definition, there is a formal feedback transformation which send the infinite jet of F at the point p to the infinite jet of G at the point \tilde{p} .

Keeping in mind these observations and results of theorem 2 we consider the space \mathbb{R}^3 with coordinates (x, u, u_1) and the space \mathbb{R}^{14} with coordinates $(j, j_1, j_2, j_3, j_{11}, j_{12}, j_{13}, j_{22}, j_{23}, j_{33}, k, k_1, k_2, k_3)$.

Then any control system, given by function $F(x, u, u_1)$, defines a map

$$\sigma_F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{14},$$

by

$$\begin{aligned} j &= J^F, k = K^F, \\ j_i &= (\nabla_i(J))^F, k_i = (\nabla_i(K))^F, \\ j_{ij} &= (\nabla_i \nabla_j(J))^F, \end{aligned}$$

where $i, j = 1, 2, 3$, and the subscript F means that the differential invariants are evaluated due to the system.

Let

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

be a feedback transformation.

Then from the definition of the feedback differential invariants it follows that

$$\sigma_F \circ \Phi = \sigma_{\widehat{\Phi}(F)}.$$

Therefore, the geometrical image

$$\Sigma_F = \text{Im}(\sigma_F) \subset \mathbb{R}^{14}$$

does depend on the feedback equivalence class of F only.

We say that a system F is *regular* in a domain $D \subset \mathbb{R}^3$ if

- (1) 4-jets of F belong to regular orbits,
- (2) $\sigma_F(D)$ is a smooth 3-dimensional submanifold in \mathbb{R}^{14} , and
- (3) three of five functions j, j_1, j_2, j_3, k are coordinates on Σ_F .

Assume, for example, that functions j_1, j_2, j_3 are coordinates on Σ_F . The following lemma gives a relation between the Tresse derivatives and invariant differentiations $\nabla_1, \nabla_2, \nabla_3$.

Lemma 2. *Let*

$$\frac{D}{DJ_1}, \frac{D}{DJ_2}, \frac{D}{DJ_3}$$

be the Tresse derivatives with respect to differential invariants $J_i = \nabla_i(J)$.

Then the following decomposition

$$(7) \quad \nabla_i = \sum_j R_{ij} \frac{D}{DJ_j}$$

with feedback differential invariants R_{ij} of order ≤ 4 is valid.

Proof. Applying both parts of (7) to invariant J_k we get

$$\nabla_i(J_k) = R_{ik}$$

which is a feedback differential invariant of order ≤ 4 . □

Theorem 3. *Two regular systems F and G are locally feedback equivalent if and only if*

$$(8) \quad \Sigma_F = \Sigma_G.$$

Proof. Let us show that the condition 8 implies a local feedback equivalence.

Assume that

$$\begin{aligned} J^F &= j^F(J_1, J_2, J_3), J_{ij}^F = j_{ij}^F(J_1, J_2, J_3), \\ K^F &= k^F(J_1, J_2, J_3), K_i^F = k_i^F(J_1, J_2, J_3) \end{aligned}$$

on Σ_F , and

$$\begin{aligned} J^G &= j^G(J_1, J_2, J_3), J_{ij}^G = j_{ij}^G(J_1, J_2, J_3), \\ K^G &= k^G(J_1, J_2, J_3), K_i^G = k_i^G(J_1, J_2, J_3) \end{aligned}$$

on Σ_G .

Then condition 8 shows that $j^F = j^G, j_{ij}^F = j_{ij}^G, k_i^F = k_i^G$ and $k^F = k^G$.

Moreover, as we have seen the invariant derivations $\nabla_1, \nabla_2, \nabla_3$ are linear combinations of the Tresse derivatives with coefficients which are feedback differential invariants of order ≤ 4 .

In other words, the above functions $j^F, k^F, j_{ij}^F, k_i^F$ and their partial derivatives in j_1, j_2, j_3 determine the restrictions of all differential invariants.

Therefore, condition 8 equalize restrictions of differential invariants not only to order ≤ 4 but in all orders, and provides formal and therefore local feedback equivalence between F and G . \square

REFERENCES

- [1] Agrachev A., Zelenko I., On feedback classification of control-affine systems with one and two-dimensional inputs, arXiv:math/0502031, 2005, pp.1-26
- [2] Cartan E., Les sous-groupes continus de transformations, Ann. Ecole Normale 25 (1908), p. 719-856
- [3] Gardner R.B., Shadwick W.F., Feedback equivalence for general control systems, Systems & Control Letters, 15 (1990), p.15-23
- [4] Hermann R., The theory of equivalence of Pfaffian systems and input systems under feedback, Math. Systems Theory 15 (1982), p. 343-356
- [5] Jakubczyk B., Equivalence and invariants of nonlinear control systems, in Nonlinear controllability and optimal control, ed. Sussmann H.J., NY, Marcel Dekker, 1990.
- [6] Krasilshchik, I. S., Lychagin, V. V., Vinogradov, A. M.,
- [7] Kruglikov B., Lychagin V., Invariants of pseudogroup actions: homological methods and finiteness theorem, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. 3 (2006), no. 5-6, 1131–1165.
- [8] Lychagin V., Feedback Differential Invariants, Acta Appl. Math., 2008 (to appear)
- [9] Respondek W., Feedback classification of nonlinear control systems in R^2 and R^3 , in Geometry of Feedback and Optimal Control, ed. Jakubczyk B. and Respondek W., NY, Marcel Dekker, 1997, p. 347-382

I. Roulstone

University of Surrey, Guildford, UK
E-mail: i.roulstone@surrey.ac.uk

B. Banos

Lycée Chaptal, Saint-Brieuc, France
E-mail: bertrand.banos@wanadoo.fr

J. D. Gibbon

Imperial College London, London, UK
E-mail: j.d.gibbon@ic.ac.uk

V. N. Roubtsov

Université d'Angers, Angers, France and Theory Division, ITP, Moscow, Russia
E-mail: Volodya.Roubtsov@univ-angers.fr

Kähler Geometry and Burgers' Vortices

We study the Navier-Stokes and Euler equations of incompressible hydrodynamics. Taking the divergence of the momentum equation leads, as usual, to a Poisson equation for the pressure: in this paper we study this equation in two spatial dimensions using Monge-Ampère structures. In two dimensional flows where the Laplacian of the pressure is positive, a Kähler geometry is described on the phase space of the fluid; in regions where the Laplacian of the pressure is negative, a product structure is described. These structures can be related to the ellipticity and hyperbolicity (respectively) of a Monge-Ampère equation. We then show how this structure can be extended to a class of canonical vortex structures in three dimensions.

Keywords: *Monge-Ampère equations, Navier-Stokes equations, Euler equations,*

1. INTRODUCTION

A considerable literature exists on the dynamics of vortex tubes, particularly on the topic of the Burgers' vortex (Burgers 1948). In an influential paper that contains substantial references, Moffatt, *et al.* (1994) coined the simile *Burgers' vortices are the sinews of turbulence* and thus identified the heart of the problem; that is, these filament-like vortices stitch together the large-scale anatomy of vortical dynamics. Despite the twisting, bending and tangling they undergo, they appear to be the preferred states of Navier-Stokes turbulent flows. The purpose of this paper is to investigate the enduring subject of turbulence in the light of the recent advances made in the geometry of Kähler manifolds. We believe that evidence exists that suggests that turbulent vortical dynamics may be governed by geometric principles.

The incompressible Navier-Stokes equations, in two dimensions, are

$$(1) \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla P = \nu \nabla^2 \mathbf{u},$$

$$(2) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0.$$

Here, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ is the fluid velocity, the pressure and density of the fluid are denoted by $P(\mathbf{x}, t)$ and $\rho(\mathbf{x}, t)$ respectively, ∇ is the gradient operator and ν is the viscosity; in the inviscid case when $\nu = 0$ we have the Euler equations. The constraint imposed by the incompressibility condition

$$(3) \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

is very severe. It means that the convective derivative of the density vanishes. In turn this means that an initially homogeneous (constant density) fluid remains constant for all time;

$$\rho(\mathbf{x}, 0) = \rho(\mathbf{x}, t) = \text{constant}.$$

Hereafter this density is taken as unity. Moreover, when (3) is applied across (1) it demands that velocity derivatives and the

pressure are related by a Poisson equation

$$(4) \quad -\nabla^2 P = u_{i,j} u_{j,i},$$

where ∇^2 is the Laplace operator (and the summation convention is used with $i, j = 1, 2$).

Burgers' vortices are examples of a *two-and-a-half-dimensional flow*, which can be defined by the class of velocity fields written as (Gibbon *et al.* (1999))

$$(5) \quad \mathbf{u}(x, y, z, t) = \{u_1(x, y, t), u_2(x, y, t), z\gamma(x, y, t)\}.$$

This flow is linear in z in the $\hat{\mathbf{k}}$ -direction; thus it is stretching (or compressing) in that direction but is linked dynamically to its cross-sectional part. The nomenclature refers to the fact that it is neither fully two- nor three-dimensional but lies somewhere in-between¹ Its components must also satisfy the divergence-free condition

$$(6) \quad u_{1,x}(x, y, t) + u_{2,y}(x, y, t) + \gamma(x, y, t) = 0.$$

The class of velocity fields in equation (5), first used in Ohkitani & Gibbon (2000), is a more general classification of Burgers-type solutions and contains the specific form of the Burgers vortex solutions used in Moffatt *et al.* (1994). Included in (5) are the Euler solutions of Stuart (1987, 1991), in which u_1 and u_2 are also linear in x (say) leaving the dependent variables to be functions of y and t . Then stretching can occur in two directions thereby producing sheet-like vortical solutions.

¹In the case of the three-dimensional Euler equations data can become rough very quickly; our manipulations in this paper are therefore purely formal. In fact it has been shown numerically in Ohkitani & Gibbon (2000) and analytically in Constantin (2000) that solutions of the type in (5) can become singular in a finite time, which is consistent with observations that vortex tubes have finite life-times; the singularity is not real in the full three-dimensional Euler sense as it has infinite energy but indicates that the flow will not sustain the structure (5) for more than a finite time. For the possibility of a real Euler singularity see Kerr (1983) and Kerr (2005).

The differences between the three-dimensional and two-dimensional Navier-Stokes equations are fundamental because the vortex stretching term $\omega \cdot \nabla \mathbf{u}$ in the equation for vorticity is present in the former but absent in the latter. Nevertheless, Lundgren (1982) has shown that for two-and-a-half-dimensional flows of the type

$$(7) \quad u_1 = -\frac{1}{2}x\gamma(t) + \psi_y \quad u_2 = -\frac{1}{2}y\gamma(t) - \psi_x \quad u_3 = z\gamma(t)$$

can be mapped into solutions of the two-dimensional Navier-Stokes equations with $\psi(x, y, t)$ as a stream function.

To investigate the geometric structure behind these solutions requires certain technical tools; these are outlined in §2 of this paper. The constraint in equation (4) is the basis of our geometric arguments, and because it is true for both the Navier-Stokes and Euler equations, the conclusions reached in this paper are valid for both cases. It is, of course, to be expected that any geometric structure should be independent of viscosity. From now on when we refer to the Navier-Stokes equations it should be implicitly understood that the Euler equations are also included. The Kähler structure for the two-dimensional Navier-Stokes equations is described in §3 and then formulated for two-and-a-half-dimensional Navier-Stokes flows in §4. Our results show that the necessary condition on the pressure for a Kähler structure to exist in two spatial dimensions (with time entering only as a parameter) for the two-dimensional Navier-Stokes equations is $\nabla^2 P > 0$. This constraint is highly restrictive: by no means all two-dimensional Navier-Stokes flows would conform to it. More promising is the equivalent condition for two-and-a-half dimensional solutions of type (7). Theorem 1 in §4 shows that these two-and-a-half-dimensional solutions have an underlying Kähler structure if $\nabla^2 P$ has a very large negative lower bound, thus associating a wide set of ‘thin’ solutions with the Kähler property. While the existence of a negative finite lower bound suggests some work still needs to be done, this result implies that preferred vortical thin sets have a connection with a

Kähler geometric structure that deserves further study. A different line of enquiry by Gibbon (2002) has shown that the three-dimensional Euler equations has a quaternionic structure in the dependent variables.

The work of Roubtsov & Roulstone (1997, 2001) showed how Kähler structures arise in atmosphere and ocean dynamics. The dynamics of cyclones and anti-cyclones, and ocean eddies, is strongly constrained by the rotation of the Earth, and this feature is key to the ubiquity of almost-complex structures on the phase space of so-called *balanced models* (see McIntyre & Roulstone (2002)). Central to this work is the fact that equations of Monge-Ampère type govern the balance between the wind and pressure distributions. In the context of balanced models, almost-complex structures are the signature of the slowly-evolving, large-scale weather systems in our atmosphere (and in the large-scale eddies in the oceans). The solutions considered in this paper represent the ideal cases of straight tubes or flat sheets; in reality, as indicated in the first paragraph of this section, these vortical objects constantly undergo processes of bending and tangling. Speculatively, it is possible that once this process is underway, solutions move from living on a Kähler manifold in two complex dimensions to other complex manifolds of a higher dimension, although this is a much more difficult mathematical problem to address and further results are presented by Roulstone *et al.* (2008).

This present work emerged from the observation that (4), when used in the context of atmospheric dynamics and modified by a term representing the rotation of the Earth, is often studied as part of a system of balance conditions for the fluid velocity \mathbf{u} when the pressure field is given (and thus it is often considered a generalization of the notion of geostrophic balance). In the case of incompressible flows, this leads to a Monge-Ampère equation for a stream function (Charney 1955), and this was the trigger for our current investigation.

2. DIFFERENTIAL FORMS AND MONGE–AMPÈRE EQUATIONS

In this section we prepare some tools that enable us to study certain partial differential equations arising in incompressible Navier–Stokes flows from the point-of-view of differential geometry. An introduction to the application of some basic elements of exterior calculus to the study of partial differential equations, with application to fluid dynamics, can be found in McIntyre & Roulstone (2002). Here, we shall draw largely on Lychagin *et al.* (1993) and Banos (2002).

A Monge–Ampère equation is a second order partial differential equation, which, for instance in two variables, can be written as follows:

$$(8) \quad A\phi_{xx} + 2B\phi_{xy} + C\phi_{yy} + D(\phi_{xx}\phi_{yy} - \phi_{xy}^2) + E = 0,$$

where A, B, C and D are smooth functions of $(x, y, \phi, \phi_x, \phi_y)$. This equation is elliptic if

$$(9) \quad AC - 4B^2 - DE > 0.$$

In dimension n , a Monge–Ampère equation is a linear combination of the minors of the hessian matrix¹ of ϕ . We shall refer to such equations as *symplectic* Monge–Ampère equations when the coefficients A, B, C and D are smooth functions of $(x, y, \phi_x, \phi_y) \in T^*\mathbb{R}^2$; i.e. they are smooth functions on the quotient bundle $J^1\mathbb{R}^2/J^0\mathbb{R}^2$, where $J^1\mathbb{R}^2$ denotes the manifold of 1-jets on \mathbb{R}^2 .

2.1. Monge–Ampère operators. Lychagin (1979) has proposed a geometric approach to these equations, using differential forms on the cotangent space (i.e. the phase space). The idea is to associate with a form² $\omega \in \bigwedge^n(T^*\mathbb{R}^n)$, where \bigwedge^n denotes the

¹We denote by $\text{hess}(\phi)$ the determinant of the hessian matrix of ϕ . For example, in two variables, $\text{hess}(\phi) = \phi_{xx}\phi_{yy} - \phi_{xy}^2$.

²The use of the Greek letters ω and Ω is common in differential geometry; these symbols should not be confused with the fluid vorticity vector ω .

space of differential n -forms on $T^*\mathbb{R}^n$, the Monge–Ampère equation $\Delta_\omega = 0$, where $\Delta_\omega : C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Omega^n(\mathbb{R}^n) \cong C^\infty(\mathbb{R}^n)$ is the differential operator defined by

$$\Delta_\omega(\phi) = (d\phi)^*\omega,$$

and $(d\phi)^*\omega$ denotes the restriction of ω to the graph of the differential $d\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow T^*\mathbb{R}^n$ of ϕ . A form $\omega \in \bigwedge^n(T^*\mathbb{R}^n)$ is said to be effective if $\omega \wedge \Omega = 0$, where Ω is the canonical symplectic form on $T^*\mathbb{R}^n$. Then the so called Hodge–Lepage–Lychagin theorem tells us that this correspondence between Monge–Ampère equations and effective forms is one to one. For instance, the Monge–Ampère equation (8) is associated with the effective form

$$\omega = Adp \wedge dy + B(dx \wedge dp - dy \wedge dq) + Cdx \wedge dq + Ddp \wedge dq + Edx \wedge dy,$$

where (x, y, p, q) is the symplectic system of coordinates of $T^*\mathbb{R}^2$, and on the graph of $d\phi$, $p = \phi_x$ and $q = \phi_y$. So, for example, if we pull-back the one-form dp to the base space, we have

$$dp = \phi_{xx}dx + \phi_{xy}dy,$$

and then

$$dp \wedge dq = \text{hess}(\phi)dx \wedge dy,$$

where we have also used the skew symmetry of the wedge product.

2.2. Monge–Ampère structures. The geometry of Monge–Ampère equations in n variables can be described by a pair

$$(\Omega, \omega) \in \bigwedge^2(T^*\mathbb{R}^n) \times \bigwedge^n(T^*\mathbb{R}^n)$$

such that

- (1) Ω is symplectic; that is, nondegenerate ($\Omega \wedge \Omega \neq 0$) and closed ($d\Omega = 0$)
- (2) ω is effective; that is, $\omega \wedge \Omega = 0$.

Such a pair is called a Monge–Ampère structure. In four dimensions (that is $n = 2$), this geometry can be either complex or real and this distinction coincides with the usual distinction between elliptic and hyperbolic, respectively, for differential equations in

two variables. Indeed, when $\omega \in \Lambda^2(T^*\mathbb{R}^2)$ is a non-degenerate 2-form ($\omega \wedge \omega \neq 0$), one can associate with the Monge–Ampère structure $(\Omega, \omega) \in \Lambda^2(T^*\mathbb{R}^2) \times \Lambda^2(T^*\mathbb{R}^2)$ the tensor I_ω defined by

$$\frac{1}{\sqrt{|\text{pf}(\omega)|}}\omega(\cdot, \cdot) = \Omega(I_\omega \cdot, \cdot)$$

where $\text{pf}(\omega)$ is the pfaffian of ω : $\omega \wedge \omega = \text{pf}(\omega)(\Omega \wedge \Omega)$. Thus, for the effective form ω associated with the Monge–Ampère equation (8), the $\text{pf}(\omega)$ coincides with (9). This tensor is either an almost complex structure or an almost product structure:

- (1) Δ_ω is elliptic $\Leftrightarrow \text{pf}(\omega) > 0 \Leftrightarrow I_\omega^2 = -Id$
- (2) Δ_ω is hyperbolic $\Leftrightarrow \text{pf}(\omega) < 0 \Leftrightarrow I_\omega^2 = Id$

and it is integrable if and only if

$$(10) \quad d\left(\frac{1}{\sqrt{|\text{pf}(\omega)|}}\omega\right) = 0.$$

Given a pair of two-forms (Ω, ω) on $T^*\mathbb{R}^n$, such that $\omega \wedge \Omega = 0$, then by fixing the volume form in terms of Ω , we can define a pseudo-riemannian metric g_ω in terms of the quadratic form

(11)

$$g_\omega(X, Y) = \frac{\iota_X \Omega \wedge \iota_Y \omega + \iota_Y \Omega \wedge \iota_X \omega}{\Omega \wedge \Omega} \wedge \pi^*(vol), \quad X, Y \in T\mathbb{R}^n,$$

where vol is the volume form on \mathbb{R}^n and $\pi : T^*\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$. We can now identify our Monge–Ampère equation given by ω with an almost Kähler structure given by the triple $(\mathbb{R}^n, g_\omega, I_\omega)$ via

$$(12) \quad \omega(X, Y) \equiv g_\omega(I_\omega X, Y).$$

One can go further and in particular, in \mathbb{R}^4 , one can show how a natural hyper-Kähler structure emerges by identifying points in \mathbb{R}^4 with quaternions $\ell \in \mathbb{H}$. This structure was utilized by Roubtsov & Roulstone (1997, 2001) in their description of nearly geostrophic models of meteorological flows.

3. TWO-DIMENSIONAL NAVIER-STOKES FLOWS

If the flow described by (1) is two-dimensional, and if the fluid is incompressible, then we can represent the velocity by

$$(13) \quad \mathbf{u} = \mathbf{k} \times \nabla\psi,$$

where $\psi(x, y, t)$ is a stream function and \mathbf{k} is the local unit vector in the vertical. If we substitute this for the velocity in (4), we get

$$(14) \quad \nabla^2 P = -2(\psi_{xy}^2 - \psi_{xx}\psi_{yy}).$$

This is an equation of Monge–Ampère type (cf. (8)) for ψ , given $\nabla^2 P$, and it is an elliptic equation if

$$(15) \quad \nabla^2 P > 0$$

(cf. (8) and (9) with $E = \nabla^2 P, D = -2, A = B = C = 0$; see also Larchevêque 1990, 1993). We use, once again, the usual notation for coordinates on $T^*\mathbb{R}^2$, $p = \psi_x, q = \psi_y$, and then we can express (14) geometrically on the graph of $d\psi$ via

$$(16) \quad \omega_{2d} \equiv \nabla^2 P \, dx \wedge dy - 2dp \wedge dq; \quad \Delta_{\omega_{2d}} = 0.$$

In these coordinates $\Omega \equiv dx \wedge dp + dy \wedge dq$, and on the graph of $d\psi$

$$(17) \quad \Delta_{\Omega} = 0,$$

which says simply that $\psi_{xy} = \psi_{yx}$. Equations (16) and (17) define an almost complex structure, $I_{\omega_{2d}}$, on $T^*\mathbb{R}^2$, given in coordinates by

$$I_{ik} = \frac{1}{\sqrt{2\nabla^2 P}} \Omega_{ij} \omega_{jk}.$$

That is

$$I_{\omega_{2d}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\alpha} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

with $\nabla^2 P = 2\alpha^2$. This almost complex structure is integrable (cf. (10)) in the special case

$$(18) \quad \nabla^2 P = \text{constant}.$$

Recall that time is merely a parameter here. When P satisfies (18), we can introduce the coordinates \mathcal{X}, \mathcal{Y} , and a two-form $\omega_{\mathcal{X}\mathcal{Y}}$

$$(19) \quad \mathcal{X} = x - i\alpha^{-1}q, \quad \mathcal{Y} = y + i\alpha^{-1}p, \quad \omega_{\mathcal{X}\mathcal{Y}} = d\mathcal{X} \wedge d\mathcal{Y},$$

then (14) together with (17) are equivalent to

$$(20) \quad \Delta_{\omega_{\mathcal{X}\mathcal{Y}}} = 0.$$

To summarize, the graph of ψ is a complex curve in $(T^*\mathbb{R}^2, I_{\omega_{2d}})$. This is the basis for a Kähler description of the incompressible two-dimensional Navier-Stokes equations. The condition (15) will certainly not be satisfied by all two-dimensional Navier-Stokes flows. However, with the aid of Lundgren's transformation (Lundgren 1982), we find that the Kähler structure can be extended to a class of two-and-a-half-dimensional flows, as designated in §1, for which this condition is less restrictive.

4. A RESULT FOR TWO-AND-A-HALF DIMENSIONAL FLOWS

At this point it is appropriate to work with the two-and-a-half-dimensional Burgers solutions introduced in §1 in equations (5), (6) and (7). Based on the results of the last section, we shall prove a more realistic result for two-and-a-half-dimensional flows in Theorem 1.

Lundgren (1982) made a significant advance when he showed that the class of three-dimensional Navier-Stokes solutions

$$(21) \quad u_1(x, y, t) = -\frac{1}{2}\gamma(t)x + \psi_y; \quad u_2(x, y, t) = -\frac{1}{2}\gamma(t)y - \psi_x$$

$$(22) \quad u_3(x, y, t) = z\gamma(t) + \phi(x, y, t)$$

under the limited conditions of a constant strain $\gamma(t) = \gamma_0$, can be mapped back to the two-dimensional Navier-Stokes equations under a stretched co-ordinate transformation; see also Majda (1986),

Majda & Bertozzi (2002), Saffman (1993), and Pullin & Saffman (1998). In (21), $\psi = \psi(x, y, t)$ is a two-dimensional stream function. This idea was extended by Gibbon *et al.* (1999) to a time-dependent strain field $\gamma = \gamma(t)$ with the inclusion of a scalar $\phi(x, y, t)$ in (22). The class of solutions in (21), which are said to be of *Burgers-type*, is generally thought to represent the observed tube-sheet class of solutions in Navier-Stokes turbulent flows (Moffatt *et al.* (1994) and Vincent & Meneguzzi (1994)).

Depending upon the sign of $\gamma(t)$ the vortex represented by (21) either stretches in the z -direction and contracts in the horizontal plane, which is the classic Burgers vortex tube, or vice-versa, which produces a Burgers' vortex shear layer or sheet. Thus γ , which can be interpreted as the aggregate effect of other vortices in the flow, acts an externally imposed strain function or 'puppet master', and can switch a vortex between the two extremes of these two topologies as we discussed in §1.

This class of solutions is connected to the results of §§2 and 3 through the following theorem, which is the main result of this section, and of the paper¹:

Theorem 1. *If a two-and-a-half-dimensional Burgers-type class of solutions has a Laplacian of the pressure that is bounded by $\nabla_3^2 P > -\frac{3}{2}\gamma^2$ then any associated underlying two-dimensional Navier-Stokes flow is of Kähler type.*

Proof. To prove this theorem we first need two Lemmas. Firstly let $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ be a candidate velocity field solution of the three-dimensional Navier-Stokes equations taken in the form

$$(23) \quad u_1 = u_1(x, y, t), \quad u_2 = u_2(x, y, t), \quad u_3 = z\gamma(x, y, t) + \phi(x, y, t).$$

¹The notation used in this section is: ∇ is the two-dimensional gradient and ∇_3 is the three-dimensional gradient. ∇^2 and ∇_3^2 are the two- and three-dimensional Laplacians respectively (to avoid confusion with the symbol Δ in §2).

with z appearing only in u_3 . With this velocity field the total derivative is now

$$(24) \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_1 \frac{\partial}{\partial x} + u_2 \frac{\partial}{\partial y} + (z\gamma + \phi) \frac{\partial}{\partial z}$$

and the vorticity vector ω must satisfy

$$(25) \quad \frac{D\omega}{Dt} = S\omega + \nu \nabla^2 \omega,$$

where S is the strain matrix whose elements are

$$S_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}).$$

In the following Lemma $\mathbf{v}(x, y, t) = (u_1, u_2)$, and $\mathcal{P}(x, y, t)$ is a two-dimensional pressure variable which is related to the full pressure P in (31). The material derivative is now

$$(26) \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$$

Lemma 1. (see Gibbon et al. 1999) Consider the velocity field $\mathbf{u} = (\mathbf{v}, z\gamma + \phi)$; then \mathbf{v} , ω_3 , ϕ and γ satisfy

$$(27) \quad \frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \nabla \mathcal{P} = \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad \frac{D\omega_3}{Dt} = \gamma \omega_3 + \nu \nabla^2 \omega_3,$$

$$(28) \quad \frac{D\phi}{Dt} = -\gamma \phi + \nu \nabla^2 \phi,$$

$$(29) \quad \frac{D\gamma}{Dt} + \gamma^2 + P_{zz}(t) = \nu \nabla^2 \gamma.$$

The velocity field \mathbf{v} satisfies the continuity condition $\nabla \cdot \mathbf{v} = -\gamma$ and the second partial z -derivative of the pressure P_{zz} is constrained to be spatially uniform.

Remark 1. While (27) looks like a two-dimensional Navier-Stokes flow, the continuity condition implies that the two-dimensional divergence $\nabla \cdot \mathbf{v} \neq 0$; thus an element of three-dimensionality remains.

Proof. The evolution of the third velocity component $u_3 = \gamma z + \phi$ is given by

$$(30) \quad -P_z = \frac{Du_3}{Dt} - \nu \nabla^2 u_3 = z \left(\frac{D\gamma}{Dt} + \gamma^2 - \nu \nabla^2 \gamma \right) + \left(\frac{D\phi}{Dt} + \gamma\phi - \nu \nabla^2 \phi \right)$$

which, on integration with respect to z , gives

$$(31) \quad -P(x, y, z, t) = \frac{1}{2} z^2 \left(\frac{D\gamma}{Dt} + \gamma^2 - \nu \nabla^2 \gamma \right) + z \left(\frac{D\phi}{Dt} + \gamma\phi - \nu \nabla^2 \phi \right) - \mathcal{P}(x, y, t).$$

It is in this way that $\mathcal{P}(x, y, t)$ is related to $P(x, y, z, t)$. However, from the first two components of the Navier-Stokes equations, we know that ∇P must be independent of z . For this to be true the coefficients of z and z^2 in (31) must necessarily satisfy

$$(32) \quad \frac{D\phi}{Dt} + \gamma\phi - \nu \nabla^2 \phi = c_1(t), \quad \frac{D\gamma}{Dt} + \gamma^2 - \nu \nabla^2 \gamma = c_2(t).$$

$c_1(t)$ is an acceleration of the co-ordinate frame which can be taken as zero without loss of generality. Equation (31) shows that $c_2(t) = -P_{zz}(t)$ which restricts P_{zz} to being spatially uniform. To find the evolution of ω_3 we consider the strain matrix $S = \{S_{ij}\}$

$$(33) \quad S = \begin{pmatrix} u_{1,x} & \frac{1}{2}(u_{1,y} + u_{2,x}) & \frac{1}{2}(z\gamma_x + \phi_x) \\ \frac{1}{2}(u_{1,y} + u_{2,x}) & u_{2,y} & \frac{1}{2}(z\gamma_y + \phi_y) \\ \frac{1}{2}(z\gamma_x + \phi_x) & \frac{1}{2}(z\gamma_y + \phi_y) & \gamma \end{pmatrix}.$$

Working out the vorticity field ω from (23) it is easily seen that $(S\omega)_3 = \gamma\omega_3$. Thus (25) shows that ω_3 decouples from ϕ to give the equation for ω_3 in (27). \square

Now let us consider the class of Burgers' velocity fields given in (21) with a stream function $\psi(x, y, t)$. The strain rate variable

γ is taken as a function of time only. The continuity condition is now automatically satisfied. The material derivative is given by

$$(34) \quad \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2}\gamma(t) \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) + J_{x,y}(\psi, \cdot).$$

New co-ordinates can be taken (Lundgren's transformation (Lundgren (1982)))

$$(35) \quad s(t) = \exp \left(\int_0^t \gamma(t') dt' \right)$$

$$(36) \quad \tilde{x} = s^{1/2}x, \quad \tilde{y} = s^{1/2}y, \quad \tilde{t} = \int_0^t s(t') dt',$$

which re-scale ω_3 and ϕ into new variables

$$(37) \quad \tilde{\omega}_3(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) = s^{-1}\omega_3(x, y, t), \quad \tilde{\phi}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) = s\phi(x, y, t).$$

The material derivative is

$$(38) \quad \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}\tilde{t}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla}$$

where $\psi(x, y, t) = \tilde{\psi}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t})$, $\tilde{\mathbf{v}} = (\tilde{\psi}_{\tilde{y}}, -\tilde{\psi}_{\tilde{x}})$ and $\tilde{\nabla} = \hat{\mathbf{i}} \partial_{\tilde{x}} + \hat{\mathbf{j}} \partial_{\tilde{y}}$.

The relation between $\mathbf{v} = (u_1, u_2)$ and $\tilde{\mathbf{v}}$ is given by

$$(39) \quad u_1 = -\frac{1}{2}\gamma(t)x + s^{1/2}\tilde{v}_1, \quad u_2 = -\frac{1}{2}\gamma(t)y + s^{1/2}\tilde{v}_2$$

and the relation between the two material derivatives in combination with the respective Laplacians is

$$(40) \quad \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t} - \nu \nabla^2 = s \left(\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}\tilde{t}} - \nu \tilde{\nabla}^2 \right).$$

Introducing a new pressure variable \tilde{P} as

$$(41) \quad \tilde{P} = s^{-1} \left[\mathcal{P} - \frac{1}{4}(x^2 + y^2) \left(\dot{\gamma} - \frac{1}{2}\gamma^2 \right) \right]$$

our results can be summarized in our second Lemma:

Lemma 2. *The re-scaled velocity field $\tilde{\mathbf{v}}$ satisfies the two-dimensional re-scaled Navier-Stokes equations ($\div \tilde{\mathbf{v}} = 0$)*

$$(42) \quad \frac{D\tilde{\mathbf{v}}}{D\tilde{t}} + \tilde{\nabla}\tilde{P} = \nu\tilde{\nabla}^2\tilde{\mathbf{v}}.$$

The vorticity $\tilde{\omega}_3(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) = -\tilde{\nabla}^2\tilde{\psi}$ and the passive scalar $\tilde{\phi}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t})$ satisfy

$$(43) \quad \frac{D\tilde{\omega}_3}{D\tilde{t}} = \nu\tilde{\nabla}^2\tilde{\omega}_3, \quad \frac{D\tilde{\phi}}{D\tilde{t}} = \nu\tilde{\nabla}^2\tilde{\phi}.$$

Proof. From (35) we note the useful result that $Ds/Dt = \gamma s$. Using (39) we write

$$(44) \quad \frac{Du_1}{Dt} - \nu\nabla^2u_1 = -\frac{1}{2}x(\dot{\gamma} - \frac{1}{2}\gamma^2) + s^{3/2}\left(\frac{D\tilde{v}_1}{D\tilde{t}} - \nu\nabla^2\tilde{v}_1\right),$$

$$(45) \quad \frac{Du_2}{Dt} - \nu\nabla^2u_2 = -\frac{1}{2}y(\dot{\gamma} - \frac{1}{2}\gamma^2) - s^{3/2}\left(\frac{D\tilde{v}_2}{D\tilde{t}} - \nu\nabla^2\tilde{v}_2\right).$$

Next we appeal to the definition of the pressure \tilde{P} in (41) to give the velocity pressure relation in (42). The results for $\tilde{\phi}$ and $\tilde{\omega}_3$ follow immediately. \square

The proof of Theorem 1 is now ready to be completed. To obtain the full three-dimensional Laplacian of the pressure ∇_3^2P we use (41) and (29) and write

$$(46) \quad \begin{aligned} -\nabla_3^2P &= \frac{3}{2}\gamma^2 + s^2\left[\frac{\partial}{\partial\tilde{x}}\left(\frac{D\tilde{v}_1}{D\tilde{t}} - \nu\nabla^2\tilde{v}_1\right) + \frac{\partial}{\partial\tilde{y}}\left(\frac{D\tilde{v}_2}{D\tilde{t}} - \nu\nabla^2\tilde{v}_2\right)\right] \\ &= \frac{3}{2}\gamma^2 - s^2\tilde{\nabla}^2\tilde{P}. \end{aligned}$$

Thus if ∇_3^2P satisfies the condition in Theorem 1 then the corresponding Kähler positivity condition (15) on the Laplacian for two-dimensional flow is satisfied. \square

Lundgren's mapping breaks down under one condition: while the strain $\gamma(t)$ can take either sign, if it is forever negative or for

long intervals, the domain $t \in [0, \infty]$ maps on to a finite section of the \tilde{t} -axis. For example, if

$$\gamma = -\gamma_0 = \text{const} < 0$$

then $s = \exp(-\gamma_0 t)$ and $\tilde{t} = \gamma_0^{-1} [1 - \exp(-\gamma_0 t)]$. Hence $t \in [0, \infty]$ maps onto $\tilde{t} \in [0, \gamma_0^{-1}]$.

5. SUMMARY

We have shown how Kähler geometry arises in the Navier-Stokes equations of incompressible hydrodynamics, via a Monge–Ampère equation associated with (4). Although it is certainly not the case that all two-dimensional flows will satisfy the condition for the Kähler structure to exist, the situation looks much more promising for two-and-a-half-dimensional flows, of which Burgers vortex is one example.

Issues relating to the existence and interpretation of Kähler structures, the integrability conditions, and related matters involving contact and symplectic structures, were discussed by McIntyre & Roulstone (2002) in connection with various Monge–Ampère equations arising in geophysical fluid dynamics. The semi-geostrophic equations of meteorology, which are a particularly useful model for studying the formation of fronts, were the starting point in McIntyre & Roulstone *op. cit.* for an investigation into the role of novel coordinate systems, similar to those we have found here in (19) and (49). In semi-geostrophic theories, such coordinates facilitate significant simplifications of difficult nonlinear problems, and they are associated with canonical Hamiltonian formulations of these systems. Issues relating to contact and symplectic geometry may also be relevant to the results presented in this paper, and this suggests one direction for further study.

A further variation on this theme revolves around the addition of rotation to the system, which, as we pointed out in the Introduction, has important meteorological applications. Euler’s equations

of motion are

$$(47) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + f(\mathbf{k} \times \mathbf{v}) + \nabla P = 0,$$

where $\frac{1}{2}f$ is the angular frequency of the rotation. If we examine these equations in two dimensions, with constant rotation, then taking the divergence of (47) gives

$$(48) \quad \nabla^2 P = -2(\psi_{xy}^2 - \psi_{xx}\psi_{yy}) + f\nabla^2\psi.$$

This equation, which is commonly referred to as the Charney balance condition in the geophysical fluid dynamics literature, is an elliptic Monge–Ampère equation for ψ if $\nabla^2 P + f^2/2 > 0$. The associated complex structure is integrable when $\nabla^2 P$ is a constant (cf. (10)), and in this case we can introduce new complex coordinates

$$(49) \quad \tilde{X} = ax + i(fy + 2q), \quad \tilde{Y} = ay - i(fx + 2p),$$

with $a = (2\nabla^2 P + f^2)^{1/2}$. Once again, (48) together with (17) are equivalent to

$$\omega_{\tilde{X}\tilde{Y}} \equiv d\tilde{X} \wedge d\tilde{Y}, \quad \Delta_{\omega_{\tilde{X}\tilde{Y}}} = 0.$$

If the pressure is zero, or harmonic, then (48) is suggestive of a special Lagrangian structure. A special Lagrangian structure has also been noted in the work of Roubtsov & Roulstone (2001), but its role in that context is obscure (see McIntyre & Roulstone (2002) equation (13.27) *et seq.*).

REFERENCES

- [1] Banos, B. 2002 Nondegenerate Monge–Ampère structures in dimension 6. *Lett. Math. Phys.*, **62** 1-15.
- [2] Burgers, J. M. 1948 A mathematical model illustrating the theory of turbulence. *Adv. Appl. Math.*, **1**, 171-199.
- [3] Charney, J.G. 1955 The use of the primitive equations of motion in numerical prediction. *Tellus*, **7**, 22-26.
- [4] Constantin, P. 2000 The Euler equations and non-local conservative Riccati equations. *Internat. Math. Res. Notices (IMRN)*, **9**, 455-65.
- [5] Gibbon, J. D. 2002 A quaternionic structure in the three-dimensional Euler and ideal magneto-hydrodynamics equations. *Physica D*, **166**, 17-28.

- [6] Gibbon, J. D., Fokas, A. & Doering, C.R. 1999 Dynamically stretched vortices as solutions of the Navier-Stokes equations. *Physica D*, **132**, 497-510.
- [7] Hitchin, N. J. 2000 The geometry of three-forms in six dimensions. *J. Diff. Geom.*, **55**, 547-76.
- [8] Hoskins, B. J. & Bretherton, F. P. 1972 Atmospheric frontogenesis models: mathematical formulation and solutions. *J. Atmos. Sci.*, **29**, 11-37.
- [9] Kerr, R. M. 1993 Evidence for a singularity of the three-dimensional incompressible Euler equations. *Phys. Fluids A* **6**, 1725.
- [10] Kerr, R.M. 2005 Vorticity and scaling of collapsing Euler vortices, *Phys. Fluids*. **17**, 075103-114.
- [11] Larchevêque, M. 1990 Equation de Monge-Ampère et écoulements incompressibles bi-dimensionnels. *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. II*, **311**, 33-36.
- [12] Larchevêque, M. 1993 Pressure field, vorticity field, and coherent structures in two-dimensional incompressible turbulent flows. *Theor. Comp. Fluid Dynamics*, **5**, 215-22.
- [13] Lundgren, T. 1982 Strained spiral vortex model for turbulent fine structure. *Phys. Fluids*, **25**, 2193-2203.
- [14] Lychagin, V. V. 1979 Nonlinear differential equations and contact geometry. *Uspèkhi Mat. Nauk.*, **34**, 137-65.
- [15] Lychagin, V. V. & Roubtsov, V. N. 1983 Local classifications of Monge-Ampère equations. *Dokl. Biol. Acad. Sci.*, **27** 396-98.
- [16] Lychagin, V. V., Roubtsov, V. N. & Chekalov, I. V. 1993 A classification of Monge-Ampère equations. *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.*, **26**, 281-308.
- [17] McIntyre, M. E. & Roulstone, I. 2002 Are there higher-accuracy analogues of semi-geostrophic theory? In *Large-scale atmosphere—ocean dynamics, Vol. II: Geometric methods and models*. J. Norbury and I. Roulstone (eds.); Cambridge: University Press.
- [18] Majda, A. J. 1986 Vorticity and the mathematical theory of incompressible fluid flow. *Comm. Pure and Appl. Math.*, **39**, 187-220.
- [19] Majda, A. J. & Bertozzi, A. 2002 *Vorticity and incompressible flow*. Cambridge: University Press.
- [20] Moffatt, H. K., Kida, S. & Ohkitani, K. 1994 Stretched vortices – the sinews of turbulence; large-Reynolds-number asymptotics. *J. Fluid Mech.*, **259**, 241-264.
- [21] Ohkitani, K. & Gibbon, J. G. 2000 Numerical study of singularity formation in a class of Euler and Navier-Stokes flows. *Physics of Fluids*, **12**, 3181-3194.
- [22] Pullin, D. I. & Saffman, P. G. 1998 Vortex dynamics. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **30**, 31-51.
- [23] Roubtsov, V. N. & Roulstone, I. 1997 Examples of quaternionic and Kähler structures in Hamiltonian models of nearly geostrophic flow. *J. Phys. A*, **30**, L63-L68.

-
- [24] Roubtsov, V. N. & Roulstone, I. 2001 Holomorphic structures in hydrodynamical models of nearly geostrophic flow. *Proc. R. Soc. Lond.*, A **457**, 1519-1531.
- [25] Roulstone, I., Banos, B., Gibbon, J.D. & Roubtsov, V.N. 2008 A geometric interpretation of coherent structures in Navier-Stokes flows. *In preparation*.
- [26] Roulstone, I & Sewell, M. J. 1997 The mathematical structure of theories of semi-geostrophic type. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, **A355**, 2489-2517.
- [27] Saffman, P. G. 1993 *Vortex Dynamics*. Cambridge: University Press.
- [28] Stuart, J. T. 1987 Nonlinear Euler partial differential equations: singularities in their solution. In *Proceedings in honor of C. C. Lin* (eds: D. J. Benney, Chi Yuan and F. H. Shu), pp 81-95, World Scientific, Singapore.
- [29] Stuart, J. T. 1991 The Lagrangian picture of fluid motion and its implication for flow structures. *IMA J. Appl. Math.*, **46**, 147.
- [30] Vincent, A. & Meneguzzi, M. 1994 The dynamics of vorticity tubes of homogeneous turbulence. *J. Fluid Mech.*, **225**, 245-254.

ЧАСТИНА II

**Праці Інституту математики
НАН України**

УДК 517.5

Г. П. Бахтина

Р. В. Подвысоцкий

Разделяющее преобразование и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегающих областях

In this work new inequalities for inner radii of non-overlapping domains are obtained.

Раздел геометрической теории функций комплексного переменного, связанный с разработкой методов решения экстремальных задач о неналегающих областях, представляет собой известное классическое направление. С результатами, методами и историей развития этого направления можно ознакомиться в работах [1–12]. Важным элементом исследования экстремальных задач является теория квадратичных дифференциалов и один из ключевых ее результатов – "Основная структурная теорема" Дж. А. Дженкинса, описывающая глобальную структуру траекторий квадратичных дифференциалов на конечной римановой поверхности (см.[2]). В работах [6, 7] был разработан метод разделяющего преобразования, который при определенных условиях позволяет сводить задачи с большим числом неизвестных параметров к задачам с меньшим их числом. Это обстоятельство явилось ключевым для решения ряда трудных задач (см.[6, 7]).

Подавляющее большинство результатов о неналегающих областях связано, в той или иной степени, с получением точных оценок произведений внутренних радиусов этих областей см.[1–16].

© Г. П. Бахтина, Р. В. Подвысоцкий, 2009

В 1974 г. в работе [5] получен первый результат для функционалов "типа суммы". В [17] этот результат получил дальнейшее развитие. Исследование подобных задач наталкивается на определенные трудности, для преодоления которых необходимо найти новые методы. Целью данной работы является применение к задачам о функционалах "типа суммы" нового метода, использующее разделяющее преобразование, развитого в работах [8–12].

В последнее время возрос интерес к экстремальным задачам с так называемыми свободными полюсами соответствующих квадратичных дифференциалов (см. [3, 4–12]). Новые задачи этого типа решены в данной работе.

2. Обозначения и определения. Пусть \mathbb{N} , \mathbb{C} – множества натуральных и комплексных чисел соответственно. Как обычно, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ есть расширенная комплексная плоскость или сфера Римана.

Пусть $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ – произвольный набор различных точек единичной окружности, подчиненных условию

$$0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \dots < \arg a_n < 2\pi. \quad (1)$$

Системой неналегающих областей (с.н.о.) называется конечный набор произвольных областей $\{B_k\}_{k=1}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, таких, что $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $B_k \cap B_m = \emptyset$, $k \neq m$, $k, m = \overline{1, n}$.

Введем в рассмотрение области

$$E_k = \{w : \arg a_k < \arg w < \arg a_{k+1}\},$$

$$k = \overline{1, n} \quad E_{n+1} = E_1, \quad \arg a_{n+1} = 2\pi, \quad \arg a_{n+2} = \arg a_2 + 2\pi$$

Обозначим $\theta_k = \frac{1}{\pi} \arg \frac{a_{k+1}}{a_k}$, $k = \overline{1, n}$. Ясно, что $\sum_{k=1}^n \theta_k = 2$.

Функция

$$\xi = \pi_k(w) = -i(e^{-i \arg a_k} w)^{\frac{1}{\theta_k}}, \quad k = \overline{1, n},$$

при надлежащем выборе ветви однолистно отображает область E_k на правую полуплоскость. Для удобства связную компоненту множества Q , содержащую точку b , обозначим $[Q]_b$. Будем говорить, что с.н.о. удовлетворяет дополнительному условию

неналегания относительно набора точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, $|a_k| = 1$, если $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, n}$, и при каждом $k = \overline{1, n}$ существует хотя бы одна горизонтальная прямая

$$l_k(\eta) = \{\xi : \operatorname{Im} \xi = \eta\}, \quad \eta \in (-1, 1),$$

не имеющая общих точек с множеством $\pi_k \left([B_k \cap \overline{E}_k]_{a_k} \right)$ и с множеством $\pi_k \left([B_{k+1} \cap \overline{E}_k]_{a_{k+1}} \right)$, где $\pi_k(D)$ – образ множества D при отображении π_k . Внутренний радиус области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ относительно точки $a \in B$ обозначим через $r(B, a)$ (см. [6, 13]).

3. Результаты и доказательства. Рассмотрим задачу о максимуме функционала

$$\sum_{k=1}^n r(B_k, a_k) \quad (2)$$

на классе всех с.н.о., удовлетворяющих дополнительному условию неналегания относительно систем точек единичной окружности $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, удовлетворяющих условию (1).

Эта задача относится к типу задач со свободными полюсами на окружности. Сформулируем следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Тогда для любой системы различных точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, подчиненных условию (1), и любой с.н.о., удовлетворяющей дополнительно условию неналегания относительно A_n , справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq 4.$$

В частности, знак равенства в этом неравенстве достигается тогда, когда точки a_k и области B_k являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}}{(w^n - 1)^2}dw^2 \quad (3)$$

Доказательство. Обозначим через $\{D\}^*$ множество, симметричное множеству D относительно мнимой оси. Рассмотрим при всех $k = \overline{1, n}$ следующие области

$$G_k^{(1)} = \pi_k ([B_k \cap \overline{E_k}]_{a_k}) \cup \left\{ \pi_k ([B_k \cap E_k]_{a_k}) \right\}^*,$$

$$G_k^{(2)} = \pi_k ([B_{k+1} \cup \overline{E_k}]_{a_{k+1}}) \cup \left\{ \pi_k ([B_{k+1} \cap \overline{E_k}]_{a_k}) \right\}^*.$$

Используя работы [6, 7] получаем неравенства

$$r(B_k, a_k) \leq \sqrt{\theta_{k-1} \theta_k r(G_{k-1}^{(1)}, -i) r(G_{k-1}^{(2)}, i)}.$$

Тогда для функционала (2) можем записать оценка

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n r(B_k, a_k) &\leq \sum_{k=1}^n \left[\theta_{k-1} r(G_{k-1}^{(2)}, i) \cdot \theta_k \cdot r(G_k^{(1)}, -i) \right]^{1/2} \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left[\theta_{k-1} r(G_{k-1}^{(2)}, i) + \theta_k r(G_k^{(1)}, -i) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \theta_k \left[r(G_k^{(1)}, -i) + r(G_k^{(2)}, i) \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Теорема доказана.

Далее сформулируем лемму, принадлежащую А. К. Бахтину и являющуюся существенным обобщением результата [17].

Лемма 1. Пусть $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$, $a_1 \neq a_2$, и \mathcal{L} – множество всех прямых, имеющих одну и только одну точку пересечения с открытым отрезком (a_1, a_2) .

Тогда для произвольных областей комплексной плоскости B_1, B_2 , $a_1 \in B_1$, $a_2 \in B_2$, которые удовлетворяют условию $(B_1 \cap l) \cup (B_2 \cap l) = \emptyset$ хотя бы для одной прямой $l \in \mathcal{L}$, выполняется неравенство

$$r(B_1, a_1) + r(B_2, a_2) \leq 2|a_1 - a_2|$$

Равенство достигается для полуплоскостей, общая граница которых есть прямая $l \in \mathcal{L}$ ортогональная отрезку (a_1, a_2) .

Доказательство леммы. Пусть B_1^0 есть компонента множества $\mathbb{C} \setminus l$ содержащая точку a_1 , а B_2^0 — вторая компонента множества $\mathbb{C} \setminus l$, содержащая точку a_2 . Ясно, что B_1^0 и B_2^0 — полуплоскости удовлетворяющие условиям леммы. Тогда $B_1 \subset B_1^0$ и $B_2 \subset B_2^0$. Тогда очевидно, что

$$r(B_1, a_1) + r(B_2, a_2) \leq r(B_1^0, a_1) + r(B_2^0, a_2) = 2|a_1 - a_2| \sin \theta,$$

где θ — угол между отрезком (a_1, a_2) и l . Отсюда следует справедливость леммы.

По построению области $G_k^{(2)}$ и $G_k^{(1)}$ не пересекаются с прямой $l_k(\eta)$, ортогональной к отрезку $(-i, i)$, и, кроме того, $i\eta \in \overline{l_k(\eta)}$. Таким образом, условия леммы выполнены при всех $k = \overline{1, n}$.

Тогда из (4) вытекает, что

$$\sum r(B_k, a_k) \leq 2 \sum_{k=1}^n \theta_k = 4.$$

Случай равенства проверяется непосредственно с учетом свойства разделяющего преобразования ([6–12]).

Следствие 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ и $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ — набор неотрицательных чисел, $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$. Тогда для функционала

$$I_n = \sum_{p=0}^{n-1} \prod_{k=1}^n r^{\alpha_{k+p}}(B_k, a_k),$$

где $\alpha_{n+p} = \alpha_p$, $p = \overline{1, n}$, заданного на множестве всех с.н.о., удовлетворяющих дополнительному условию неналегания, относительно систем точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ единичной окружности, подчиненных условию (1), справедливо неравенство

$$I_n \leq 4.$$

Знак равенства достигается при выполнении условий теоремы 1.

Доказательство следствия 1. Действительно, в силу известного неравенства получаем

$$\prod_{k=1}^n r^{\alpha_{k+p}}(B_k, a_k) \leq \sum_{k=1}^n \alpha_{k+p} r(B_k, a_k)$$

Тогда имеет место соотношение

$$\sum_{p=1}^{n-1} \prod_{k=1}^n r^{\alpha_{k+p}}(B_k, a_k) \leq \sum_{k=1}^n \left(\sum_{p=0}^{n-1} \alpha_{k+p} \right) r(B_k, a_k) = \sum_{k=1}^n r(B_k, a_k)$$

так как по условиям следствия 1

$$\sum_{p=0}^{n-1} \alpha_{k+p} = \sum_{k=1}^n \alpha_k = 1. \quad (5)$$

Из (5) и теоремы 1 получаем утверждение следствия 1.

Частным случаем следствия 1 является такой результат.

Следствие 2. При выполнении условий теоремы 1 справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \sqrt{r(B_1, a_1)r(B_2, a_2)} + \\ & + \sqrt{r(B_2, a_2)r(B_3, a_3)} + \dots + \sqrt{r(B_n, a_n)r(B_1, a_1)} \leq 4. \end{aligned}$$

Знак равенства достигается при выполнении условий теоремы 1.

Аналогично теореме 1 можно доказать другой результат.

Теорема 2. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Тогда для любой системы различных точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, подчиненной условию (1) и любой системы неналегающих областей, удовлетворяющей дополнительному условию неналегания относительно A_n , справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^n (\theta_k \cdot \theta_{k-1})^{-1/2} r(B_k, a_k) \leq 2n.$$

Знак равенства достигается, в частности, тогда, когда точки a_k и области B_k являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала (3).

Доказательство. Используя неравенство (4), получаем, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (\theta_{k-1}\theta_k)^{-1/2} r(B_k, a_k) &\leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n \left\{ r(G_{k-1}^{(2)}, i) r(G_k^{(1)}, -i) \right\}^{1/2} \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [r(G_{k-1}^{(2)}, i) + r(G_k^{(1)}, -i)] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [r(G_k^{(1)}, -i) + r(G_k^{(2)}, i)] \leq 2n. \end{aligned}$$

Утверждение о знаке равенства проверяется непосредственно. Теорема 2 доказана.

Для обобщения теоремы 2 нам необходимы дополнительные определения.

В предыдущих теоремах использовались системы точек расположенные на окружности. Рассмотрим теперь системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, $a_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $k = \overline{1, n}$, $n \geq 2$, удовлетворяющие условию (1). Такие системы точек называются n лучевыми (см. [8–12, 16]). Каждой n лучевой системе $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ соответствует система точек $\tilde{A}_n = \left\{ \frac{a_k}{|a_k|} \right\}_{k=1}^n$, расположенная на единичной окружности. Поэтому области E_k , величины θ_k и функции $\xi = \pi_k(w)$ для $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ по определению полагаем равными соответственно E_k , θ_k и $\xi = \pi_k(w)$, $k = \overline{1, n}$, построенным для системы $\tilde{A} = \left\{ \frac{a_k}{|a_k|} \right\}_{k=1}^n$. Аналогично предыдущему будем говорить, что с.н.о. $\{B_k\}_{k=1}^n$ удовлетворяет дополнительному условию неналегания относительно n лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, если $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, n}$, и при каждом

$k = \overline{1, n}$ существует хотя бы одна горизонтальная прямая

$$l_k(\eta) = \{\xi : \operatorname{Im} \xi = \eta\}, \quad \eta \in \left(-|a_k|^{1/\theta_k}, |a_{k+1}|^{1/\theta_k}\right)$$

не имеющая общих точек ни с множеством $\pi_k([B_k \cap \bar{E}_k]_{a_k})$, ни с множеством $\pi_k([B_{k+1} \cap \bar{E}_k]_{a_{k+1}})$. Совершенно аналогично строятся области $G_k^{(1)}, G_k^{(2)}, k = \overline{1, n}$.

Как и ранее, используя результаты работ [6, 7] и [8–12] получаем соотношения

$$\begin{aligned} r(B_k, a_k) &\leq (\theta_{k-1}\theta_k)^{1/2} |a_k|^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{\theta_{k-1}} + \frac{1}{\theta_k}) + 1} \cdot \\ &\cdot \left(r(G_k^{(1)}, -i|a_k|^{\frac{1}{\theta_k}}) r(G_{k-1}^{(2)}, i|a_k|^{\frac{1}{\theta_{k-1}}}) \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Таким образом, будем иметь для функционала следующую оценку

$$\begin{aligned} I_n &= \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{|a_k|^{\frac{1}{2}(1/\theta_{k-1} + \frac{1}{\theta_k})}}{(\theta_{k-1}\theta_k)^{1/2} |a_k|} \cdot r(B_k, a_k) \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left[r(G_k^{(1)}, -i|a_k|^{\frac{1}{\theta_k}}) + r(G_k^{(2)}, i|a_{k+1}|^{1/\theta_k}) \right] \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n (|a_k|^{1/\theta_k} + |a_{k+1}|^{\frac{1}{\theta_k}}). \end{aligned}$$

Отсюда вытекает такой результат.

Теорема 3. Пусть $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Тогда для любой n лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ такой, что

$$\sum_{k=1}^n \left(|a_k|^{1/\theta_k} + |a_{k+1}|^{1/\theta_k} \right) = 2n,$$

и любой с.н.о. $\{B_k\}_{k=1}^n$, которая удовлетворяет дополнительному условию неналегания относительно A_n , справедливо неравенство

$$I_n \leq 2n.$$

Знак равенства достигается, в частности, когда a_k и B_k являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала (3).

В заключение авторы выражают искреннюю благодарность А.К.Бахтину за постановку задач и полезные советы при подготовке к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Г.М. Голузин. Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.:Наука, 1966.—628с.
- [2] Н.А. Лебедев. Принцип площадей в теории однолистных функций. – М.:Наука, 1975.—336с.
- [3] Дженкинс Дж.А. Однолистные функции и конформные отображения. – М.: Изд-во иностр.лит., 1962.—256с.
- [4] Тамразов П.М. Экстремальные конформные отображения и полюсы квадратичных дифференциалов // Изв. АН СССР. Сер.мат.– 1968.— 32,№ 5.–С.1033–1043.
- [5] Бахтина Г.П. Вариационные методы и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегающих областях.:Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук.– Киев. 1975.—11с.
- [6] Дубинин В.Н. Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат.наук. – 1994. – 49. №1(295). – С.3-76.
- [7] Дубинин В.Н. Емкости конденсаторов в геометрической теории функций.: Уч.пособие. – Владивосток: Изд-во Дальневосточ. ун-та, 2003.— 116с.
- [8] Бахтин А.К. Экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами на двух окружностях// Доп.НАН України.– 2005.–№ 7.–С.12–16.
- [9] Бахтин А.К. Приведенные модули открытых множеств и экстремальные задачи со свободными полюсами// Там же.–2006. – № 5.– С.7–13.
- [10] Бахтин А.К. Неравенства для внутренних радиусов неналегающих областей и открытых множеств// Там же. – № 10. – С.7–13.
- [11] Бахтин А. К., Бахтина Г. П., Зелинский Ю. Б., Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе // Праці Ін-ту математики НАН України. – 2008. – Т.73. – С.308.

- [12] Бахтин А.К. Точные оценки для внутренних радиусов систем неналегающих областей и открытых множеств// Укр.мат.журн.-2007. – Т.59, № 12.С.1601–1618.
- [13] Tsuji M. Potential theory in modern function theory. – Токуо.1959.590р.
- [14] Подвысоцкий Р.В. Оценка произведения внутренних радиусов частично неналегающих областей// Укр.мат.журн. –2008. – Т.60, № 7. – С.1004-1008.
- [15] Бахтин А.К., Бахтина Г.П. Экстремальные задачи о неналегающих областях и квадратичные дифференциалы// Доп.НАН України.-2005.– № 8.– С.13–15.
- [16] Бахтин А.К., Бахтина Г.П. Об экстремальных задачах для симметричных неналегающих областях// Укр.мат.журн.-1997.– Т.49, № 2.– С.179-185.
- [17] Stankiewicz J., Stankiewicz Z. On the mapping of the unit disk onto disjointing domains// Материалы 3-й Петрозаводской международной конференции по теории функций комплексного переменного, посвященной 100-летию Г.М.Голузина. – Петрозаводск: Изд-во Петр.гос.ун-та, 2006. – С.36.

УДК 512.5+512.6

В. М. Бондаренко

Ин-т математики НАН України, Киев

E-mail: vit-bond@imath.kiev.ua

М. В. Степочкина

Ин-т математики НАН України, Киев

E-mail: StMar@ukr.net

Построение (\min, \max) - эквивалентных ч. у. множеств

In this paper we solve the problem on an explicit construction of a (\min, \max) -equivalent partially ordered set for given defining sequences.

На протяжении всей статьи рассматриваются только конечные частично упорядоченные (сокращенно ч. у.) множества.

Пусть S — ч. у. множество, не содержащее элемента 0 . Квадратичной формой Титса ч. у. множества S называют следующую (целочисленную) квадратичную форму $q_S : \mathbb{Z}^{S \cup 0} \rightarrow \mathbb{Z}$:

$$q_S(z) = z_0^2 + \sum_{i \in S} z_i^2 + \sum_{i < j, i, j \in S} z_i z_j - z_0 \sum_{i \in S} z_i.$$

Здесь $\mathbb{Z}^{S \cup 0}$ обозначает множество целочисленных векторов

$$z = (z_i), i \in S \cup 0.$$

Эта форма играет важную роль в теории представлений. В частности, в [1] доказано, что ч. у. множество S имеет конечный тип тогда и только тогда, когда его форма Титса слабо положительна.

В работе [2] введено понятие (\min, \max) -эквивалентности ч. у. множеств, которое, в частности, сыграло решающую роль

(как метод) при описании ч. у. множеств с положительной квадратичной формой Титса и P -критических ч. у. множеств [3].

Напомним соответствующие определения из [2].

Пусть S — ч. у. множество. Под подмножеством $X \subseteq S$ подразумевается полное ч. у. подмножество, т. е. для $x, y \in X$ $x < y$ в X тогда и только тогда, когда $x < y$ в S . Подмножество X называется нижним (соотв. верхним), если $x \in S$ всякий раз, когда $x < y$ (соотв. $x > y$) и $y \in S$. Запись $x \not\approx y$ будет означать, что элементы x и y не сравнимы. Множество элементов $x \in S$, несравнимых (соотв. сравнимых) с фиксированным элементом $a \in S$, будем обозначать $S^{\not\approx}(a)$ (соотв. $S(a)$). Для подмножеств Y и Z множества S будем писать $Y < Z$, если $y < z$ для произвольных $y \in Y, z \in Z$ (это заведомо выполняется, когда Y или Z является пустым). Одноэлементные подмножества S отождествляются с самими элементами.

Для ч. у. множеств X и Y мы пишем $X =_0 Y$, если X и Y равны как обычные множества (т. е. без рассмотрения порядков на них). Если же $X =_0 Y$ и при этом $x < y$ в X тогда и только тогда, когда $x < y$ в Y , то X и Y называются *равными* как ч. у. множества.

Продолжаем излагать определения из [2].

Определим для минимального (соотв. максимального) элемента $a \in S$ ч. у. множество S_a^\uparrow (соотв. S_a^\downarrow) следующим образом: это объединение (без пересечения) подмножеств $\{a\}$ и $S \setminus a$ с наименьшим частичным порядком, который содержит заданный на $S \setminus a$ порядок, и при этом $a > S^{\not\approx}(a)$ (соотв. $a < S^{\not\approx}(a)$). Другими словами, $S_a^\uparrow =_0 S$ (соотв. $S_a^\downarrow =_0 S$) и отношение частичного порядка задается следующими условиями:

а) a — максимальная (соотв. минимальная) точка S_a^\uparrow (соотв. S_a^\downarrow);

б) если $x, y \neq a$, то $x < y$ в S_a^\uparrow (соотв. S_a^\downarrow) тогда и только тогда, когда $x < y$ в S ;

с) $a > x$ в S_a^\uparrow (соотв. $a < x$ S_a^\downarrow) тогда и только тогда, когда $a \not\approx x$ в S .

В дальнейшем будем писать $S_{xy}^{\uparrow\uparrow}$ вместо $(S_x^\uparrow)^\uparrow$, $S_{xy}^{\uparrow\downarrow}$ вместо $(S_x^\uparrow)^\downarrow$ и т. д.

Пусть S и T — ч. у. множества такие, что $S =_0 T$. Ч. у. множество T назовем (\min, \max) -эквивалентным ч. у. множеству S , если T равно некоторому ч. у. множеству вида

$$\bar{S} = S_{x_1 x_2 \dots x_p}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_p} \quad (p \geq 0),$$

где $\varepsilon_i \in \{\uparrow, \downarrow\}$ и для $i \in \{1, \dots, p\}$ x_i — минимальная (соотв. максимальная) точка $\bar{S}_{i-1} = S_{x_1 x_2 \dots x_{i-1}}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{i-1}}$, если $\varepsilon_i = \uparrow$ (соотв. $\varepsilon_i = \downarrow$); при $p = 0$ считаем, что $\bar{S} = S$. Заметим, что мы не требуем, чтобы элементы x_1, x_2, \dots, x_p были различны. Введенное отношение является отношением эквивалентности (см. [3]).

В этой статье продолжается изучение (\min, \max) -эквивалентностных ч. у. множеств. А именно, доказана теорема, которая даёт возможность выписать ч. у. множество $T \cong_{(\min, \max)} S$ непосредственно, а не через p шагов, как указано в самом определении.

Если $\gamma = (y_1, \dots, y_s)$ — последовательность элементов некоторого множества Y (элементы y_i не обязательно разные), а $\varepsilon = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s\}$ — последовательность символов \downarrow и \uparrow , то будем обозначать через

$$m_y^+(\gamma, \varepsilon) = m_y^+(y_1, \dots, y_s; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s)$$

(соответственно

$$m_y^-(\gamma, \varepsilon) = m_y^-(y_1, \dots, y_s; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s)),$$

где $y \in Y$, число элементов y_i таких, что $y_i = y$ и при этом $\varepsilon_p = \uparrow$ (соответственно $\varepsilon_p = \downarrow$), а через

$$m_y(\gamma, \varepsilon) = m_y(y_1, \dots, y_s; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s)$$

— их разность:

$$m_y(\gamma, \varepsilon) = m_y^+(\gamma, \varepsilon) - m_y^-(\gamma, \varepsilon).$$

Теорема. Пусть $T = S_{x_1 x_2 \dots x_{p-1} x_p}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{p-1} \varepsilon_p}$ и для $y \in S$ положим $m(y) = m_y(x_1, \dots, x_p; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$. Для элементов $b, c \in T$ имеет место неравенство $b < c$ тогда и только тогда, когда в S выполняется одно из следующих условий:

- 1) $b < c$ и $m(b) = m(c)$;
- 2) $b > c$ и $m(b) = m(c) - 2$;
- 3) $b \approx c$ и $m(b) = m(c) - 1$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $b < c$ в T . Покажем, что в S выполняется одно из условий 1) – 3).

Применим индукцию по числу p . Случай $p = 0$ тривиальный (так как $T = S$ и $m(y) \equiv 0$, то имеет место условие 1)).

Рассмотрим теперь случай $p = 1$: $T = S_{x_1}^{\varepsilon_1}$. Тогда, очевидно, $T_{x_1}^{\varepsilon_1^{-1}} = S_{x_1 x_1}^{\varepsilon_1 \varepsilon_1^{-1}} = S$. Если $x_1 \neq b, c$, то (по определению $T^{\varepsilon_1^{-1}}$) $b < c$ в S , а поскольку $m(b) = m(c) = 0$, то в S выполняется условие 1). Если $x_1 = b$, то b — минимальный элемент T (b — не может быть максимальным, так как $b < c$), а значит, $\varepsilon_1^{-1} = \uparrow$; и поскольку в этом случае $b \approx c$ в S и $m(b) = -1, m(c) = 0$, то в S выполняется условие 3). Наконец, если $x_1 = c$, то b — максимальный элемент T , а значит, $\varepsilon_1^{-1} = \downarrow$; а поскольку тогда $b \approx c$ в S и $m(b) = 0, m(c) = 1$, то в S опять таки выполняется условие 3).

Пусть теперь $p > 1$. Положим $S' = S_{x_1}^{\varepsilon_1}$ и

$$m'(y) = m_y(x_2, \dots, x_p; \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p),$$

где $y \in S$. Тогда $T = (S')_{x_2 \dots x_{p-1}}^{\varepsilon_2 \dots \varepsilon_{p-1}}$ и по индукционному предположению в S' выполняется одно из таких условий:

- 1') $b < c$ и $m'(b) = m'(c)$;
- 2') $b > c$ и $m'(b) = m'(c) - 2$;

3') $b \approx c$ и $m'(b) = m'(c) - 1$.

Далее доказательство будем проводить по той же схеме, что и для случая $p = 1$. Легко видеть, что $S = S_{x_1 x_1}^{\varepsilon_1 \varepsilon_1^{-1}} = (S')_{x_1}^{\varepsilon_1^{-1}}$. Если $x_1 \neq b, c$, то (по определению $(S')_{x_1}^{\varepsilon_1^{-1}}$) $b < c$ в S , а поскольку $m(b) = m'(b)$ и $m(c) = m'(c)$, то в S выполняется какое-либо из условий 1), 2) или 3), если только в S' выполняется соответствующее ему условие 1'), 2') или 3').

Пусть теперь $x_1 = b$. Если в S' выполняется условие 1'), то b — минимальный элемент S' , а значит, $\varepsilon_1^{-1} = \uparrow$; поскольку тогда $b \approx c$ в S и $m(b) = m'(b) - 1, m(c) = m'(c)$, то в S выполняется условие 3). Если же выполняется условие 2'), то b — максимальный элемент S' , а значит, $\varepsilon_1^{-1} = \downarrow$; но поскольку тогда $b \approx c$ в S и

$$m(b) = m'(b) + 1, m(c) = m'(c),$$

то в S выполняется условие 3). Наконец, если выполняется условие 3'), то либо b — минимальный элемент S' и $\varepsilon_1^{-1} = \uparrow$, либо b — максимальный элемент S' и $\varepsilon_1^{-1} = \downarrow$. Тогда в первом случае $b > c$ в S и $m(b) = m'(b) - 1, m(c) = m'(c)$, а во втором — $b < c$ в S и $m(b) = m'(b) + 1, m(c) = m'(c)$. Значит, в S выполняется соответственно условие 2) или 1).

Случай $x_1 = c$ рассматривается аналогично случаю $x_1 = b$.

Достаточность. Пусть в S выполняется одно из условий 1) — 3). Покажем, что $b < c$ в T .

Применим индукцию по числу p . Если $p = 0$, то $T = S$ и $m(y) = 0$ для любого y , а тогда может выполняться только условие 1), и значит, $b < c$.

В случае $p = 1$ имеем $m(b), m(c) \in \{0, 1\}$ и $m(b) + m(c) = 1$, а значит, выполняется либо условие 1) при $m(b) = m(c) = 0$, либо условие 3) при $m(b) = 1, m(c) = 0$. В обоих случаях в ч. у. множестве $T = S_{x_1}^{\varepsilon_1}$ выполняется отношение $b < c$.

Переходим к случаю $p > 1$. Положим, как и при доказательстве необходимости, $S' = S_{x_1}^{\varepsilon_1}$ и (для $y \in S$)

$$m'(y) = m_y(x_2, \dots, x_p; \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p).$$

Тогда $T = (S')_{x_2 \dots x_p}^{\varepsilon_2 \dots \varepsilon_p}$.

Если $x_1 \neq b, c$, то $m'(b) = m(b)$, $m'(c) = m(c)$ и по индукционному предположению $b < c$ в T (так как из условий 1)–3) в S' выполняется то же самое условие, что и в S).

Пусть теперь $x_1 = b$. Если $\varepsilon_1 = \uparrow$, то

$$m'(b) = m(b) - 1, \quad m'(c) = m(c),$$

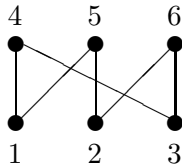
и если в S выполняется условие 1) (соответственно 3)), то в S' выполняется условие 3) (соответственно 2)); условие 2) выполняться не может, так как b — минимальный элемент S . Если же $\varepsilon_1 = \downarrow$, то $m'(b) = m(b) + 1$, $m'(c) = m(c)$, и если в S выполняется условие 2) (соответственно 3)), то в S' выполняется условие 3) (соответственно 1)); условие 1) выполняться не может, так как b — максимальный элемент S .

Случай $x_1 = c$ рассматривается аналогично случаю $x_1 = b$.

Теорема доказана.

Рассмотрим пример, который показывает, каким образом применяется наша теорема.

Возьмем в качестве S ч. у. множество



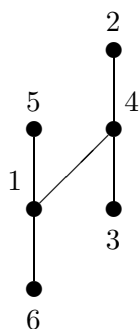
и, пользуясь теоремой, вычислим ч. у. множество $T = S_{125165}^{\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow}$. Поскольку

$$m(1) = m(3) = m(4) = m(5) = 0, \quad m(2) = 1, \quad m(6) = -1,$$

то условие 1) выполняется при $(b, c) = (1, 4), (1, 5), (3, 4)$, условие 2) — при $(b, c) = (6, 2)$ и условие 3) — при

$$(b, c) = (6, 1), (6, 4), (6, 5), (1, 2), (3, 2), (4, 2).$$

Значит, T имеет следующий вид:



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Дрозд Ю. А. Преобразования Кокстера и представления частично упорядоченных множеств // Функц. анализ и его прил. — 1974. — 8. — С. 34–42.
- [2] Bondarenko V. M. On (\min, \max) -equivalence of posets and applications to the Tits forms // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. наук. — 2005. — №1. — С. 24–25.
- [3] Бондаренко В. М., Степочкина М. В. (\min, \max) -эквивалентность частично упорядоченных множеств и квадратичная форма Титса // Проблеми аналізу і алгебри: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2005. — 2, №3. — С. 18–58.

Н. В. Будницька

Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка,
Україна, 01033, Київ-33, вул. Володимирська, 64
E-mail: Nadya_VB@ukr.net

Реалізація замкнених 1-форм з замкненими рекурентними кривими на замкнених поверхнях

The closed 1-forms with isolated zeros and closed recurrent curves on closed surfaces are considered. The theorem of realization of such closed 1-forms is proved.

Ключові слова: замкнена 1-форма, реалізація.

1. ВСТУП

У роботі [1] С.В. Білун і О.О. Пришляк знайшли топологічну класифікацію замкнених 1-форм Морса з ізольованими нулями та замкненими рекурентними кривими на замкнений поверхнях. У роботах [3, 4] Н.В. Будницька та О.О. Пришляк отримали необхідні та достатні умови топологічної еквівалентності замкнених 1-форм з ізольованими нулями на орієнтованих та неорієнтованих поверхнях відповідно.

Метою цієї роботи є вивчення реалізації замкнених 1-форм з ізольованими нулями та замкненими рекурентними кривими на замкнених поверхнях.

2. ОСНОВНІ ОЗНАЧЕННЯ

Нагадаємо деякі означення з робіт [1,3]. Нехай M — замкнена поверхня роду p і на M задана замкнена 1-форма

$$\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy,$$

© Н. В. Будницька, 2009

де $A, B : U \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкі функції, $U \subset M$ — відкрита множина, (x, y) — координати в U .

Означення 1. Позначимо через

$$N(\omega) = \{z \in M : A(z) = 0, B(z) = 0\}$$

множину нулів форми ω . Крива $\gamma \subset M$, що не містить нулів, називається інтегральною кривою 1-форми ω , якщо локально вона є рівнем функції f такої, що $\omega = df$.

Будемо розглядати тільки максимальні інтегральні криві (які не є власними підмножинами інших кривих) і будемо називати їх просто кривими.

Нехай $z \in M \setminus N(\omega)$. Для кожного досить малого околу $U(z)$ цієї точки крива, що проходить через z , розбиває $U(z)$ на дві частини: додатну $\{v : f(v) - f(z) > 0\}$ і від'ємну $\{v : f(v) - f(z) < 0\}$. Об'єднання додатних частин околів будемо називати додатною підобластю, від'ємних — від'ємною підобластю.

Означення 2. Нуль 1-форми називається ізольованим, якщо існує його окіл, що не містить інших нулів.

Далі в роботі будемо розглядати замкнені 1-форми, які мають лише скінченне число ізольованих нулів. Відомо, що інтегральні криві не мають джерел (витоків), стоків і кривих, ω -граничними або α -граничними множинами яких є криві гомотопні колу S^1 .

Означення 3. Інтегральна крива $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ називається рекурентною, якщо

$$\gamma \subset \{z \in M : \exists \{t_n\} \rightarrow \pm\infty, \gamma(t_n) \rightarrow z, n \rightarrow \infty\}.$$

З означення випливає, що якщо інтегральна крива є замкненою або скрізь щільною в M , то вона є рекурентною. Далі в роботі розглядаються лише замкнені рекурентні криві.

1-Форма називається замкненою, якщо $d\omega = 0$. Відомо, що існує $f \in C^2(U)$, де U — відкрита множина: $\omega = df$ тоді і лише тоді, коли ω замкнена в U . Тому далі будемо розглядати

такі 1-форми ω , для яких локально існує функція f : $\omega = df$. З роботи [5] відомо, що для кожної критичної точки z_0 (крім локального мінімуму і максимуму) існує окіл, у якому функція f спряжена з функцією $\operatorname{Re}(x + iy)^k$ для деякого числа $k \in \mathbb{N}$. Можливі лише два різновиди ізольованих точок: сідло і центр.

Об'єднання нулів та інтегральних кривих, що їх з'єднують, замкненої 1-форми ω будемо розглядати як граф $G(\omega)$, який вкладений в M . При цьому, якщо з нуля виходить незамкнена рекурентна півкрива, то для отримання графу $G(\omega)$ ми відітнемо цю півкриву на деякій відстані від нуля, отримаємо ребро з однією вершиною валентності 1. Оскільки в околі кожного нуля функція f спряжена з функцією $\operatorname{Re}(x + iy)^k$ для деякого числа $k \in \mathbb{N}$, то із кожного нуля, відмінного від центру, виходить парна кількість півкривих і кожна вершина графу $G(\omega)$, крім вершин валентності 1, має парну валентність. Далі будемо вважати, що центр має 0-валентність, тобто парну валентність. Зауважимо, що ми не розглядаємо вершини валентності 2. Отже, вершинами графа $G(\omega)$ є нулі або точки з вершинами валентності 1, а ребрами — інтегральні криві, що їх з'єднують. Оскільки в даній роботі ми розглядаємо 1-форми ω з замкненими рекурентними кривими, то у графі $G(\omega)$ не буде вершин валентності 1.

Розглянемо M через склеювання відповідних сторін у правильному $4p$ -кутнику для орієнтованої і $2p$ -кутнику для неорієнтованої поверхні в \mathbb{R}^2 , p — рід M . В кожній точці інтегральної кривої в \mathbb{R}^2 можна задати єдиний вектор $\bar{p} = (A, B) = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$.

Означення 4. Будемо вважати, що в кожній точці вектор \bar{p} направлений від інтегральної кривої з меншим значенням рівня (з від'ємної частини околу) до інтегральної кривої з більшим значенням рівня (в додатну частину околу), тобто вектор \bar{p} локально порівнює 2 сусідні інтегральні криві замкненої 1-форми ω і будемо його називати порівнюючим напрямком в точці.

3. РЕАЛІЗАЦІЯ ЗАМКНЕНОЇ 1-ФОРМИ НА ПОВЕРХНЯХ

Нехай M — замкнена поверхня роду p , G — граф, вкладений в M , який не має вершин валентності 2 і має вершини парної валентності. Нехай довільна замкнена крива s перетинає G в точках x_k . Зафіксуємо деяку точку перетину x_k і поставимо їй у відповідність знак δ_k , який є $+$, або $-$. Тоді з кожною наступною точкою x_{k+1} будемо пов'язувати знак δ_{k+1} за таким правилом: якщо рухаючись по s кожну наступну точку перетину x_{k+1} можна отримати рухаючись від попередньої x_k по ребрах і вершинах (чи ребрі) графу G , то для точки x_{k+1} будемо вважати $\delta_{k+1} = -\delta_k$, тобто δ_k змінює знак. Якщо таких ребер (чи ребра) не існує, то з точкою x_{k+1} співставимо $\delta_{k+1} = \delta_k$, тобто δ_k знаку не змінює. Зауважимо, що знак δ_k будемо ставити перед перетином кривої s з графом G , який визначає точку x_k . Таким чином, на кривій s ми задали множину точок x_k , які утворені перетином графа G з кривою s , і з кожною точкою співставили знак δ_k , який дорівнює $+$ чи $-$.

Лема 1. *Нехай M — замкнена поверхня роду p , $G(\omega)$ — граф замкненої 1-форми ω , вкладений в M , який не має вершин валентності 2. s — довільна замкнена крива, яка перетинає $G(\omega)$ послідовно в точках x_k , з якими співставлені знаки δ_k за правилом, описаним вище. Тоді при повному обході s , починаючи з x_k , ми повернемося в початкову точку з тим самим знаком δ_k .*

Доведення. Оскільки $G(\omega)$ — граф замкненої 1-форми ω , то в околі $G(\omega)$ всюди узгоджені порівнюючі напрямки. Кожна інтегральна крива розбиває околі довільної точки на дві частини: додатну і від'ємну. В околі $G(\omega)$ всюди узгоджені порівнюючі напрямки і кожен порівнюючий напрямок напрямлений з від'ємної частини околу у додатну, тобто від $-$ до $+$. Тому в кожній точці x_k знак δ_k розглянемо як додатну (при $\delta_k = +$) чи від'ємну (при $\delta_k = -$) частину околу.

Нехай x_k — точка перетину кривої s з графом $G(\omega)$ і нехай δ_k — значення, яке ми співставили з x_k . Рухаючись по кривій s підходимо до x_{k+1} — наступної точки перетину кривої s з графом $G(\omega)$. Якщо x_{k+1} можна отримати, рухаючись від попередньої точки x_k , по ребрах і вершинах (чи ребрі) графу $G(\omega)$, то це означає, що точки x_k і x_{k+1} належать до одного циклу, який містить інший максимальний зв'язний підграф (наприклад центр), тому в даному циклі порівнюючий напрямок буде змінюватися на протилежний і за правилом, описаним вище, з точкою x_{k+1} співставимо $\delta_{k+1} = -\delta_k$. Якщо ж x_{k+1} не можна отримати, рухаючись від попередньої x_k по ребрах і вершинах (чи ребрі) графу $G(\omega)$, то точки x_k і x_{k+1} належать до різних максимальних зв'язних підграфів, які розділяє область, гомеоморфна циліндру, тому порівнюючий напрямок не буде змінюватися на протилежний і за правилом, описаним вище, з точкою x_{k+1} співставимо $\delta_{k+1} = \delta_k$.

З описаних пояснень випливає, що в кожній наступній точці перетину x_{k+1} кривої s з графом $G(\omega)$ знак δ_{k+1} буде протилежним до δ_k , лише якщо буде змінювати напрямок відповідний порівнюючий напрямок, і δ_{k+1} буде дорівнювати δ_k , якщо напрямок порівнюючого напрямку залишатиметься без змін. Оскільки знак δ_k ми визначаємо однозначно, а саме: перед перетином s з графом $G(\omega)$, який визначає точку x_k , то в даному випадку порівнюючий напрямок в точці x_k буде однозначно задавати δ_k — знак однієї частини околу. Тому замість дослідження порівнюючих напрямків 1-форми ω можна досліджувати знаки δ_k . А оскільки порівнюючі напрямки всюди узгодженні, то при обході s ми повернемося в початкову точку з тим самим порівнюючим напрямком, тобто з тим самим знаком δ_k .

Лема доведена.

Покажемо, що у випадку \mathbb{R}^2 справедлива обернена властивість.

Лема 2. *Нехай G — граф, вкладений в \mathbb{R}^2 , який не має вершин валентності 2 і має вершини парної валентності, s — довільна замкнена крива, яка перетинає G послідовно в точках x_k . Співставимо з точками x_k знаки δ_k за правилом, описаним вище. При обході s , починаючи з точки x_k , ми повернемося в початкову точку з тим самим знаком δ_k . Тоді $G = G(\omega)$ — граф деякої замкненої 1-форми ω .*

Доведення. Локально кожне ребро G розбиває окіл точки x_k на додатну і від'ємну частини і, як описувалось в доведенні попередньої лема, δ_k визначає знак частини околу, який зустрічаємо до перетину s з G . Тоді $-\delta_k$ — знак іншої частини околу.

Рухаючись по замкненій кривій s ми всюди розставляємо знаки δ_k в околах до перетину s з G . В частинах околів після перетину s з G знаки будуть протилежними до δ_k . Проведемо аналогічні міркування для довільної замкненої кривої s . В кожній точці задаємо порівнюючий напрямок, який йде від $-$ до $+$. Оскільки при обході довільної кривої s ми повернемося в початкову точку з тим самим знаком δ_k , то це є свідченням того, що порівнюючий напрямок при обході довільної кривої s повернеться з тим самим напрямком в початкову точку. А це і означає, що ми отримали всюди узгоджені порівнюючі напрямки.

Отже, ми отримали G — граф, який не має вершин валентності 2 і має вершини парної валентності, і всюди узгоджені порівнюючі напрямки, тому $G = G(\omega)$ — граф деякої замкненої 1-форми ω .

Лема доведена.

Теорема 1. *Нехай M — замкнена поверхня роду p , G — граф, який не має вершин валентності 2 і має вершини парної валентності, вкладений в M . Існує замкнена 1-форма ω з заданим графом $G = G(\omega)$ тоді і лише тоді, коли виконуються: s — довільна замкнена крива, яка перетинає G послідовно в точках x_k ; кожній точці x_k поставлено у відповідність знак δ_k*

за правилом, описаним вище. Тоді при повному обході s , починаючи з точки x_k , ми повернемося в початкову точку з тим самим знаком δ_k .

Доведення. Необхідність. Випливає з леми 1.

Достатність. Розглянемо окремо випадки, коли M — орієнтована або неорієнтована поверхня.

1) M — орієнтована поверхня. Розглянемо M через склеювання відповідних сторін правильного $4p$ -кутника в \mathbb{R}^2 , p — рід M . Кожна пара відповідних сторін у $4p$ -кутнику задає деяку замкнену криву s_j на M .

Нехай $\{s_j\}$ — множина замкнених кривих на M , x_{jk} — точки перетину кривої s_j з графом G . Зафіксуємо довільну замкнену криву s_1 і розставимо знаки δ_{1k} в точках x_{1k} , перетину кривої s_1 з графом G за правилом, описаним вище. Нехай криві s_1 і s_j , $j \neq 1$, перетинаються. При перетині s_1 і s_j , $j \neq 1$, розглянемо нові замкнені криві, які належать $s_1 \cup s_j$, а саме: візьмемо від точки перетину цих кривих по одній дузі з кожної кривої так, щоб їх об'єднання задавало орієнтовану криву. Тоді, знаючи знаки δ_{1k} на кривій s_1 , ми задаємо знаки δ_{jk} на кривій s_j . Розставимо знаки δ_{jk} для всіх точок перетину кривих s_j з графом G . Таким чином, ми розставили знаки δ_{jk} на межі $4p$ -кутника.

Знаки δ_{jk} в точках перетину G з межею $4p$ -кутника індукують знаки δ_k на ребрах G , які перетинають межу. Оскільки у внутрішності $4p$ -кутника при повному обході довільної кривої s , починаючи з точки x_k , ми повернемося в початкову точку з тим самим знаком δ_k , то у внутрішності $4p$ -кутника всюди, за правилом, описаним вище, розставлені знаки δ_k . За лемою 2 існує замкнена 1-форма ω з заданим графом $G = G(\omega)$.

2) M — неорієнтована поверхня. Розглянемо M через склеювання відповідних сторін у правильному $2p$ -кутнику в \mathbb{R}^2 , p — рід M . Позначимо через $c_1, c'_1, c_2, c'_2, \dots, c_p, c'_p$ сторони $2p$ -кутника, причому сторони з однаковими нижніми індексами ототожнюються. Зауважимо, що межа $c_1 c'_1 c_2 c'_2 \dots c_p c'_p$ гомеоморфна замкненій орієнтованій кривій в

\mathbb{R}^2 . Обходячи межу $c_1c_1c_2c_2 \dots c_p c_p$, послідовно позначаємо точки перетину сторони c_i з графом G через y_{is} , $i = \overline{1, p}$, $s = \overline{1, S(i)}$, тоді y'_{is} — точки перетину сторони c'_i з графом G . Оскільки c_i і c'_i ототожнюються, то y_{is} і y'_{is} розміщені однаково на c_i і c'_i .

Розглянемо деяку сторону $c_i : c_i \cap G \neq \emptyset$, точку $y_{i1} \in c_i \cap G$ і задамо в y_{i1} довільний порівнюючий напрямок (наприклад порівнюючий напрямок збігається з напрямком сторони c_i). Якщо y_{i2} можна досягнути рухаючись від попередньої y_{i1} по ребрах і вершинах (чи ребрі) графу G , то це означає, що точки y_{i2} і y_{i1} належать до одного циклу, який містить інший максимальний зв'язний підграф (наприклад центр), тому в даному циклі порівнюючий напрямок буде змінюватися на протилежний і за правилом, описаним вище, з точкою y_{i2} співставимо порівнюючий напрямок, протилежний до порівнюючого напрямку y_{i1} , в іншому випадку порівнюючий напрямок не змінюється. Аналогічно розглядаємо всі точки з $c_i \cap G$ і задаємо порівнюючі напрямки на них.

Порівнюючі напрямки на стороні c'_i будемо задавати в такий спосіб: у точці y'_{is} порівнюючий напрямок буде протилежним до порівнюючого напрямку в точці y_{is} , тобто якщо в точці y_{is} порівнюючий напрямок збігався з напрямком сторони c_i , то в точці y'_{is} порівнюючий напрямок буде протилежним до напрямку сторони c'_i . Таким чином, ми задали порівнюючі напрямки в точках перетину G з парою сторін c_i, c'_i .

При обході $c_1c_1c_2c_2 \dots c_p c_p$ розглянемо сторону $c_j : c_j \cap G \neq \emptyset$, точку $y_{j1} \in c_j \cap G$. Якщо y_{j1} можна отримати, рухаючись від попередньої точки $y'_{iS(i)}$ по ребрах і вершинах (чи ребрі) графу G , то це означає, що точки $y'_{iS(i)}$ і y_{j1} належать до одного циклу, тому в даному циклі порівнюючий напрямок буде змінюватися на протилежний і за правилом, описаним вище, з точкою y_{j1} співставимо порівнюючий напрямок, протилежний до порівнюючого напрямку $y'_{iS(i)}$, в іншому випадку порівнюючий напрямок не змінюється. Задавши порівнюючий напрямок

в точці y_{j1} , аналогічно до випадку з парою сторін c_i, \acute{c}_i , задаємо порівнюючі напрямки в точках перетину G з c_j, \acute{c}_j . Далі узагальнюємо викладені міркування на всю межу $2p$ -кутника.

Порівнюючі напрямки в точках перетину G з межею $2p$ -кутника індукують порівнюючі напрямки на ребрах G , які перетинають межу. Якщо задамо кожен порівнюючий напрямок через $+ i -$, то порівнюючий напрямок направлений з $-$ в $+$. Оскільки за умовою теореми при обході довільної замкненої кривої ми повернемося в початкову точку з тим самим знаком, то нові $+ i -$ будуть всюди узгодженими. Тоді за лемою 2 існує замкнена 1-форма ω з заданим графом $G = G(\omega)$.

Теорема доведена.

4. ВИСНОВОК

У даній роботі знайдено умови, при яких деякий граф, який не має вершин валентності 2 і має вершини парної валентності, визначає замкнену 1-форму з замкненими рекурентними кривими на замкнених поверхнях.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Білун С.В., Пришляк О.О. Замкнені 1-форми Морса на замкнених поверхнях // Вісн. Київ. нац. ун-ту. - 2002. - №8. - С.77-81.
- [2] Будницька Н.В., Пришляк О.О. Замкнені 1-форми з ізольованими критичними точками на замкнених орієнтованих поверхнях // Вісн. Київ. нац. ун-ту. - 2007. - №18. - С.66-69.
- [3] Будницька Н.В., Пришляк О.О. Еквівалентність замкнених 1-форм на замкнених орієнтованих поверхнях // Вісн. Київ. нац. ун-ту. - 2008. - №19. - С.36-38.
- [4] Будницька Н.В. Еквівалентність замкнених 1-форм на замкнених неорієнтованих поверхнях // Нелінійні коливання. - 2008 (стаття подана до друку).
- [5] Prishlyak A. O. Topological equivalence of smooth functions with isolated critical points on a closed surface // Topology and its Applications. - 2002. - №119. - P.257-267.

Т. В. Будницька

Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка
Україна, 01033, Київ-33, вул. Володимирська, 64
E-mail: Budnitska_T@ukr.net

Топологічна класифікація дробово-лінійних перетворень

The linear fractional transformations from $\overline{\mathbb{C}}$ to $\overline{\mathbb{C}}$ are investigated. Necessary and sufficient conditions for a topological conjugacy of such transformations are obtained.

Ключові слова: дробово-лінійні перетворення, Мьобіусові перетворення, топологічна спряженість, класифікація.

1. ВСТУП

Дробово-лінійні перетворення — це перетворення вигляду

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

де $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ такі, що $ad - bc \neq 0$. Остання умова гарантує те, що f не є константою, а також, що c та d не дорівнюють нулю одночасно. Таким чином, f визначене на всьому \mathbb{C} , якщо $c = 0$, і на $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$, якщо $c \neq 0$. Покладемо:

$$\begin{aligned} f(\infty) &= \infty \text{ при } c = 0, \\ f(-\frac{d}{c}) &= \infty, f(\infty) = \frac{a}{c} \text{ при } c \neq 0. \end{aligned}$$

Після цього f буде взаємно однозначним перетворенням $\overline{\mathbb{C}}$ на себе.

Нехай $X = \mathbb{C}$ або $\overline{\mathbb{C}}$.

Відображення $f, g : X \rightarrow X$ називають *топологічно спряженими* (позначатимемо $f \overset{t}{\sim} g$), якщо існує гомеоморфізм $h : X \rightarrow X$ такий, що $g = h \circ f \circ h^{-1}$.

Надалі бієктивні відображення будемо називати *перетвореннями*.

Дробово-лінійні перетворення $f, g : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ називають *спряженими* (позначатимемо $f \overset{\ell}{\sim} g$), якщо існує дробово-лінійне перетворення $h : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ таке, що $g = h \circ f \circ h^{-1}$.

Очевидно, що зі спряженості дробово-лінійних відображень випливає їх топологічна спряженість, але обернене твердження не вірне.

А. Бердон [1] класифікував дробово-лінійні перетворення, з точністю до спряженості.

Класифікація дробово-лінійних перетворень, з точністю до топологічної спряженості, залишалася відкритою проблемою, тому розв'язанню цієї задачі й присвячено дану роботу. Ми отримали наступний результат.

Теорема 1. *Нехай $f, g : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ — дробово-лінійні перетворення.*

Якщо f та g мають хоча б по 2 різні нерухомі точки ξ_1, ξ_2 та ψ_1, ψ_2 , відповідно, то $f \overset{t}{\sim} g$ тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови:

$$\text{або } \begin{cases} |f'(\xi)| \neq 1, \\ |g'(\psi)| \neq 1, \end{cases} \quad \text{або } f'(\xi) = g'(\psi), \quad \text{або } f'(\xi) = \overline{g'(\psi)},$$

де $\xi \in \{\xi_1, \xi_2\}$, $\psi \in \{\psi_1, \psi_2\}$.

Якщо f та g мають тільки по 1 нерухомій точці, то вони завжди є топологічно спряженими.

В інших випадках перетворення f та g не є топологічно спряженими.

2. ПОПЕРЕДНІ ВІДОМОСТІ

А. Бердон [1] класифікував дробово-лінійні перетворення, з точністю до спряженості, а саме: показав, що кожне відмінне від тотожного дробово-лінійне перетворення f , в залежності

від кількості нерухомих точок, є спряженим з однією зі **стандартних (нормальних) форм**:

$$(1) \quad \begin{aligned} m_k(z) &= kz, \text{ де } k \neq 0, 1 \\ m_1(z) &= z + 1. \end{aligned}$$

Тобто, якщо відмінне від тотожного дробово-лінійне перетворення f має 2 різні нерухомі точки, то існує $k \in \mathbb{C} \setminus \{0; 1\}$ таке, що $f \stackrel{\ell f}{\sim} m_k$; якщо f має тільки 1 нерухому точку, то $f \stackrel{\ell f}{\sim} m_1$.

Відомо, що кожна комплексна (2×2) матриця

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad ad - bc \neq 0,$$

визначає дробово-лінійне перетворення

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

що діє з розширеної комплексної площини на себе. І навпаки, кожне дробово-лінійне перетворення f визначає матрицю A , з точністю до множника, що не дорівнює 0.

А. Бердон [1], використовуючи функцію

$$\text{tr}^2(f) = \frac{\text{tr}^2(A)}{\det(A)}, \quad A \in \text{GL}(2, \mathbb{C}),$$

яка є інваріантною відносно перетворення $A \mapsto \lambda A$, $\lambda \neq 0$, довів таку теорему.

Теорема 2. [1] Нехай $f, g : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ відмінні від тотожного дробово-лінійні перетворення. То $f \stackrel{\ell f}{\sim} g$ тоді і тільки тоді, коли $\text{tr}^2(f) = \text{tr}^2(g)$.

У роботі [2] дана класифікація, з точністю до топологічної спряженості, лінійних відображень з \mathbb{C} в \mathbb{C} , тобто має місце така лема.

Лема 1. [2] Нехай $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = az$, $g(z) = cz$, $a, c \in \mathbb{C}$, — лінійні відображення. То $f \stackrel{t}{\sim} g$ тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови:

$$\text{або } \begin{cases} 0 < |a| < 1, \\ 0 < |c| < 1, \end{cases} \quad \text{або } \begin{cases} |a| > 1, \\ |c| > 1, \end{cases} \quad \text{або } a = c, \quad \text{або } a = \bar{c},$$

(тобто коли $|a|, |c|$ або одночасно менші 1 та не дорівнюють 0, або одночасно більші 1, або $a = c$, або $a = \bar{c}$).

Необхідні та достатні умови топологічної спряженості лінійних відображень з $\overline{\mathbb{C}}$ в $\overline{\mathbb{C}}$ дає наступна лема.

Лема 2. Нехай $f, g : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, $f(z) = az$, $g(z) = cz$, $a, c \in \mathbb{C}$, — лінійні відображення. У цьому випадку $f \stackrel{t}{\sim} g$ тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови:

$$\text{або } \begin{cases} |a| \notin \{0; 1\}, \\ |c| \notin \{0; 1\}, \end{cases} \quad \text{або } a = c, \quad \text{або } a = \bar{c},$$

(тобто коли $|a|, |c|$ або одночасно не дорівнюють 0 та 1, або $a = c$, або $a = \bar{c}$).

Доведення. Нехай $f(z) = az$, $g(z) = cz$, де $a, c \in \mathbb{C}$, такі, що

$$\text{або } \begin{cases} 0 < |a| < 1, \\ 0 < |c| < 1, \end{cases} \quad \text{або } \begin{cases} |a| > 1, \\ |c| > 1, \end{cases} \quad \text{або } a = c, \quad \text{або } a = \bar{c}.$$

Якщо ці лінійні відображення f та g діють з \mathbb{C} в \mathbb{C} , то за лемою 1 вони є топологічно спряженими, тобто існує спрягаючий їх гомеоморфізм h , що діє з \mathbb{C} в \mathbb{C} .

Нескладно перевірити, що перетворення $\tilde{h} : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ таке, що

$$\tilde{h}(\infty) = \infty, \quad \tilde{h}(z) = h(z) \text{ при } z \neq \infty,$$

є гомеоморфізмом. Тому ці ж лінійні відображення f та g , що діють з $\overline{\mathbb{C}}$ в $\overline{\mathbb{C}}$, теж є топологічно спряженими, бо \tilde{h} — відповідний спрягаючий їх гомеоморфізм.

Відображення $f, g : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, $f(z) = az$, $g(z) = \frac{1}{a}z$, де $|a| \notin \{0; 1\}$, є топологічно спряженими, бо існує гомеоморфізм $\phi :$

$\overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, $\phi(z) = \frac{1}{z}$ такий, що $g = \phi \circ f \circ \phi^{-1}$. Якщо $|a| = 1$, то $f(z) = e^{i\varphi}z$, $g(z) = e^{-i\varphi}z$, тобто $a = \bar{c}$, а даний випадок вже був розглянутий.

Отже, відображення $f, g : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, $f(z) = az$, $g(z) = cz$, $a, c \in \mathbb{C}$, будуть топологічно спряженими тоді і тільки тоді, коли

$$\text{або } \begin{cases} |a| \notin \{0; 1\}, \\ |c| \notin \{0; 1\}, \end{cases} \quad \text{або } a = c, \quad \text{або } a = \bar{c}.$$

Лема доведена.

Наслідок 1. *Нехай $f, g : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, $f(z) = az$, $g(z) = cz$, $a, c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, — лінійні перетворення. У цьому випадку $f \stackrel{t}{\sim} g$ тоді і тільки тоді, коли або $|a|$ та $|c|$ одночасно не дорівнюють 1, або $a = c$, або $a = \bar{c}$.*

3. КЛАСИФІКАЦІЯ ДРОБОВО-ЛІНІЙНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ, З ТОЧНІСТЮ ДО ТОПОЛОГІЧНОЇ СПРЯЖЕНОСТІ

Необхідні та достатні умови топологічної спряженості дробово-лінійних перетворень дає така теорема.

Теорема 3. *Нехай $f, g : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ — дробово-лінійні перетворення.*

Якщо f та g мають хоча б по 2 різні нерухомі точки ξ_1, ξ_2 та ψ_1, ψ_2 відповідно, то $f \stackrel{t}{\sim} g$ тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови:

$$\text{або } \begin{cases} |f'(\xi)| \neq 1, \\ |g'(\psi)| \neq 1, \end{cases} \quad \text{або } f'(\xi) = g'(\psi), \quad \text{або } f'(\xi) = \overline{g'(\psi)},$$

де $\xi \in \{\xi_1, \xi_2\}$, $\psi \in \{\psi_1, \psi_2\}$.

Якщо f та g мають тільки по 1 нерухомій точці, то вони завжди є топологічно спряженими.

В інших випадках перетворення f та g не є топологічно спряженими.

Доведення. Довільне дробово-лінійне перетворення може мати або 2 різні нерухомі точки, або 1, або нескінченно багато

(тобто бути тотожним перетворенням). Оскільки у топологічно спряжених перетворень однакова кількість нерухомих точок, то доведемо теорему для кожного класу таких перетворень, у яких кількість нерухомих точок однакова.

Отже, маємо 3 випадки.

1) Дробово-лінійні перетворення, що мають тільки по 2 різні нерухомі точки.

Зауважимо, що дробово-лінійне перетворення

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

має тільки 2 різні нерухомі точки, а саме:

$$\xi_{1,2} = \frac{a-d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2c}$$

тоді і тільки тоді, коли $(a-d)^2 + 4bc \neq 0$.

Використовуючи умови (1), приходимо до висновку, що таке перетворення f є спряженим (а отже, є й топологічно спряженим) з деякою стандартною формою $m_k(z) = kz$, $k \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.

З теореми 2 випливає, що $\text{tr}^2(f) = \text{tr}^2(m_k)$, тобто $\frac{(a+d)^2}{ad-bc} = \frac{(k+1)^2}{k}$. За допомогою цього виразу обчислюємо значення k , отримуємо:

$$k_1 = \frac{a+d+\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{a+d-\sqrt{(a-d)^2+4bc}}, \quad k_2 = \frac{a+d-\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{a+d+\sqrt{(a-d)^2+4bc}}.$$

Знайшовши значення похідної перетворення f у нерухомих точках ξ_1 та ξ_2 , нескладно перевірити, що

$$k_1 = \frac{1}{f'(\xi_1)}, \quad k_2 = \frac{1}{f'(\xi_2)}.$$

Легко бачити, що $k_1 = \frac{1}{k_2}$, $k_1, k_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, тому й

$$(2) \quad f'(\xi_1) = \frac{1}{f'(\xi_2)}, \quad f'(\xi_1), f'(\xi_2) \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}.$$

Отже, маємо дві стандартні форми:

$$m_{k_1}(z) = k_1 z = \frac{1}{f'(\xi_1)} z = f'(\xi_2) z$$

та

$$m_{k_2}(z) = k_2 z = \frac{1}{f'(\xi_2)} z = f'(\xi_1) z,$$

які є топологічно спряженими між собою (бо існує гомеоморфізм $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $h(z) = \frac{1}{z}$ такий, що $m_{k_1} = h \circ m_{k_2} \circ h^{-1}$). Тому далі відповідну стандартну форму перетворення f будемо позначати:

$$(3) \quad m_f(z) = f'(\xi) z,$$

де $f'(\xi) \in \mathbb{C} \setminus \{0; 1\}$, $\xi \in \{\xi_1, \xi_2\}$ — довільна нерухома точка f .

Отже, дробово-лінійні перетворення f та g , що мають тільки по 2 різні нерухомі точки, будуть топологічно спряженими тоді і тільки тоді, коли топологічно спряженими будуть відповідні стандартні форми $m_f(z) = f'(\xi) z$ та $m_g(z) = g'(\psi) z$.

Використовуючи наслідок 1, маємо, що $m_f \stackrel{t}{\sim} m_g$ тоді і тільки тоді, коли

$$\text{або } \begin{cases} |f'(\xi)| \neq 1, \\ |g'(\psi)| \neq 1, \end{cases} \quad \text{або } f'(\xi) = g'(\psi), \quad \text{або } f'(\xi) = \overline{g'(\psi)},$$

де $\xi \in \{\xi_1, \xi_2\}$, $\psi \in \{\psi_1, \psi_2\}$.

Отже, ми отримали необхідні та достатні умови топологічної спряженості дробово-лінійних перетворень, що мають **тільки по 2** різні нерухомі точки.

2) Дробово-лінійні перетворення, що мають нескінченно багато нерухомих точок.

Довільне дробово-лінійне перетворення, що має нескінченно багато нерухомих точок є тотожним перетворенням. Тому такі перетворення f та g завжди є топологічно спряженими, бо $f(z) = g(z) = \text{id}_{\mathbb{C}}(z)$.

3) Дробово-лінійні перетворення, що мають тільки по 1 нерухомій точці.

Використовуючи умови (1), приходимо до висновку, що таке перетворення є спряженим зі стандартною формою $m_1(z) = z + 1$. Тому два довільні дробово-лінійні перетворення, які мають тільки по 1 нерухомій точці, завжди є топологічно спряженими.

Об'єднуючи результати перших двох випадків, отримаємо, що перетворення f та g , що мають **хоча б по 2** різні нерухомі точки ξ_1, ξ_2 та ψ_1, ψ_2 , відповідно, будуть топологічно спряженими тоді і тільки тоді, коли

$$(4) \quad \text{або} \quad \begin{cases} |f'(\xi)| \neq 1, \\ |g'(\psi)| \neq 1, \end{cases} \quad \text{або} \quad f'(\xi) = g'(\psi), \quad \text{або} \quad f'(\xi) = \overline{g'(\psi)},$$

де $\xi \in \{\xi_1, \xi_2\}$, $\psi \in \{\psi_1, \psi_2\}$.

Зауважимо, що поєднання 1)-го та 2)-го випадків є коректним, бо в 1)-у випадку розглядаються такі перетворення f , що $f'(\xi) \neq 1$ (див. (2)), а в 2)-у — такі \tilde{f} , що $\tilde{f}'(z) = 1$, а за умовами (4) такі перетворення f та \tilde{f} не є топологічно спряженими.

У випадку 3) дробово-лінійні перетворення, що мають **тільки по 1** нерухомій точці, завжди є топологічно спряженими.

Ми отримали необхідні та достатні умови даної теореми. Та оскільки у доведенні ми використовували не лише топологічно спряжені, але й спряжені дробово-лінійні перетворення, то може виникнути припущення, що дана класифікація не є повною. Тобто, що існує гомеоморфізм $\phi : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ такий, що $f = \phi \circ g \circ \phi^{-1}$, проте умови (4) не виконуються.

Та хибність цього припущення доводять такі міркування.

Нехай f та g — відмінні від тотожних дробово-лінійні перетворення, а m_f та m_g — їхні відповідні стандартні форми (див. (3)). За умовами (1) існують дробово-лінійні перетворення d_1 та d_2 такі, що $f = d_1 \circ m_f \circ d_1^{-1}$ та $g = d_2 \circ m_g \circ d_2^{-1}$. Отже, $d_1 \circ m_f \circ d_1^{-1} = \phi \circ d_2 \circ m_g \circ d_2^{-1} \circ \phi^{-1}$, тобто $m_f \stackrel{t}{\sim} m_g$, а з наслідку 1 випливає, що виконуються умови (4). Отримали протиріччя.

Тому дана класифікація є повною, а умови теореми коректно сформульованими.

Теорема доведена.

3.1. Геометрична інтерпретація топологічно спряжених дробово-лінійних перетворень з $\overline{\mathbb{C}}$ в $\overline{\mathbb{C}}$. Як вже зазначалося, якщо відмінне від тотожного дробово-лінійне перетворення $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ має 2 різні нерухомі точки, то існує $k \in \mathbb{C} \setminus \{0; 1\}$ таке, що f є спряженим зі стандартною формою $t_k(z) = kz$, де $k = f'(\xi)$, ξ — довільна нерухома точка f (див. умови (3)).

В залежності від значення числа $k \in \mathbb{C} \setminus \{0; 1\}$ розрізняють 3 випадки:

- 1) k — число дійсне та додатне,
- 2) $k = e^{i\alpha}$ при $\alpha \neq 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$,
- 3) $k = r e^{i\alpha}$ при $r \neq 1$, $\alpha \neq 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$.

У першому випадку перетворення f називають *гіперболічним*, у другому — *еліптичним*, а в третьому — *локсодромічним*.

Довільне дробово-лінійне перетворення, що має тільки одну нерухому точку називають *параболічним*.

Застосовуючи класифікацію дробово-лінійних перетворень за вище перерахованими типами, отримаємо таку теорему.

Теорема 4. *Серед нееліптичних перетворень існує 3 топологічно неспряжених класи дробово-лінійних перетворень:*

- 1) *перший клас складається з усіх параболічних перетворень,*
- 2) *другий — з гіперболічних та локсодромічних перетворень,*
- 3) *третій — з тотожного перетворення.*

Серед еліптичних перетворень кожен клас топологічної спряженості дробово-лінійних перетворень задається величиною кута повороту (що визначений з точністю до $2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$).

4. ВИСНОВОК

У даній роботі встановлено класифікацію дробово-лінійних перетворень, з точністю до топологічної спряженості.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Бердон А. Геометрия дискретных групп / Пер. с англ. – 1986. – М.: Наука, 304с.
- [2] Будницька Т.В. Топологічна класифікація афінних відображень з \mathbb{C} в \mathbb{C} // Вісн. Київ. нац. ун-ту. – 2009 (стаття подана до друку).

517.929

А. В. Вельгач

Институт математики НАН України, Київ

Періодичні розв'язки систем лінійних диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу і їх властивості

Одержано достатні умови існування T -періодичного неперервно диференційовного при $t \in R$ розв'язку системи лінійних диференціально-функціональних рівнянь з нелінійним відхиленням аргументу та досліджено його властивості.

Розглянемо систему лінійних диференціально-функціональних рівнянь вигляду

$$(1) \quad x'(t) = Ax(t) + \sum_{i=0}^m A_i(t)x(k_it + f_i(t)) + \sum_{i=0}^m B_i(t)x'(l_it + g_i(t)) + F(t),$$

де $t \in (-\infty; +\infty)$, A — стала $(n \times n)$ -матриця, $A_i(t)$, $B_i(t)$, $i = 0, \dots, m$, — деякі неперервні T -періодичні $(n \times n)$ -матриці, $F(t)$ — неперервна T -періодична вектор-функція, $f_i(t)$, $g_i(t)$, $i = 0, \dots, m$, — деякі невід'ємні неперервні T -періодичні функції, k_i , l_i , $i = 0, \dots, m$, — деякі цілі додатні числа. Умови існування періодичних розв'язків окремих класів таких систем рівнянь встановлено в [1–5]. Продовжуючи ці дослідження, в даній роботі пропонується певний спосіб побудови T -періодичних розв'язків системи рівнянь (1) і вивчаються їх властивості. При цьому відносно системи рівнянь (1) припускаються виконаними такі умови:

- 1) $|e^{At}| \leq Ne^{-\alpha t}$ при $t \in R^+$, де N, α — деякі додатні числа;
 2) матриці $A_i(t), B_i(t), i = 0, \dots, m$, такі, що при всіх $t \in R$ виконується співвідношення

$$\sum_{i=0}^m (|A_i(t)| + |B_i(t)|) \leq \delta,$$

де δ — деяке достатньо мале додатнє число;

- 3) $|F(t)| \leq F^*$ при $t \in R$;
 4) $\Delta = K\delta < 1$, де $K = \max\{\frac{N}{\alpha}, |A|\frac{N}{\alpha} + 1\}$.

Розв'язки системи (1) шукатимемо у вигляді ряду

$$(2) \quad x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} x_j(t),$$

де $x_j(t), j = 0, 1, \dots$, — деякі неперервно диференційовні Т-періодичні вектор-функції.

Підставивши (2) в (1) отримаємо

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} x'_j(t) &= A \sum_{j=0}^{\infty} x_j(t) + \sum_{i=0}^m A_i(t) \sum_{j=0}^{\infty} x_j(k_i t + f_i(t)) + \\ &+ \sum_{i=0}^m B_i(t) \sum_{j=0}^{\infty} x'_j(l_i t + g_i(t)) + F(t). \end{aligned}$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо вектор-функції $x_j(t), j = 0, 1, \dots$, задовольняють послідовності систем рівнянь

$$(3_0) \quad x'_0(t) = Ax_0(t) + F(t),$$

$$(3_j) \quad \begin{aligned} x'_j(t) &= Ax_j(t) + \sum_{i=0}^m A_i(t)x_{j-1}(k_i t + f_i(t)) + \\ &+ \sum_{i=0}^m B_i(t)x'_{j-1}(l_i t + g_i(t)), \quad j = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

то ряд (2) буде формальним розв'язком системи (1).

Безпосередньою підстановкою в (3₀) можна переконатися, що вектор-функція

$$(4) \quad x_0(t) = \int_{-\infty}^t e^{A(t-\tau)} F(\tau) d\tau$$

є неперервно диференційовним розв'язком системи (3₀). Покажемо, що має місце співвідношення

$$(5) \quad x_0(t + T) = x_0(t).$$

Дійсно,

$$\begin{aligned} x_0(t + T) &= \int_{-\infty}^{t+T} e^{A(t+T-\tau)} F(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t e^{A(t-\tau)} F(\tau + T) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^t e^{A(t-\tau)} F(\tau) d\tau = x_0(t). \end{aligned}$$

Враховуючи умови 1) і 3), знаходимо

$$\begin{aligned} |x_0(t)| &= \left| \int_{-\infty}^t e^{A(t-\tau)} F(\tau) d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^t |e^{A(t-\tau)}| |F(\tau)| d\tau \leq \\ &\leq F^* N \int_{-\infty}^t e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau = F^* N e^{-\alpha t} \frac{e^{\alpha t}}{\alpha} = F^* \frac{N}{\alpha} \leq M, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (6_0) \quad |x'_0(t)| &= \left| A \int_{-\infty}^t e^{A(t-\tau)} F(\tau) d\tau + F(t) \right| \leq \\
 &\leq |A| \left| \int_{-\infty}^t e^{A(t-\tau)} F(\tau) d\tau \right| + |F(t)| \leq \\
 &\leq F^* \left(|A| \frac{N}{\alpha} + 1 \right) \leq M,
 \end{aligned}$$

де $M = F^*K$.

Розглядаючи послідовно системи рівнянь (3_j), $j \in \mathbb{N}$, можна показати, що вектор-функції

$$\begin{aligned}
 (4_j) \quad x_j(t) &= \int_{-\infty}^t e^{A(t-\tau)} \left(\sum_{i=0}^m A_i(\tau) x_{j-1}(k_i\tau + f_i(\tau)) + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{i=0}^m B_i(\tau) x'_{j-1}(l_i\tau + g_i(\tau)) \right) d\tau, \quad j = 1, 2, \dots,
 \end{aligned}$$

є їх розв'язками. Покажемо, що виконуються співвідношення

$$(5_j) \quad x_j(t+T) = x_j(t), \quad j = 1, 2, \dots,$$

і мають місце оцінки

$$\begin{aligned}
 (6_j) \quad |x_j(t)| &\leq M\Delta^j, \\
 |x'_j(t)| &\leq M\Delta^j, \quad j = 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

Дійсно, при $j = 1$, враховуючи (5₀), (6₀) і умови 1)–4) маємо

$$\begin{aligned}
 x_1(t+T) &= \int_{-\infty}^{t+T} e^{A(t+T-\tau)} \left(\sum_{i=0}^m A_i(\tau) x_0(k_i\tau + f_i(\tau)) + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{i=0}^m B_i(\tau) x'_0(l_i\tau + g_i(\tau)) \right) d\tau = \\
 &= \int_{-\infty}^t e^{A(t-\tau)} \left(\sum_{i=0}^m A_i(\tau+T) x_0(k_i(\tau+T) + f_i(\tau+T)) + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{i=0}^m B_i(\tau+T) x'_0(l_i(\tau+T) + g_i(\tau+T)) \right) d\tau
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=0}^m B_i(\tau + T) x'_0(l_i(\tau + T) + g_i(\tau + T)) d\tau = \\
& = \int_{-\infty}^t e^{A(t-\tau)} \left(\sum_{i=0}^m A_i(\tau) x_0(k_i\tau + f_i(\tau)) + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{i=0}^m B_i(\tau) x'_0(l_i\tau + g_i(\tau)) \right) d\tau = x_1(t),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|x_1(t)| & = \left| \int_{-\infty}^t e^{A(t-\tau)} \left(\sum_{i=0}^m A_i(\tau) x_0(k_i\tau + f_i(\tau)) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \sum_{i=0}^m B_i(\tau) x'_0(l_i\tau + g_i(\tau)) \right) d\tau \right| \leq \\
& \leq \int_{-\infty}^t |e^{A(t-\tau)}| \left(\sum_{i=0}^m |A_i(\tau)| |x_0(k_i\tau + f_i(\tau))| + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{i=0}^m |B_i(\tau)| |x'_0(l_i\tau + g_i(\tau))| \right) d\tau \leq \\
& \leq MN \int_{-\infty}^t e^{-\alpha(t-\tau)} \left(\sum_{i=0}^m |A_i(\tau)| + \sum_{i=0}^m |B_i(\tau)| \right) d\tau \leq \\
& \leq MN\delta \int_{-\infty}^t e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau = M \frac{N}{\alpha} \delta = M\Delta,
\end{aligned}$$

$$|x'_1(t)| = |Ax_1(t) + \sum_{i=0}^m A_i(t) x_0(k_it + f_i(t)) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=0}^m |B_i(t)x'_0(l_it + g_i(t))| \leq \\
& \leq |A||x_1(t)| + \sum_{i=0}^m |A_i(t)||x_0(k_it + f_i(t))| + \\
& + \sum_{i=0}^m |B_i(t)||x'_0(l_it + g_i(t))| \leq \\
& \leq |A|M\frac{N}{\alpha}\delta + M\delta = M(|A|\frac{N}{\alpha} + 1)\delta \leq M\Delta.
\end{aligned}$$

Міркуючи по індукції, припустимо, що система (3_j), j ≥ 1, має неперервно диференційовний T-періодичний розв'язок x_j(t), який визначається формулою (4_j), що задовольняє умови (6_j), і покажемо, що розв'язок x_{j+1}(t) системи (3_{j+1}):

$$\begin{aligned}
x_{j+1}(t) = \int_{-\infty}^t e^{A(t-\tau)} \left(\sum_{i=0}^m A_i(\tau)x_j(k_i\tau + f_i(\tau)) + \right. \\
\left. + \sum_{i=0}^m B_i(\tau)x'_j(l_i\tau + g_i(\tau)) \right) d\tau
\end{aligned}$$

також є T-періодичною вектор-функцією, що задовольняє умови (6_{j+1}). Дійсно, враховуючи (5_j), отримуємо

$$\begin{aligned}
x_{j+1}(t+T) &= \int_{-\infty}^{t+T} e^{A(t+T-\tau)} \left(\sum_{i=0}^m A_i(\tau)x_j(k_i\tau + f_i(\tau)) + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{i=0}^m B_i(\tau)x'_j(l_i\tau + g_i(\tau)) \right) d\tau = \\
&= \int_{-\infty}^t e^{A(t-\tau)} \left(\sum_{i=0}^m A_i(\tau+T)x_j(k_i(\tau+T) + f_i(\tau+T)) + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{i=0}^m B_i(\tau+T)x'_j(l_i(\tau+T) + g_i(\tau+T)) \right) d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=0}^m B_i(\tau + T) x'_j(l_i(\tau + T) + g_i(\tau + T)) d\tau = \\
& = \int_{-\infty}^t e^{A(t-\tau)} \left(\sum_{i=0}^m A_i(\tau) x_j(k_i\tau + f_i(\tau)) + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{i=0}^m B_i(\tau) x'_j(l_i\tau + g_i(\tau)) \right) d\tau = x_{j+1}(t),
\end{aligned}$$

тобто вектор-функція $x_{j+1}(t)$ є T -періодичною. Тепер покажемо, що вектор-функція $x_{j+1}(t)$ задовольняє умови (6_{j+1}) .

Справді,

$$\begin{aligned}
|x_{j+1}(t)| &= \left| \int_{-\infty}^t e^{A(t-\tau)} \left(\sum_{i=0}^m A_i(\tau) x_j(k_i\tau + f_i(\tau)) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \sum_{i=0}^m B_i(\tau) x'_j(l_i\tau + g_i(\tau)) \right) d\tau \right| \leq \\
& \leq \int_{-\infty}^t |e^{A(t-\tau)}| \left(\sum_{i=0}^m |A_i(\tau)| |x_j(k_i\tau + f_i(\tau))| + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{i=0}^m |B_i(\tau)| |x'_j(l_i\tau + g_i(\tau))| \right) d\tau \leq \\
& \leq M\Delta^j N\delta \int_{-\infty}^t e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau = M\Delta^j \frac{N}{\alpha} \delta = M\Delta^{j+1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|x'_{j+1}(t)| &= \left| Ax_{j+1}(t) + \sum_{i=0}^m A_i(t) x_j(k_it + f_i(t)) + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{i=0}^m B_i(t) x'_j(l_it + g_i(t)) \right| \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq |A||x_{j+1}(t)| + \sum_{i=0}^m |A_i(t)||x_j(k_it + f_i(t))| + \\
&\quad + \sum_{i=0}^m |B_i(t)||x'_j(l_it + g_i(t))| \leq \\
&\leq |A|M\Delta^j \frac{N}{\alpha} \delta + M\Delta^j \delta = \\
&= M\Delta^j (|A| \frac{N}{\alpha} + 1) \delta \leq M\Delta^{j+1}.
\end{aligned}$$

Таким чином, ми показали, що всі члени ряду $x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} x_j(t)$ є неперервно диференційовними T -періодичними вектор-функціями, що задовольняють умови (6_j). Оскільки $\Delta < 1$, то ряд $x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} x_j(t)$ (разом із першою похідною) рівномірно збігається при всіх $t \in R$ до неперервно диференційовної T -періодичної вектор-функції $x(t)$, яка є розв'язком системи (1) і для якої виконуються умови

$$|x(t)| \leq \frac{M}{1-\Delta}, \quad |x'(t)| \leq \frac{M}{1-\Delta}.$$

Таким чином, доведена теорема.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови 1)–4). Тоді система (1) має T -періодичний неперервно диференційовний при $t \in R$ розв'язок $\gamma(t)$.*

Виконуючи в (1) взаємо-однозначну заміну змінних

$$(7) \quad x(t) = y(t) + \gamma(t),$$

де $\gamma(t)$ — неперервно диференційовний T -періодичний розв'язок системи (1), отримуємо систему рівнянь для $y(t)$:

$$(8) \quad y'(t) = Ay(t) + \sum_{i=0}^m A_i(t)y(k_it + f_i(t)) + \sum_{i=0}^m B_i(t)y'(l_it + g_i(t)).$$

Для системи рівнянь (8) має місце наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови 1)-2) теореми 1 і умова:*

$$4') \quad \tilde{\Delta} = \tilde{K}\delta < 1, \text{ де } \tilde{K} = \max\left\{\frac{N}{\alpha-\beta}, |A|\frac{N}{\alpha-\beta} + 1\right\},$$

β – деяка додатна стала така, що $\beta < \alpha$.

Тоді система рівнянь (8) має сім'ю неперервно диференційованих при $t \in R^+$ розв'язків $y(t) = y(t, C)$, де C – довільний сталий вектор розмірності n , у вигляді ряду:

$$(9) \quad y(t) = \sum_{j=0}^{\infty} y_j(t),$$

де $y_j(t)$, $j = 0, 1, \dots$, – деякі неперервно диференційовні при $t \in R^+$ вектор-функції, що задовольняють умову

$$(10) \quad \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} |y(t)| &= 0, \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} |y'(t)| &= 0. \end{aligned}$$

Доведення. Підставивши (9) в (8), отримаємо

$$(11) \quad \begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} y_j'(t) &= A \sum_{j=0}^{\infty} y_j'(t) + \sum_{i=0}^m A_i(t) \sum_{j=0}^{\infty} y_j(k_i t + f_i(t)) + \\ &+ \sum_{i=0}^m B_i(t) \sum_{j=0}^{\infty} y_j'(l_i t + g_i(t)). \end{aligned}$$

Звідси випливає, що якщо вектор-функції $y_j(t)$, $j = 0, 1, \dots$, є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$(12_0) \quad y_0'(t) = Ay_0(t),$$

$$(12_j) \quad \begin{aligned} y_j'(t) &= Ay_j(t) + \sum_{i=0}^m A_i(t) y_{j-1}(k_i t + f_i(t)) + \\ &+ \sum_{i=0}^m B_i(t) y_{j-1}'(l_i t + g_i(t)), \quad j = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

то ряд (9) є формальним розв'язком системи (8).

Очевидно, що система (12₀) має сім'ю неперервно диференційовних при $t \in R^+$ розв'язків $y_0(t) = e^{At}C$, де C — довільний сталий вектор розмірності n . Враховуючи умову 1) маємо:

$$\begin{aligned} |y_0(t)| &= |e^{At}C| \leq |e^{At}||C| \leq Ne^{-\alpha t}|C| \leq \widetilde{M}e^{-\beta t}, \\ |y'_0(t)| &= |Ay_0(t)| \leq |A||e^{At}||C| \leq |A|Ne^{-\alpha t}|C| \leq \widetilde{M}e^{-\beta t}, \end{aligned}$$

де $\widetilde{M} = \max\{N|C|, |A|N|C|\}$, $\beta < \alpha$.

Послідовно можна показати, що розв'язками систем рівнянь (12_{*j*}), $j = 1, 2, \dots$, при $t \in R^+$ є вектор-функції

$$\begin{aligned} y_j(t) &= \int_0^t e^{A(t-\tau)} \left(\sum_{i=0}^m A_i(\tau) y_{j-1}(k_i\tau + f_i(\tau)) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^m B_i(\tau) y'_{j-1}(l_i\tau + g_i(\tau)) \right) d\tau. \end{aligned}$$

Покажемо, що при всіх $t \in R^+$ виконуються оцінки

$$(13_j) \quad \begin{aligned} |y_j(t)| &\leq \widetilde{M}\Delta^j e^{-\beta t}, \\ |y'_j(t)| &\leq \widetilde{M}\Delta^j e^{-\beta t}, \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Дійсно, при $j = 1$ маємо

$$\begin{aligned} |y_1(t)| &= \left| \int_0^t e^{A(t-\tau)} \left(\sum_{i=0}^m A_i(\tau) y_0(k_i\tau + f_i(\tau)) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{i=0}^m B_i(\tau) y'_0(l_i\tau + g_i(\tau)) \right) d\tau \right| \leq \\ &\leq \int_0^t Ne^{-\alpha(t-\tau)} \left(\sum_{i=0}^m |A_i(\tau)| |y_0(k_i\tau + f_i(\tau))| + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^m |B_i(\tau)| |y'_0(l_i\tau + g_i(\tau))| \right) d\tau \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq N \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} \left(\sum_{i=0}^m |A_i(\tau)| \widetilde{M} e^{-\beta(k_i\tau + f_i(\tau))} + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=0}^m |B_i(\tau)| \widetilde{M} e^{-\beta(l_i\tau + g_i(\tau))} \right) d\tau \leq \\
&\leq N \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} \left(\sum_{i=0}^m |A_i(\tau)| \widetilde{M} e^{-\beta k_i\tau} + \sum_{i=0}^m |B_i(\tau)| \widetilde{M} e^{-\beta l_i\tau} \right) d\tau \leq \\
&\leq N \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} \left(\sum_{i=0}^m |A_i(\tau)| \widetilde{M} e^{-\beta\tau} + \sum_{i=0}^m |B_i(\tau)| \widetilde{M} e^{-\beta\tau} \right) d\tau \leq \\
&\leq N \widetilde{M} e^{-\alpha t} \int_0^t e^{(\alpha-\beta)\tau} \left(\sum_{i=0}^m |A_i(\tau)| + \sum_{i=0}^m |B_i(\tau)| \right) d\tau \leq \\
&\leq N \widetilde{M} \delta e^{-\alpha t} \int_0^t e^{(\alpha-\beta)\tau} d\tau \leq N \widetilde{M} \delta e^{-\alpha t} \left(\frac{e^{(\alpha-\beta)t}}{\alpha-\beta} - \frac{1}{\alpha-\beta} \right) \leq \\
&\leq \widetilde{M} \frac{N}{(\alpha-\beta)} \delta (e^{-\beta t} - e^{-\alpha t}) \leq \widetilde{M} \frac{N}{(\alpha-\beta)} \delta e^{-\beta t} \leq \widetilde{M} \widetilde{\Delta} e^{-\beta t}, \\
|y_1'(t)| &\leq |A| |y_1(t)| + \sum_{i=0}^m |A_i(t)| |y_0(k_i t + f_i(t))| + \\
&\quad + \sum_{i=0}^m |B_i(t)| |y_0'(l_i t + g_i(t))| \leq \\
&\leq |A| \widetilde{M} \frac{N}{(\alpha-\beta)} \delta e^{-\beta t} + \sum_{i=0}^m |A_i(t)| \widetilde{M} e^{-\beta(k_i t + f_i(t))} + \\
&\quad + \sum_{i=0}^m |B_i(t)| \widetilde{M} e^{-\beta(l_i t + g_i(t))} \leq \\
&\leq |A| \widetilde{M} \frac{N}{(\alpha-\beta)} \delta e^{-\beta t} + \sum_{i=0}^m |A_i(t)| \widetilde{M} e^{-\beta t} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=0}^m |B_i(t)| \widetilde{M} e^{-\beta t} \leq \\
\leq & \widetilde{M} \left(|A| \frac{N}{(\alpha - \beta)} \delta + \delta \right) e^{-\beta t} = \\
& = \widetilde{M} \left(|A| \frac{N}{(\alpha - \beta)} + 1 \right) \delta e^{-\beta t} \leq \widetilde{M} \widetilde{\Delta} e^{-\beta t},
\end{aligned}$$

тобто мають місце оцінки (13₁). Припустимо, що оцінка (13_j) доведена вже для деякого $j \geq 1$, і покажемо її справедливість при $j + 1$. Дійсно, внаслідок умов 1), 2), 4') і (13_j), отримуємо

$$\begin{aligned}
|y_{j+1}(t)| & \leq \int_0^t N e^{-\alpha(t-\tau)} \left(\sum_{i=0}^m |A_i(\tau)| |y_j(k_i\tau + f_i(\tau))| + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{i=0}^m |B_i(\tau)| |y'_j(l_i\tau + g_i(\tau))| \right) d\tau \leq \\
& \leq N \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} \left(\sum_{i=0}^m |A_i(\tau)| \widetilde{M} \widetilde{\Delta}^j e^{-\beta(k_i\tau + f_i(\tau))} + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{i=0}^m |B_i(\tau)| \widetilde{M} \widetilde{\Delta}^j e^{-\beta(l_i\tau + g_i(\tau))} \right) d\tau \leq \\
& \leq N \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} \left(\sum_{i=0}^m |A_i(\tau)| \widetilde{M} \widetilde{\Delta}^j e^{-\beta\tau} + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{i=0}^m |B_i(\tau)| \widetilde{M} \widetilde{\Delta}^j e^{-\beta\tau} \right) d\tau \leq \\
& \leq N \widetilde{M} \widetilde{\Delta}^j \delta e^{-\alpha t} \int_0^t e^{(\alpha-\beta)\tau} d\tau \leq \\
& \leq \widetilde{M} \widetilde{\Delta}^j \frac{N}{(\alpha - \beta)} \delta \left(e^{-\beta t} - e^{-\alpha t} \right) \leq \widetilde{M} \widetilde{\Delta}^{j+1} e^{-\beta t},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|y'_{j+1}(t)| &\leq |A|y_{j+1}(t) + \sum_{i=0}^m |A_i(t)||y_j(k_i t + f_i(t))| + \\
&\quad + \sum_{i=0}^m |B_i(t)||y'_j(l_i t + g_i(t))| \leq \\
&\leq |A|\widetilde{M}\widetilde{\Delta}^j \frac{N}{(\alpha - \beta)} \delta e^{-\beta t} + \sum_{i=0}^m |A_i(t)|\widetilde{M}\widetilde{\Delta}^j e^{-\beta(k_i t + f_i(t))} + \\
&\quad + \sum_{i=0}^m |B_i(t)|\widetilde{M}\widetilde{\Delta}^j e^{-\beta(l_i t + g_i(t))} \leq \\
&\leq |A|\widetilde{M}\widetilde{\Delta}^j \frac{N}{(\alpha - \beta)} \delta e^{-\beta t} + \sum_{i=0}^m |A_i(t)|\widetilde{M}\widetilde{\Delta}^j e^{-\beta t} + \\
&\quad + \sum_{i=0}^m |B_i(t)|\widetilde{M}\widetilde{\Delta}^j e^{-\beta t} \leq \\
&\leq \widetilde{M}\widetilde{\Delta}^j \left(|A| \frac{N}{(\alpha - \beta)} + 1 \right) \delta e^{-\beta t} \leq \widetilde{M}\widetilde{\Delta}^{j+1} e^{-\beta t},
\end{aligned}$$

Таким чином, справедливність оцінок (13_j), $j = 1, 2, \dots$, повністю доведена. Звідси безпосередньо випливає, що ряд

$$y(t) = \sum_{j=0}^{\infty} y_j(t)$$

і його перша похідна збігаються рівномірно при $t \in \mathbb{R}^+$ до неперервно диференційовної вектор-функції $y(t)$, яка є розв'язком системи (8), для якого виконуються оцінки

$$y(t) \leq \frac{\widetilde{M}}{1 - \widetilde{\Delta}} e^{-\beta t}, \quad y'(t) \leq \frac{\widetilde{M}}{1 - \widetilde{\Delta}} e^{-\beta t},$$

і отже, так побудовані розв'язки відповідають умові (10). Тим самим теорема 2 повністю доведена.

Враховуючи (7) і доведені вище теореми 1, 2 приходимо до такої теореми.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови 1)–3) теореми 1 і умова 4') теореми 2. Тоді система рівнянь (1) має сім'ю неперервно диференційованих розв'язків $x(t) = x(t, C)$, яка визначається формулою*

$$x(t) = y(t) + \gamma(t),$$

де $y(t)$ визначається рядом (9) і $\gamma(t)$ — T -періодичний розв'язок системи рівнянь (1).

Зауваження. *При деяких додаткових припущеннях теорема 1 має місце і у випадку, коли відхилення аргументу $f_i(t)$, $g_i(t)$, $i = 1, \dots, m$, залежать від невідомої функції.*

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Дж. Хейл. Теория функционально-дифференциальных уравнений: Пер. с англ. — М.: Мир, 1984. — 421 с.
- [2] Курбатов В.Г. Линейные дифференциально-разностные уравнения. — Воронеж. Изд-во Воронежского университета, 1990. — 167 с.
- [3] Пелюх Г.П., Блащак Н.І. Про існування і єдиність періодичних розв'язків систем нелінійних диференціально-функціональних рівнянь з лінійним відхиленням аргумента. //Доп. НАН України. — 1997. — №8. — С. 10-13.
- [4] Самойленко А.М., Пелюх Г.П. О периодических решениях систем нелинейных дифференциально-функциональных уравнений нейтрального типа. //Доп. НАН України. — 1994. — №3. — С. 19-21.
- [5] Пелюх Г.П., Вельгач А.В. Про структуру множини неперервно диференційованих розв'язків однієї граничної задачі для систем диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу. //Нелінійні коливання. — 2007. — №2. — С. 277-289.

УДК 517.5

И. Ю. Власенко

Институт математики НАН Украины, Киев

E-mail: vlasenko@imath.kiev.ua

Особенности динамики бесконечнократных внутренних по Трохимчуку эпиморфизмов

Trokhimchuk inner mappings are continuous open isolated endomorphisms. The paper consider the Trokhimchuk inner mappings with infinite number of preimages from a dynamical systems view. Examples given that shows an essential difference from the dynamics of inner mappings with finite number of preimages.

A subclass of Trokhimchuk inner mappings is defined. It is shown that its dynamical properties are similar to ones of inner mappings with finite number of preimages and results on orbit structure are obtained.

Ключевые слова: *inner epimorphism, dynamics*

1. ВВЕДЕНИЕ

С точки зрения динамических систем, эпиморфизмы, внутренние по Трохимчуку, выделяются из прочих эпиморфизмов наличием инвариантных множеств рекуррентных и неблуждающих точек, возможностью рассматривать частные траектории точек вспять во времени.

В работе рассмотрены различные патологии динамики бесконечнократных внутренних по Трохимчуку эпиморфизмов, и указан достаточно широкий подкласс внутренних по Трохимчуку эпиморфизмов, равномерных на прообразах, для которых указанные патологии не возникают, и динамическое поведение сходно с конечнократными эпиморфизмами, внутренними по Трохимчуку.

Естественно, что динамика бесконечнократных внутренних отображений имеет свои особенности, которые не возникают для конечнократных отображений. В то время как классы конечнократных внутренних отображений по Стоилову и по Трохимчуку совпадают, это не так для бесконечнократных отображений.

Как известно, отображения замкнутых двумерных поверхностей, внутренние по Стоилову, являются топологическим аналогом аналитических функций. Однако вне этого класса пространств отображения, внутренние по Стоилову, могут вести себя достаточно плохо. Поэтому при рассмотрении на абстрактных пространствах вместо класса внутренних отображений по Стоилову рассматривают его подкласс отображений, внутренних по Трохимчуку.

В данной работе внутренние отображения рассмотрены с точки зрения динамических систем. Построены примеры, которые показывают, что бесконечнократные внутренние по Трохимчуку (и тем более по Стоилову) эпиморфизмы в своих динамических свойствах существенно отличаются от конечнократных внутренних эпиморфизмов. Показано, что условие эпиморфности и равномерной непрерывности на прообразах выделяет из класса внутренних по Трохимчуку эпиморфизмов подкласс внутренних эпиморфизмов, свойства которых с точки зрения динамических систем подобны свойствам конечнократных внутренних эпиморфизмов.

Будем полагать, что рассматриваемый бесконечнократный внутренний эпиморфизм $f: M \rightarrow M$ задан на локально связном метризуемом пространстве M (в частности, полное метрическое пространство является локально связным). Это условие техническое. Оно удобно для упрощения дальнейших рассуждений, поскольку у отображения на таком пространстве прообраз окрестности естественно и единственным образом распадается на компоненты связности.

Эти же рассуждения можно пытаться перенести и на случай, когда пространство не является локально связным, воспользовавшись тем, что отображение изолированно, поэтому найдутся окрестности, которые отделяют точки прообраза друг от друга. Однако это усложняет рассуждения и делает их чересчур громоздкими. Поэтому в рассуждениях ограничимся только случаем локально связного метризуемого пространства.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

2.1. Множества траекторий. Пусть M — метризуемое топологическое пространство и $f : M \rightarrow M$ — непрерывный эпиморфизм.

Определение 1. *Отображение f называется открытым, если образ любого открытого множества открыт.*

Определение 2. *Отображение f называется нульмерным, если прообраз любого нульмерного множества нульмерен.*

Определение 3. *Отображение f называется внутренним (interior) по Стоилову, если оно нульмерно и открыто.*

Пусть $O_f^+(x)$ — положительная полутраектория точки x , т. е. множество $\{f^n(x) \mid n \geq 0\}$. Обозначим через $O_f^-(x)$ отрицательную полутраекторию точки x , т. е. множество $\{f^n(x) \mid n < 0\}$. Определение $O_f^-(x)$ корректно, так как мы предполагаем, что f — эпиморфизм.

Отметим, что по определению $O_f^+(x)$ состоит из точек, в то время как в общем случае уже $\{f^{-1}(x)\}$ представляет собой нечто большее чем замкнутое множество. Однако, если f — нульмерное отображение, то в таком случае естественно воспринимать отрицательную полутраекторию точки x как набор различных точек.

Определение 4. *Полной траекторией $O_f(x)$ точки x назовем множество $\cup_{y \in O_f^+(x)} O_f^-(y)$.*

Определение 5. *Частной траекторией $o_f(x)$ точки x назовем произвольное множество вида*

$$\{x_i | f(x_i) = x_{i+1}, i \in \mathbb{Z}, x_0 = x\}.$$

Если $i \leq 0$, то будем говорить о частной отрицательной траектории. Заметим, что частная положительная траектория всегда совпадает с обычной положительной траекторией.

2.1.1. Изолированные отображения.

Определение 6. *Отображение f называется изолированным, если прообраз точки состоит из изолированных точек.*

Замечание 1. *Изолированное отображение нульмерно.*

Определение 7. *Отображение f называется внутренним (interior) по Трехимчуку, если оно открыто и изолированно.*

Заметим, что, вообще говоря, произвольное внутреннее по Стоилову отображение может и не быть изолированным.

Для примера рассмотрим множество A , состоящее из стандартного Канторова множества на отрезке $[0, 1]$ и изолированной точки $\{2\}$. Внутренний эпиморфизм A в себя, заданный формулой $f(x) = \min\{3x, 2\}$, очевидно, не является изолированным в точке $\{2\}$.

Лемма 1. *Если M — компакт, а f является изолированным в x , то f^{-1} имеет в x конечное число прообразов.*

Доказательство. Предположим от противного, что f^{-1} имеет в x бесконечное число прообразов. Поскольку M — компакт, $f^{-n}(x)$ содержит сходящуюся к некоторой точке p подпоследовательность p_i . Поскольку $f^n(p_i) = x$, то по непрерывности $f^n(p) = x$. Но произвольная окрестность точки p содержит точки подпоследовательности p_i . Получили противоречие. \square

2.2. Рекуррентные точки. Определим для каждой точки x ω -предельное множество $\omega(x)$ и α -предельное множество $\alpha(x)$:

$$\omega(x) = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(x)} \quad \alpha(x) = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(x)}$$

Заметим, что по определению эти множества замкнуты.

Определение 8. Назовем точку x ω -(α -) рекуррентной, если $x \in \omega(x)$ (соответственно, $x \in \alpha(x)$).

Обозначим через $\text{Rec}_+(f)$ множество ω -рекуррентных точек, через $\text{Rec}_-(f)$ множество α -рекуррентных точек, и через

$$\text{Rec}(f) = \text{Rec}_+(f) \cup \text{Rec}_-(f)$$

— множество всех рекуррентных¹ точек.

Обозначим через $\text{Lim}(f) = \text{Lim}_+(f) \cup \text{Lim}_-(f)$ предельное множество f , объединение ω -предельных множеств и α -предельных множеств всех точек. Легко видеть, что

$$\text{Rec}(f) \subset \text{Lim}(f).$$

Лемма 2. Пусть $f : M \rightarrow M$ — внутренний эпиморфизм. Тогда если x — ω -(α -)рекуррентная точка, то ее положительная полутраектория $O_f^+(x)$ состоит из ω -(α -)рекуррентных точек.

Если $f : M \rightarrow M$ — внутренний эпиморфизм, то множества ω -(α -)рекуррентных и рекуррентных точек f — инвариантны ([7]).

2.2.1. Неблуждающие точки. Далее и всюду под окрестностью точки мы будем понимать открытое множество, содержащее эту точку.

¹Такое определение рекуррентности называется еще рекуррентностью по Готтшалку и Хедлунду,

Определение 9. Точка $x \in M$ называется ω -блуждающей точкой f , если найдется такая ее окрестность U , что $f^m(U) \cap U = \emptyset$ для всех $m > 0$.

Определение 10. Точка $x \in M$ называется ω -неблуждающей точкой f , если для любой ее окрестности U найдется такое $m > 0$, что $f^m(U) \cap U \neq \emptyset$.

Определение 11. Точка $x \in M$ называется α -неблуждающей точкой f , если для любой ее окрестности U найдется число $l > 0$, такое, что $f^{-l}(U) \cap U \neq \emptyset$.

Определение 12. Точка $x \in M$ называется α -блуждающей точкой f , если найдется такая ее окрестность U , что $f^{-l}(U) \cap U = \emptyset$ для всех $l > 0$.

Заметим, что эти определения являются взаимно дополнительными. Другими словами, если точка не является ω - (α -) блуждающей, то она является ω - (α -)неблуждающей и наоборот.

Определение 13. Точка $x \in M$ называется блуждающей точкой f , если она одновременно ω - и α - блуждающая.

Определение 14. В противном случае точка $x \in M$ называется неблуждающей точкой f .

Множество блуждающих точек f обозначим через $W(f)$. Это множество открыто в M , поскольку каждая блуждающая точка входит в блуждающее множество вместе со своей окрестностью. Точки, не являющиеся блуждающими в смысле определения 13, являются неблуждающими. Множество неблуждающих точек f обозначим $\Omega(f)$. Оно замкнуто в M как дополнение к $W(f)$.

Поскольку периодическая точка является частным случаем неблуждающей точки, то множество $\text{Per}(f)$ периодических точек содержится в $\Omega(f)$.

2.3. Локальные эпиморфизмы. Пусть X — локально связное топологическое пространство.

Определение 15. Мы назовем отображение f **полным локальным эпиморфизмом в точке x** , если найдется такая окрестность $U(x)$ точки x , что на каждой из компонент связности прообраза окрестности $U(x)$ отображение f является эпиморфизмом.

$U(x)$ будем называть **окрестностью полной локальной эпиморфности f в точке x** .

Отметим несколько тривиальных следствий этого определения.

Следствие 1. Если f является полным локальным эпиморфизмом в точке x , то f является полным локальным эпиморфизмом и во всей окрестности полной локальной эпиморфности f в точке x .

Следствие 2. Если отображение f является полным локальным эпиморфизмом в точке x с окрестностью полной локальной эпиморфности $U(x)$, то для каждой подокрестности $U'(x) \subset U(x)$ точки x на каждой из компонент связности прообраза окрестности $U'(x)$ отображение f тоже будет эпиморфизмом.

Определение 16. Мы назовем отображение f **полным локальным эпиморфизмом**, если оно является полным локальным эпиморфизмом в каждой точке.

Следующий пример показывает, что внутреннее отображение может и не быть полным локальным эпиморфизмом.

Пример 18. Пример вполне дискретного, удовлетворяющего аксиомам $P1$ и $P2$ внутреннего эпиморфизма, который не является полным локальным эпиморфизмом.

Построение. Пусть множество A задано на плоскости как объединение набора отрезков

$$\{(x, y) | x \in (-1/n, 1/n), y = n\}, n > 0,$$

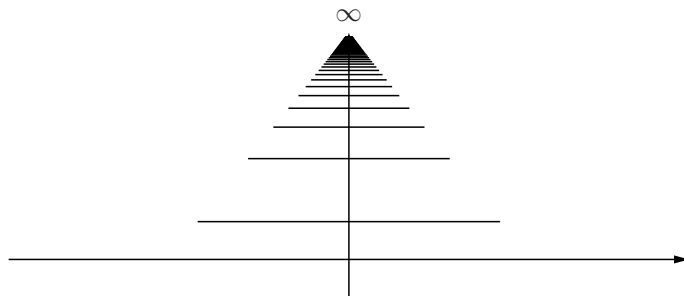


Рис. 1. К примеру 18

и оси $y = 0$ (Рис. 1). Возьмем счетное число множеств A , например, разместив их в \mathbb{R}^3 , используя целые положительные значения координаты z ($z \in \mathbb{Z}^+$). Зададим эпиморфизм f как проекцию A на ось $y = 0$ при $z = 0$ и как сдвиг $z \mapsto z - 1$ при $z > 0$. Легко видеть, что f вполне дискретно, но в точке $(0, 0, 0)$ не является полным локальным эпиморфизмом. \square

Лемма 3. *Конечнократный внутренний эпиморфизм f является полным локальным эпиморфизмом.*

Доказательство. Возьмем точку x и окрестность $U(x)$. Рассмотрим $f^{-1}(U(x))$. Поскольку f — непрерывное отображение, $f^{-1}(U(x))$ — открыто. При этом $f^{-1}(U(x))$ имеет конечное число компонент связности, так как f — конечнократное отображение. Образ каждой компонент связности является открытым множеством, так как f — открытое отображение. Их пересечение открыто как конечное пересечение открытых множеств, и дает искомую окрестность полной локальной эпиморфности f в точке x . Лемма доказана. \square

В частности, внутренние отображения компактных двумерных многообразий вполне дискретны и являются полными локальными эпиморфизмами.

2.3.1. *Критерий полной локальной эпиморфности.* Приведем один критерий, когда отображение будет полным локальным эпиморфизмом, доказательство которого непосредственно следует из определения.

Если существует представление пространства M в качестве локально конечного клеточного комплекса, такого, что f является его клеточным эпиморфизмом (клетка отображается на объединение клеток той же или меньшей размерности), то f является полным локальным эпиморфизмом.

2.4. Аксиомы отделимости относительно прообраза.

Еще одной неприятностью, которая возникает в случае бесконечнократных отображений, даже внутренних по Трохимчуку, является обеднение топологии, индуцированной на прообразе при помощи f^{-1} , по сравнению с уже имеющейся.

Это приводит к тому, что в некоторых случаях отделимые замкнутые множества невозможно отделить, используя только прообразы открытых окрестностей.

Определение 17. Скажем, что открытый непрерывный эпиморфизм f удовлетворяет аксиоме $P0$ отделимости прообразами, если $\forall V \subset M$, где V — замкнутое множество, $\forall U (f^{-1}(V))$ — открытой окрестности множества $f^{-1}(V)$ $\exists U'(V)$ — открытая окрестность множества V такая, что $f^{-1}(U'(V)) \subset U(V)$.

Пример 19. Открытый конечнократный эпиморфизм f удовлетворяет аксиоме $P0$ отделимости прообразами.

Условие $P0$ отделимости прообразами, которое соблюдаются для конечнократных внутренних отображений, нарушатся для бесконечнократных внутренних по Трохимчуку отображений. Для примера достаточно рассмотреть проекцию прямой на окружность $x \mapsto x \pmod{1}$ и образ семейства окрестностей $\{(n - \frac{1}{|n|}, n + \frac{1}{|n|}) \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Рассмотрим более слабые частные случаи аксиомы P0. Выпишем их как набор аксиом отделимости относительно прообразов.

Скажем, что открытое непрерывное отображение f удовлетворяет одной из аксиом P1 – P2 отделимости прообразами, если

P1. $\forall x \in M \exists U(x)$ — открытая окрестность точки x такая, что $\forall y_i, y_j \in f^{-1}(x), i \neq j U_i \cap U_j = \emptyset$, где U_i — связная компонента множества $f^{-1}(U(x))$, содержащая y_i .

P2. $\forall x \in M \forall n > 0 \exists U_n(x)$ — открытая окрестность точки x такая, что

$$(f^{-n}(U_n(x)) \setminus C_n(x)) \cap U_n(x) = \emptyset,$$

где $C_n(x)$ — либо пустое множество, если $x \notin f^{-n}(x)$, либо связная компонента множества $f^{-n}(U_n(x))$, содержащая точку x , если $x \in f^{-n}(x)$.

Легко видеть, что аксиомы P1 и P2 отделимости прообразами являются частными случаями аксиомы P0. Тем не менее, внутренние по Трехимчуку отображения могут и не удовлетворять аксиомам P1 и P2. Рассмотрим соответствующие аксиомы отделимости прообразами детальнее.

2.4.1. Вполне дискретные отображения (P1).

Определение 18. *Отображение f назовем вполне дискретным в точке x , если найдется окрестность $U(x)$ точки x такая, что множество $f^{-1}(U(x))$ можно представить в виде объединения окрестностей U_i прообразов точки x таких, что каждая U_i содержит в точности по одному прообразу точки x и эти окрестности попарно не пересекаются между собой.*

Определение 19. *Будем говорить, что $U(x)$ — окрестность точки x , отделяющая прообразы, если $U(x)$ удовлетворяет условиям определения 18.*

Определение 20. *Отображение f назовем вполне дискретным, если оно вполне дискретно в каждой точке.*

Пример 20. *Всякий конечнократный внутренний эпиморфизм является вполне дискретным.*

Пример 21. *Внутренний изолированный, но не вполне дискретный эпиморфизм.*

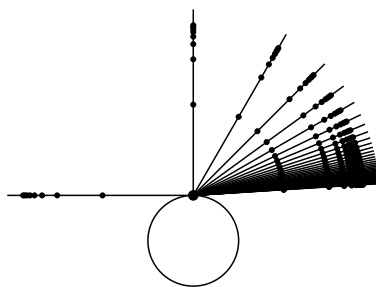


Рис. 2. Пространство X . К примеру 21.

Построение. Построим пространство X , изображенное на рис. 2, в виде дерева из отрезков $[0, 1]$, склеивая их в граничных точках. В качестве строительного элемента возьмем круг, образованный склейкой граничных точек отрезка $[0, 1]$, и лучи $[0, \infty)$, полученные склейкой бесконечного числа отрезков. Возьмем счетное число лучей $[0, \infty)$ и занумеруем их числами $n \in \mathbb{N}$. отождествим точку 0 каждого луча с точкой $0 \equiv 1$ круга.

Заметим, что фактор-топология в точке $0 \equiv 1$ круга отличается от той, которая была бы индуцирована, например, вложением картинки из рис. 2 в плоскость: открытые окрестности в этой точке, порождающие в ней базу топологии, образованы объединением открытых полуинтервалов на каждом отрезке произвольной, не связанной между собой длины. Такую топологию и метрику легко при желании индуцировать из вложения пространства X в некоторое бесконечномерное пространство.

Зададим отображение f . На каждом луче положим

$$f : x \in [1, \infty) \mapsto x - 1 \in [0, \infty).$$

Оставшуюся часть $[0, 1]$ луча с номером n отобразим на круг. В локальных координатах отображение f пусть выглядит как

$$f = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}(n \operatorname{tg}(\frac{\pi * x}{2})), & x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Круг отобразим на себя тождественно.

После построения мы получим дерево X и отображение $f : X \rightarrow X$, по построению заданное всюду на X . Полученное отображение f в точке $0 \equiv 1$ круга изолировано, но не вполне дискретно. \square

Для вполне дискретных внутренних эпиморфизмов локально связного топологического пространства прообраз достаточно малой окрестности точки распадается на компоненты связности, каждая из которых содержит в точности один прообраз этой точки.

2.4.2. Супернеблуждающие точки (P2).

Напомним, что X — локально связное топологическое пространство.

Определение 21. Назовем точку x *супернеблуждающей степени n* , если для любой окрестности $U(x)$ точки x найдется связная компонента U' множества $f^{-n}(U(x))$, $x \notin U'$, такая, что $U(x) \cap U'(x) \neq \emptyset$.

Определение 22. Назовем точку x *конечно отделимой*, если она не является супернеблуждающей никакой степени.

Определение 23. Назовем отображение f *конечно отделимым*, если оно конечно отделимо во всех точках.

Пример 22. Полный локальный внутренний эпиморфизм с супернеблуждающими точками.

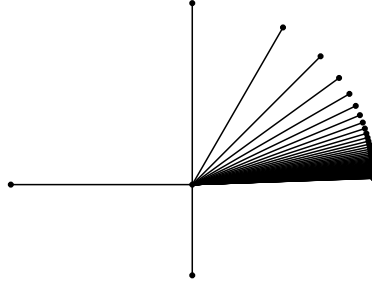


Рис. 3. Простое звено. К примеру 22.

Построение. Построим пространство X в виде дерева из отрезков $[0, 1]$, склеивая их в граничных точках. В качестве строительного элемента возьмем звено, изображенное на рис. 3. Это звено состоит из “ствола” внизу и счетного множества “ветвей” вверху. Локальные координаты на каждом отрезке направлены снизу вверх. Ветви занумерованы числами $n \in \mathbb{N}$, у каждой ветви точка 0 отождествлена с точкой 1 “ствола”. На каждой ветви с номером n зададим отображение f :

$$f = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \arctg(n \operatorname{tg}(\frac{\pi * x}{2})), & x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Склеим счетное число таких звеньев в пространство X . Для этого, во-первых, нарастим ветви. С этой целью каждую ветвь рассмотрим как “ствол” и опять приклеим к ней счетное количество “ветвей”, получив на каждой ветви звено второго уровня. Во-вторых, нарастим ствол, взяв еще одно звено и отождествив ствол с первой ветвью второго звена. Повторяем этот процесс бесконечно.

После построения получаем дерево X и отображение

$$f : X \rightarrow X,$$

которое будет определено уже всюду на X .

В полученном отображении все точки склейки супернеблуждающие. \square

Как видно на примере 22, супернеблуждающие точки могут существовать даже у полных локальных внутренних эпиморфизмов. При этом f должен быть бесконечнократным и по лемме 1 X не может быть компактом.

2.4.3. Отображения, обратнo равномерно непрерывные на прообразах. При рассмотрении отображений, которые удовлетворяют аксиомам P1 и P2, естественно возникает вопрос, насколько широк этот класс отображений.

Дадим достаточный критерий, когда отображение удовлетворяет этим аксиомам. Заметим, что это условие не что иное, как равномерная непрерывность. Однако, так как f^{-1} — многозначное отображение, условие равномерной непрерывности в его традиционном виде для однозначных отображений использовать нельзя, поэтому здесь оно записано в несколько непривычном для восприятия виде, который далее в тексте будет называться обратной равномерной непрерывностью на прообразах.

Определение 24. Скажем, что непрерывное отображение $f : M \rightarrow M$ обратнo равномерно непрерывно на прообразах точки x , если $\forall \varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что

$$\forall y : \rho(y, f^{-1}(x)) > \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(y)) > \varepsilon.$$

Определение 25. Скажем, что отображение $f : M \rightarrow M$ обратнo равномерно непрерывно на прообразах, если оно равномерно непрерывно на прообразах во всех точках.

Лемма 4. Если обратнo равномерно непрерывный на прообразах внутренний эпиморфизм $f : M \rightarrow M$, вполне дискретен и конечно отделим.

Доказательство леммы следует непосредственно из соответствующих определений.

2.5. Прообразы неблуждающих точек.

Пусть $f : M \rightarrow M$ — непрерывный на прообразах полный локальный внутренний эпиморфизм, удовлетворяющий аксиомам P1 и P2.

Теорема 1. *Если x — неблуждающая точка (соответственно, α -, ω -неблуждающая), то либо прообраз x содержит неблуждающую точку (α -, ω -неблуждающую точку), либо множество прообразов точки x и неблуждающее множество (α -, ω -неблуждающее множество) не являются ε -отделимыми друг от друга¹.*

Доказательство. Доказательство приведем для того случая, когда точка является α -неблуждающей. Напомним, что M — локально связное пространство (например, полное метрическое). В этом случае прообраз малой окрестности однозначно распадается на компоненты связности.

Если множество прообразов точки x является предельным для α -неблуждающего множества, утверждение леммы выполнено. Пусть множество прообразов точки x отделено от α -неблуждающего множества на расстояние δ_1 . Поскольку f равномерно на прообразах, найдется δ_2 такое, что прообраз шаровой окрестности $B_{\delta_2}(x)$ множество $f^{-1}(B_{\delta_2}(x))$ находится в δ_1 -окрестности $f^{-1}(x)$, и, следовательно, состоит из α -блуждающих точек. Сузив при необходимости $U'(x) = B_{\delta_2}(x)$, можно полагать, что это вполне отделимая окрестность x , в которой f является полным локальным эпиморфизмом.

Пусть прообразы точки x занумерованы индексами $i \in I$. Связную компоненту $f^{-1}(B_{\delta_2}(x))$, содержащую точку $x_{-1,i} \in f^{-1}(x)$, обозначим через $U(x_{-1,i})$.

$$\forall k < 0 \quad f^k(U(x_{-1,i})) \cap U(x_{-1,i}) = \emptyset.$$

¹К примеру, на прямой множества $\{n \in \mathbb{N}\}$ и $\{n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ не являются ε -отделимыми

По условию x — α -неблуждающая точка. Поэтому $\exists m$ и $\exists U''$ — связная компонента множества $f^{-m}(U'(x))$ такая, что $U'' \cap U' \neq \emptyset$.

Поскольку f конечно отделим, можно предполагать, что $m > 1$. Далее, так как f — полный локальный эпиморфизм, то для каждой из окрестностей $U(x_{-1,i})$ найдется компонента связности множества $f^{-1}(U'')$, имеющая с ней непустое пересечение. Обозначим ее через U''_i . Имеем, что $\forall i U(x_{-1,i}) \cap U''_i \neq \emptyset$.

Поскольку U'' является компонентой связности множества $f^{-m}(U'(x))$, а $m > 1$, то найдется k такое, что U'' является компонентой связности $f^{-m+1}(U(x_{-1,k}))$. Но тогда по построению, все U''_i , в частности, U''_k , являются компонентами связности $f^{-m}(U(x_{-1,k}))$.

Получили противоречие, так как по предположению окрестность $U(x_{-1,k})$ блуждающая.

Заметим, что если x — не α -неблуждающая точка, а ω -неблуждающая, то доказательство в этом случае упрощается, так как U'' уже является образом каждой $U(x_{-1,i})$. За исключением этого момента, доказательство переносится на случай ω -неблуждающей точки дословно.

Если же x — неблуждающая точка, то она является либо α -неблуждающей точкой, либо ω -неблуждающей. Как следствие, доказательство в этом случае сводится к уже рассмотренным случаям. Теорема доказана. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Akin E., Hurley M., Kennedy J.* Dynamics of topologically generic homeomorphisms. // *Memoirs of the A.M.S.* — 2003. — **164**, No. 783.
- [2] *Bonatti C.* The global dynamics of generic diffeomorphisms. // *Lectures. SMR.1573-14.* Trieste. — 2003.
- [3] *Conley C.* Isolated invariant sets and the Morse index // *CBMS Reg. Ser. Conf. Ser. in Math.* AMS, Providence. — 1978. — **38**.
- [4] *Hurley, M.* Chain recurrence, semiflows, and gradients // *J. Dynam. Differential Equations.* — 1995. — **7**, No. 3. — p. 437–456.
- [5] *Стоилов С.* О топологических принципах теории аналитических функций. // — М.: Мир, 1964.

- [6] Трохимчук Ю. Ю. Дифференцирование, внутренние отображения и критерии аналитичности // Праці Інституту математики НАН України. Київ. – 2008. – Т. 70.
- [7] Власенко И. Ю. // Нелінійні коливання. (принято в печать).

Я. І. Грушка

Інститут математики НАН України, м. Київ
E-mail: grushka@imath.kiev.ua

Узагальнення теореми про рівномірну збіжність півгрупи до одиничного оператора

Let $\{T(t) : t \geq 0\}$ be a C_0 -semigroup of bounded linear operators in a complex Banach Space $(\mathfrak{X}, \|\cdot\|)$ and A be its generator. The well known **uniform convergence theorem** states that the generator A is bounded for the semigroups $\{T(t)\}$, satisfying $\overline{\lim}_{t \rightarrow +0} \|T(t) - \mathbb{I}\| < 1$, where \mathbb{I} is the identity operator in \mathfrak{X} .

In this article we prove that for a wide enough class of semigroups $\{T(t)\}$ in \mathfrak{X} the following generalization of this theorem is true.

If there exists a non-negative and measurable Lebesgue on $[0, \infty)$ function $\beta(t)$ satisfying the conditions:

$$\frac{\beta(t)}{t} \rightarrow 0, t \rightarrow +0; \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow +0} \|T(t) - T(\beta(t))\| < 1$$

then the generator A is bounded.

Ключові слова: *півгрупа операторів, одиничний оператор, рівномірна збіжність*

1. Нехай $\{T(t) : t \geq 0\}$ — півгрупа класу C_0 в банаховому просторі $(\mathfrak{X}, \|\cdot\|)$ з генератором A . Добре відома теорема про рівномірну збіжність півгрупи до одиничного оператора стверджує, що якщо для півгрупи $\{T(t)\}$ виконується умова

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +0} \|T(t) - \mathbb{I}\| < 1,$$

де \mathbb{I} — одиничний (тотожний) оператор в просторі \mathfrak{X} , то генератор A є лінійним обмеженим оператором в просторі \mathfrak{X} [1].

Певне узагальнення теореми про рівномірну збіжність півгрупи до одиничного оператора було отримано в роботі [2]. У цій роботі було доведено таке твердження.

Якщо для півгрупи $\{T(t) : t \geq 0\}$ класу C_0 з нормальним генератором A в гільбертовому просторі $(\mathfrak{H}, \|\cdot\|)$ існує функція $\beta : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$, що задовольняє умову

$$(1) \quad \beta(t) \geq 0, t > 0; \quad \frac{\beta(t)}{t} \rightarrow 0, t \rightarrow +0,$$

і для якої

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +0} \|T(t) - T(\beta(t))\| < 1,$$

то генератор A — обмежений.

Мета цієї роботи — показати, що наведене вище твердження справедливе для більш широкого класу півгруп, а саме, для довільних півгруп $T(t) = e^{tA}$, $t \geq 0$, класу C_0 в банаховому просторі \mathfrak{X} , у яких множина цілих векторів експоненціального типу генератора A є щільною в \mathfrak{X} .

2. Нехай B — довільний (взагалі кажучи, необмежений) лінійний оператор в банаховому просторі \mathfrak{X} . Через $\mathcal{D}(B)$ будемо позначати область визначення оператора B .

Для довільної півгрупи $\{T(t) : t \geq 0\}$ класу C_0 з генератором A в просторі \mathfrak{X} покладемо:

$$M(t) := M_T(t) := \sup_{0 \leq s \leq t} \|T(s)\|, \quad t \geq 0.$$

Очевидно, що функція $M(t)$ не спадає на $[0, \infty)$. Якщо $f \in \mathcal{D}(A)$, то при $t \geq 0$ маємо:

$$(2) \quad \|T(t)f - f\| = \left\| \int_0^t T(\xi) A f d\xi \right\| \leq M(t) \|A f\| t.$$

Нехай функція $\beta : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ — обмежена, вимірна за Лебегом на $[0, \infty)$ і задовольняє умову (1), а також істотно відмінна

від нуля в околі нуля, тобто

$$(3) \quad \forall h > 0 \quad \mathbf{m}(\{\tau \in (0, h) \mid \beta(\tau) > 0\}) > 0,$$

де \mathbf{m} — міра Лебега на \mathbb{R} . Покладемо:

$$(4) \quad \tilde{\beta}(t) := \frac{1}{t} \int_0^t \beta(\xi) d\xi, \quad t \in (0, \infty); \quad \tilde{\beta}(0) := 0.$$

Очевидно, що функція $\tilde{\beta}$ має такі властивості:

- (1) $\tilde{\beta}$ неперервна на $[0, \infty)$.
- (2) $\frac{\tilde{\beta}(t)}{t} \rightarrow 0, t \rightarrow +0$.
- (3) $\tilde{\beta}(t) > 0, t > 0$.

3. Для доведення основного результату цієї роботи нам знадобиться така лема.

Лема 1. *Нехай:*

1. $T(t) = e^{tA}, t \geq 0$, де $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$ (тут $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$ — простір лінійних неперервних операторів над простором \mathfrak{X}).

2. Функція $\beta : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ — обмежена, вимірна за Лебегом на $[0, \infty)$ і задовольняє умови (1) та (3).

Тоді якщо для деяких чисел $\delta > 0$ і $q \in (0, 1)$ виконується умова $\|T(t) - T(\beta(t))\| \leq q, t \in (0, \delta)$, то

$$\|A\| \leq \frac{(1-q) - \sqrt{(1-q)^2 - 4M(\delta)(M(\delta)+1)\frac{\tilde{\beta}(t)}{t}}}{2M(\delta)\tilde{\beta}(t)},$$

де $t \in (0, \delta_1)$ і δ_1 — довільне дійсне число, яке відповідає вимогам $\delta_1 \in (0, \delta)$ і

$$4M(\delta)(M(\delta)+1)\frac{\tilde{\beta}(t)}{t} < (1-q)^2$$

при $t \in (0, \delta_1)$, а $\tilde{\beta}$ — функція, визначена в (4). (Оскільки $\frac{\tilde{\beta}(t)}{t} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +0$, то таке число δ_1 завжди існує.)

Доведення. Оскільки генератор A півгрупи $\{T(t)\}$ — обмежений, то, використовуючи властивості півгруп і нерівність (2) для довільного вектора $f \in \mathfrak{X}$ і функціоналу $g \in \mathfrak{X}^*$ при $t \in (0, \delta)$, отримуємо:

$$\begin{aligned}
 \left| \left\langle \frac{T(t)f - f}{t}, g \right\rangle \right| &\geq \frac{1}{t} \left| \int_0^t \langle T(\beta(\xi))Af, g \rangle d\xi \right| - \\
 &\quad - \left| \frac{1}{t} \int_0^t \langle T(\beta(\xi))Af, g \rangle d\xi - \left\langle \frac{T(t)f - f}{t}, g \right\rangle \right| = \\
 &= \frac{1}{t} \left| \int_0^t \langle T(\beta(\xi))Af, g \rangle d\xi \right| - \frac{1}{t} \left| \int_0^t \langle (T(\beta(\xi)) - T(\xi))Af, g \rangle d\xi \right| \geq \\
 &\geq \frac{1}{t} \left| \int_0^t \langle T(\beta(\xi))Af, g \rangle d\xi \right| - \frac{1}{t} \int_0^t \|T(\beta(\xi)) - T(\xi)\| \|Af\| \|g\| d\xi \geq \\
 &\quad \geq \frac{1}{t} \left| \int_0^t \langle T(\beta(\xi))Af, g \rangle d\xi \right| - q \|Af\| \|g\| \geq \\
 &\geq |\langle Af, g \rangle| - q \|Af\| \|g\| - \frac{1}{t} \left| \int_0^t \langle Af - T(\beta(\xi))Af, g \rangle d\xi \right| \geq \\
 &\geq |\langle Af, g \rangle| - q \|Af\| \|g\| - \frac{1}{t} \int_0^t M(t) \|A^2f\| \|g\| \beta(\xi) d\xi = \\
 &= |\langle Af, g \rangle| - q \|Af\| \|g\| - M(t) \|A^2f\| \|g\| \tilde{\beta}(t).
 \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned}
 |\langle Af, g \rangle| &\leq \left| \left\langle \frac{T(t)f - f}{t}, g \right\rangle \right| + \\
 &\quad + M(t) \|A^2f\| \|g\| \tilde{\beta}(t) + q \|Af\| \|g\| \leq \\
 &\leq \frac{(M(\delta) + 1)}{t} \|f\| \|g\| + M(\delta) \|A\|^2 \|f\| \|g\| \tilde{\beta}(t) + q \|A\| \|f\| \|g\|,
 \end{aligned}$$

де $t \in (0, \delta)$, $f \in \mathfrak{X}$, $g \in \mathfrak{X}^*$. Звідси, враховуючи довільність елементів $f \in \mathfrak{X}$ та $g \in \mathfrak{X}^*$, отримуємо:

$$\|A\| \leq \frac{(M(\delta) + 1)}{t} + M(\delta) \|A\|^2 \tilde{\beta}(t) + q \|A\|, \quad t \in (0, \delta),$$

тобто:

$$(5) \quad M(\delta) \tilde{\beta}(t) \|A\|^2 - (1 - q) \|A\| + \frac{(M(\delta) + 1)}{t} \geq 0, \quad t \in (0, \delta).$$

Вираз у правій частині (5) є квадратним тричленом відносно $\|A\|$, його дискримінант:

$$D(t) = (1 - q)^2 - 4M(\delta)(M(\delta) + 1) \frac{\tilde{\beta}(t)}{t},$$

за умовою леми, є додатним при $t \in (0, \delta_1)$. Тому з нерівності (5) випливає, що при $t \in (0, \delta_1)$ має місце хоча б одна з нерівностей:

$$(6) \quad \|A\| \leq \alpha_1(t) := \frac{(1 - q) - \sqrt{(1 - q)^2 - 4M(\delta)(M(\delta) + 1) \frac{\tilde{\beta}(t)}{t}}}{2M(\delta) \tilde{\beta}(t)},$$

$$(7) \quad \|A\| \geq \alpha_2(t) := \frac{(1 - q) + \sqrt{(1 - q)^2 - 4M(\delta)(M(\delta) + 1) \frac{\tilde{\beta}(t)}{t}}}{2M(\delta) \tilde{\beta}(t)}.$$

Доведемо, що нерівність (7) не може виконуватись при жодному $t \in (0, \delta_1)$.

З властивостей **1** та **3** функції $\tilde{\beta}$ випливає, що функції $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$ неперервні і додатні на $(0, \delta_1)$. Крім того, з додатності дискримінанта $D(t)$ випливає, що

$$(8) \quad \alpha_1(t) < \alpha_2(t), \quad t \in (0, \delta_1).$$

Неважко переконатись, що $\alpha_1(t) \rightarrow \infty$, $t \rightarrow +0$. Отже, існує число $\eta \in (0, \delta_1)$ таке, що $\|A\| \leq \alpha_1(t)$, $t \in (0, \eta)$. Покладемо:

$$(9) \quad \eta_0 := \sup \{ \eta \in (0, \delta_1) : \|A\| \leq \alpha_1(t), t \in (0, \eta) \}.$$

Тоді, внаслідок неперервності $\alpha_1(\cdot)$,

$$(10) \quad \|A\| \leq \alpha_1(\eta_0).$$

Доведемо, що $\eta_0 = \delta_1$. Припустимо протилежне, тобто $\eta_0 < \delta_1$. Тоді для довільного $h \in (\eta_0, \delta_1)$ внаслідок (9) та умов (6)-(7) існує число $t_h \in (\eta_0, h)$ таке, що $\|A\| \geq a_2(t_h)$. Отже, в силу неперервності $\alpha_2(\cdot)$, $\|A\| \geq a_2(\eta_0)$. Але остання нерівність суперечить нерівностям (10) і (8). Отже, припущення невірне. Тому нерівність (6) має місце при всіх $t \in (0, \delta_1)$. \square

4. Нехай A — замкнений лінійний оператор зі щільною областю визначення $\mathcal{D}(A)$ в просторі \mathfrak{X} . Позначимо через $C^\infty(A)$ множину всіх нескінченно диференційовних векторів оператора A :

$$C^\infty(A) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{D}(A^n), \quad \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Для числа $\alpha > 0$ покладемо:

$$\mathfrak{E}^\alpha(A) = \left\{ x \in C^\infty(A) \mid \exists c = c(x) > 0 \forall k \in \mathbb{N}_0 \ \|A^k x\| \leq c\alpha^k \right\}.$$

Множина $\mathfrak{E}^\alpha(A)$ є банаховим простором щодо норми

$$\|x\|_{\mathfrak{E}^\alpha(A)} = \sup_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{\|A^n x\|}{\alpha^n}.$$

Тоді $\mathfrak{E}(A) = \bigcup_{\alpha > 0} \mathfrak{E}^\alpha(A)$ — лінійний локально-опуклий простір відносно топології індуктивної границі банахових просторів

$$\mathfrak{E}(A) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \text{ind } \mathfrak{E}^\alpha(A).$$

Елементи простору $\mathfrak{E}(A)$ називаються цілими векторами експоненціального типу оператора A .

Теорема 1. *Нехай*

1. $\{T(t) : t \geq 0\}$ — півгрупа класу C_0 в банаховому просторі \mathfrak{X} з генератором A .

2. Множина $\mathfrak{E}(A)$ цілих векторів експоненціального типу оператора A всюди щільна в \mathfrak{X} .

Тоді якщо існує вимірна за Лебегом на $[0, \infty)$ функція β , що задовольняє умову (1), для якої

$$(11) \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow +0} \|T(t) - T(\beta(t))\| < 1,$$

то генератор A — обмежений.

Зауваження 1. Загальновідомо, що коли $\{T(t) : t \geq 0\}$ — C_0 -півгрупа з нормальним генератором A в гільбертовому просторі $(\mathfrak{H}, \|\cdot\|)$, то множина $\mathfrak{E}(A)$ всюди щільна в \mathfrak{H} . Отже, наведений у вступній частині статті основний результат роботи [2] є частинним випадком теореми 1.

Доведення теореми 1. Не обмежуючи загальності, можна вважати, що функція $\beta(\cdot)$ обмежена на $[0, \infty)$. Справді, з умови $\frac{\beta(t)}{t} \rightarrow 0, t \rightarrow +0$, випливає, що функція β обмежена в деякому околі нуля. Тому ми завжди можемо замінити функцію β на функцію β_1 , яка є обмежена на $[0, \infty)$ і дорівнює β в околі нуля.

Також, не обмежуючи загальності, можна вважати, що функція β істотно відмінна від нуля в околі нуля, тобто задовольняє умову (3). Справді, якщо функція β не задовольняє (3), то вона дорівнює нулю майже скрізь, за мірою Лебега, у деякому околі нуля. Тому, використовуючи умову (11) і враховуючи сильну неперервність півгрупи $\{T(t)\}$, неважко довести, що $\overline{\lim}_{t \rightarrow +0} \|T(t) - \mathbb{I}\| < 1$. І отже, ми приходимо до відомого випадку, для якого теорема 1 вже доведена.

З умови (11) випливає існування таких чисел $\delta > 0$ і $q \in (0, 1)$, що

$$(12) \quad \|T(t) - T(\beta(t))\| \leq q, \quad t \in (0, \delta).$$

Нехай $\alpha > 0$. Покладемо:

$$T_\alpha(t) := T(t) \upharpoonright \mathfrak{E}^\alpha(A), \quad t \geq 0,$$

де $T(t) \upharpoonright \mathfrak{E}^\alpha(A)$ — звуження півгрупи $T(t)$ на простір $\mathfrak{E}^\alpha(A)$. Неважко переконатись, що $\{T_\alpha(t) : t \geq 0\}$ — півгрупа класу C_0 в (банаховому) просторі $(\mathfrak{E}^\alpha(A), \|\cdot\|_{\mathfrak{E}^\alpha(A)})$, причому генератором півгрупи $\{T_\alpha(t)\}$ є оператор $A_\alpha = A \upharpoonright \mathfrak{E}^\alpha(A)$, тобто оператор $A_\alpha x = Ax \in \mathfrak{E}^\alpha(A)$, $x \in \mathfrak{E}^\alpha(A)$. Згідно з [3, теорема 1], A_α є лінійним неперервним оператором на просторі $(\mathfrak{E}^\alpha(A), \|\cdot\|_{\mathfrak{E}^\alpha(A)})$. Крім того, при $x \in \mathfrak{E}^\alpha(A)$, $t \geq 0$ і $n \in \mathbb{N}_0$ маємо:

$$\|A^n T(t)x\| = \|T(t)A^n x\| \leq \|T(t)\| \|A^n x\| \leq \|T(t)\| \|x\|_{\mathfrak{E}^\alpha(A)} \alpha^n.$$

Отже, для $x \in \mathfrak{E}^\alpha(A)$ $\|T(t)x\|_{\mathfrak{E}^\alpha(A)} \leq \|T(t)\| \|x\|_{\mathfrak{E}^\alpha(A)}$, $t \geq 0$. Тобто $\|T_\alpha(t)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{E}^\alpha(A))} \leq \|T(t)\|$, $t \geq 0$, а тому:

$$(13) \quad M_{T_\alpha}(t) = \sup_{0 \leq s \leq t} \|T_\alpha(s)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{E}^\alpha(A))} \leq M_T(t) = M(t), \quad t \geq 0.$$

При $x \in \mathfrak{E}^\alpha(A)$, $t \in (0, \delta)$ і $n \in \mathbb{N}_0$ використовуючи нерівність (12) отримуємо:

$$\begin{aligned} \|A^n(T(t) - T(\beta(t)))x\| &= \|(T(t) - T(\beta(t)))A^n x\| \leq \\ &\leq \|T(t) - T(\beta(t))\| \|A^n x\| \leq q \|x\|_{\mathfrak{E}^\alpha(A)} \alpha^n, \end{aligned}$$

тобто,

$$\|T_\alpha(t) - T_\alpha(\beta(t))\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{E}^\alpha(A))} \leq q, \quad t \in (0, \delta).$$

Нехай число $\delta_1 > 0$ задовольняє умову

$$4M(\delta)(M(\delta) + 1) \frac{\tilde{\beta}(t)}{t} < (1 - q)^2, \quad t \in (0, \delta_1).$$

Тоді, згідно з (13),

$$4M_{T_\alpha}(\delta)(M_{T_\alpha}(\delta) + 1) \frac{\tilde{\beta}(t)}{t} < (1 - q)^2, \quad t \in (0, \delta_1).$$

Звідси, використовуючи лему 1 і нерівність (13), при довільному фіксованому $\tau \in (0, \delta_1)$ отримуємо:

$$\begin{aligned}
 (14) \quad \|A_\alpha\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{E}^\alpha(A))} &\leq \\
 &\leq \frac{2(M_{T_\alpha}(\delta) + 1)}{\tau \left((1 - q) + \sqrt{(1 - q)^2 - 4M_{T_\alpha}(\delta)(M_{T_\alpha}(\delta) + 1)\frac{\tilde{\beta}(\tau)}{\tau}} \right)} \leq \\
 &\leq \frac{2(M(\delta) + 1)}{\tau \left((1 - q) + \sqrt{(1 - q)^2 - 4M(\delta)(M(\delta) + 1)\frac{\tilde{\beta}(\tau)}{\tau}} \right)} =: \\
 &=: Q_\tau,
 \end{aligned}$$

де $\alpha > 0$, а константа Q_τ не залежить від числа α .

Розглянемо довільний вектор $x \in \mathfrak{X}$. Оскільки множина $\mathfrak{E}(A)$ — щільна в \mathfrak{X} , то, згідно з [3, теорема 4], вектор x можна подати у вигляді:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \quad \text{де} \quad x_k \in \mathfrak{E}^k(A), \quad k \in \mathbb{N}; \quad \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|_{\mathfrak{E}^k(A)} < \infty.$$

Проте, згідно із (14),

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{\infty} \|Ax_k\| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \|Ax_k\|_{\mathfrak{E}^k(A)} = \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \|A_k x_k\|_{\mathfrak{E}^k(A)} \leq Q_\tau \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|_{\mathfrak{E}^k(A)} < \infty.
 \end{aligned}$$

А тому, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} Ax_k$ — збіжний. Звідси отримуємо, враховуючи замкнутість оператора A , що

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \in \mathcal{D}(A).$$

Отже, довільний вектор $x \in \mathfrak{X}$ належить до області визначення $\mathcal{D}(A)$. Це і означає, що $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$. \square

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Голдстейн Дж. Полугруппы линейных операторов и их приложения. – Киев: “Выща школа”, 1989. – 347 с.
- [2] Grushka Ya.I. On the Uniform Convergence Theorem of Semigroups // Proceedings of the Mark Krein International Conference on Operator Theory and Applications, volume II. – Operator Theory Advances and Applications, vol. 118. – Bassel; Boston; Berlin: Birkhauser Verlag, 2000. – P. 177-179.
- [3] Радыно Я.В. Векторы экспоненциального типа и их приложения // Труды математического института им. В.А. Стеклова. – 1987. – Т. CLXXX. – С. 184–185.

517.929

Р. І. Качурівський

Інститут математики НАН України, Київ

Г. П. Пелюх

Інститут математики НАН України, Київ

Про існування періодичних розв'язків систем диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу

Одержані достатні умови існування і єдиності неперервно диференційовного N -періодичного (N — ціле додатне число) розв'язку систем диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу і досліджені його властивості.

We obtain sufficient conditions for existence and unicity of continuously differentiable and N -periodic (N — positive integer) solution to system of differential-functional equations of neutral type with linear deviations of the argument. We also investigate properties of this solution.

Розглянемо систему диференціально-різницевих рівнянь вигляду

$$(1) \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + f(t, x(t), x(t-1), \dot{x}(t-1)),$$

де $t \in \mathbb{R}$, $A = (a_{ij})$ — невироджена $(n \times n)$ -матриця, дійсні частини власних значень якої відмінні від нуля, вектор-функція $f(t, x, y, z) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ є неперервною за всіма змінними та N -періодичною по t (N — ціле додатне число). Питання про існування періодичних розв'язків деяких класів таких систем рівнянь досліджувались в [1]- [7]. Продовжуючи ці дослідження, в даній роботі встановлюються умови існування

і єдиності N -періодичного розв'язку системи (1), пропонується метод його побудови і вивчаються його властивості.

Не порушуючи загальності, далі будемо вважати, що

$$A = \text{diag}(A_1, A_2),$$

де A_1, A_2 — дійсні, сталі матриці розміру $(p \times p)$ та $(n-p \times n-p)$ відповідно, власні значення яких задовольняють умовам

$$\text{Re}\lambda_i(A_1) < 0, \quad i = \overline{1, p},$$

$$\text{Re}\lambda_i(A_2) > 0, \quad i = \overline{p+1, n}.$$

Має місце наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови:*

1) для довільних $(t, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}), (t, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ має місце співвідношення

$$|f(t, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) - f(t, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})| \leq L(|\bar{x} - \bar{x}| + |\bar{y} - \bar{y}| + |\bar{z} - \bar{z}|),$$

де L — деяке додатне число;

$$2) \max_{t \in [0; N]} |f(t, 0, 0, 0)| = f^* < +\infty;$$

3) $|e^{A_1 t}| \leq N_1 e^{-\alpha_1 t}, |e^{-A_2 t}| \leq N_2 e^{-\alpha_2 t}, t \in \mathbb{R}^+,$ де $\alpha_1, \alpha_2, N_1, N_2$ — деякі додатні сталі, $N_1, N_2 \geq 1$;

$$4) \Delta = 2L \left(\left(\frac{N_1}{\alpha_1} + \frac{N_2}{\alpha_2} \right) (|A| + 1) + 1 \right) < 1,$$

де

$$|A| = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

Тоді існує єдиний неперервно диференційовний N -періодичний розв'язок $\gamma(t)$ системи рівнянь (1).

$$(4) \quad \leq L \left(|\bar{x}_0 - \bar{x}_0| + |\bar{x}_{N-1} - \bar{x}_{N-1}| + |\bar{y}_{N-1} - \bar{y}_{N-1}| \right) \leq \\ \leq 2L \left(|\bar{X} - \bar{X}| + |\bar{Y} - \bar{Y}| \right).$$

Аналогічно отримуємо

$$(5) \quad |f(t+i, \bar{x}_i, \bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1}) - f(t+i, \bar{x}_i, \bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1})| \leq \\ \leq 2L \left(|\bar{X} - \bar{X}| + |\bar{Y} - \bar{Y}| \right), \quad i = \overline{1, N-1}.$$

Звідси безпосередньо випливає, що вектор-функція $\tilde{f}(t, X, Y)$ задовольняє умові

$$(6) \quad |\tilde{f}(t, \bar{X}, \bar{Y}) - \tilde{f}(t, \bar{X}, \bar{Y})| \leq 2L \left(|\bar{X} - \bar{X}| + |\bar{Y} - \bar{Y}| \right)$$

при всіх $t \in \mathbb{R}$, $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{X}, \bar{Y} \in \mathbb{R}^{nN}$.

Розглянемо тепер систему

$$(7) \quad \dot{X}(t) = \tilde{A}X(t) + \tilde{f}(t, X(t), \dot{X}(t)),$$

де $\tilde{A} = \text{diag}[A, A, \dots, A]$.

Очевидно, що якщо $\gamma(t)$ — N -періодичний розв'язок системи диференціально-різницевих рівнянь (1), то вектор-функція $\Gamma(t) = (\gamma(t), \gamma(t+1), \dots, \dots, \gamma(t+N-1))$ буде N -періодичним розв'язком системи звичайних диференціальних рівнянь (7).

Для побудови N -періодичного розв'язку системи (7) скористаємося методом послідовних наближень, які визначимо за допомогою співвідношень

$$X_0(t) = 0, \quad \dot{X}_0(t) = 0, \\ (8) \quad X_m(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{G}(t-\tau) \tilde{f}(\tau, X_{m-1}(\tau), \dot{X}_{m-1}(\tau)) d\tau, \\ \dot{X}_m(t) = \tilde{A}X_m(t) + \tilde{f}(t, X_{m-1}(t), \dot{X}_{m-1}(t)), \\ m = 1, 2, \dots,$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{G}(t) &= \text{diag}(G(t), G(t), \dots, G(t)), \\ G(t) &= \begin{cases} -\text{diag}(0, e^{A_2 t}), & \text{при } t < 0, \\ \text{diag}(e^{A_1 t}, 0), & \text{при } t > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Розмірковуючи за індукцією, неважко переконатися у тому, що $X_m(t)$, $m \geq 0$, є неперервно диференційовними при $t \in \mathbb{R}$ і N -періодичними.

Покажемо, що послідовності вектор-функцій $X_m(t)$, $\dot{X}_m(t)$, $m = 0, 1, \dots$, визначені співвідношеннями (8), рівномірно збігаються при $t \in \mathbb{R}$. Для цього, очевидно, достатньо показати, що при $t \in \mathbb{R}$ і всіх цілих $m \geq 1$ мають місце оцінки

$$(9) \quad \begin{aligned} |X_m(t) - X_{m-1}(t)| &\leq M_1 \Delta^{m-1}, \\ |\dot{X}_m(t) - \dot{X}_{m-1}(t)| &\leq M_2 \Delta^{m-1}, \end{aligned}$$

де

$$M_1 = \left(\frac{N_1}{\alpha_1} + \frac{N_2}{\alpha_2} \right) f^*, \quad M_2 = \left(|A| \left(\frac{N_1}{\alpha_1} + \frac{N_2}{\alpha_2} \right) + 1 \right) f^*.$$

Справді, в силу (3) маємо

$$\begin{aligned} |X_1(t) - X_0(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{G}(t - \tau) \tilde{f}(t, 0, 0) d\tau \right| \leq \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{G}(t - \tau)| |\tilde{f}(t, 0, 0)| d\tau \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |G(t - \tau)| |\tilde{f}(t, 0, 0)| d\tau \leq \\ &\leq f^* \left(\int_{-\infty}^t N_1 e^{-\alpha_1(t-\tau)} d\tau + \int_t^{+\infty} N_2 e^{-\alpha_2(\tau-t)} d\tau \right) \leq \\ &\leq f^* \left(\frac{N_1}{\alpha_1} + \frac{N_2}{\alpha_2} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\dot{X}_1(t) - \dot{X}_0(t)| &= |\tilde{A}X_1(t) + \tilde{f}(t, 0, 0)| \leq \\ &\leq |\tilde{A}||X_1(t)| + |\tilde{f}(t, 0, 0)| \leq |A||X_1(t)| + |\tilde{f}(t, 0, 0)| \leq \\ &\leq \left(|A| \left(\frac{N_1}{\alpha_1} + \frac{N_2}{\alpha_2} \right) + 1 \right) f^*, \end{aligned}$$

тобто оцінки (9) мають місце при $m = 1$.

Припустимо, що оцінки (9) доведені уже для деякого $m - 1$ і покажемо, що вони не зміняться при переході до m . Справді, в силу (9) та умови (6) одержимо

$$\begin{aligned} |X_m(t) - X_{m-1}(t)| &= \\ &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{G}(t-\tau) \left(\tilde{f}(\tau, X_{m-1}(\tau), \dot{X}_{m-1}(\tau)) - \tilde{f}(\tau, X_{m-2}(\tau), \dot{X}_{m-2}(\tau)) \right) d\tau \right| \leq \\ &\leq 2L \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{G}(t-\tau)| \left(|X_{m-1}(\tau) - X_{m-2}(\tau)| + |\dot{X}_{m-1}(\tau) - \dot{X}_{m-2}(\tau)| \right) d\tau \leq \\ &\leq 2L(M_1 + M_2)\Delta^{m-2} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{G}(t-\tau)| d\tau = \\ &= 2L \left(\left(\frac{N_1}{\alpha_1} + \frac{N_2}{\alpha_2} \right) f^* + \left(|A| \left(\frac{N_1}{\alpha_1} + \frac{N_2}{\alpha_2} \right) + 1 \right) f^* \right) \Delta^{m-2} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{G}(t-\tau)| d\tau = \\ &= f^* \Delta^{m-1} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{G}(t-\tau)| d\tau \leq f^* \Delta^{m-1} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(t-\tau)| d\tau \leq \\ &\leq f^* \Delta^{m-1} \left(\int_{-\infty}^t N_1 e^{-\alpha_1(t-\tau)} d\tau + \int_t^{+\infty} N_2 e^{-\alpha_2(\tau-t)} d\tau \right) = \\ &= \left(\frac{N_1}{\alpha_1} + \frac{N_2}{\alpha_2} \right) f^* \Delta^{m-1} = M_1 \Delta^{m-1}, \end{aligned}$$

$$|\dot{X}_m(t) - \dot{X}_{m-1}(t)| =$$

$$\begin{aligned}
&= |\tilde{A}X_m(t) + \\
&+ \tilde{f}(t, X_{m-1}(t), \dot{X}_{m-1}(t)) - \tilde{A}X_{m-1}(t) - \tilde{f}(t, X_{m-2}(t), \dot{X}_{m-2}(t))| \leq \\
&\leq |\tilde{A}| \cdot |X_m(t) - X_{m-1}(t)| + \\
&\quad + 2L(|X_{m-1}(t) - X_{m-2}(t)| + |\dot{X}_{m-1}(t) - \dot{X}_{m-2}(t)|) \leq \\
&\leq |\tilde{A}|M_1\Delta^{m-1} + 2L(M_1 + M_2)\Delta^{m-2} = \\
&= |\tilde{A}|M_1\Delta^{m-1} + 2L\left(\frac{N_1}{\alpha_1} + \frac{N_2}{\alpha_2}\right)(|A| + 1) f^* \Delta^{m-2} \leq \\
&\leq |A|M_1\Delta^{m-1} + f^* \Delta^{m-1} = \\
&= \left(|A|\left(\frac{N_1}{\alpha_1} + \frac{N_2}{\alpha_2}\right) + 1\right) f^* \Delta^{m-1} = M_2\Delta^{m-1}.
\end{aligned}$$

Таким чином, оцінки (9) мають місце при всіх $m \geq 1$ і, отже, послідовності вектор-функцій $X_m(t)$, $\dot{X}_m(t)$, $m = 0, 1, \dots$, рівномірно збігаються при $t \in \mathbb{R}$, а вектор-функція

$$(10) \quad \Gamma(t) = \sum_{m=1}^{\infty} (X_m(t) - X_{m-1}(t))$$

буде неперервно диференційовним N -періодичним розв'язком системи рівнянь (7).

Покажемо тепер, що так побудований розв'язок

$$\Gamma(t) = (\gamma_0(t), \gamma_1(t), \dots, \gamma_{N-1}(t))$$

системи (7) буде єдиним.

Дійсно, припустивши, що існує ще один неперервно диференційовний N -періодичний розв'язок $Y(t)$ системи рівнянь (7) ($\Gamma(t) \not\equiv Y(t)$), одержимо

$$|\Gamma(t) - Y(t)| =$$

$$\begin{aligned}
 &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{G}(t-\tau) \left(\tilde{f}(\tau, \Gamma(\tau), \dot{\Gamma}(\tau)) - \tilde{f}(t, Y(\tau), \dot{Y}(\tau)) \right) d\tau \right| \leq \\
 &\leq 2L \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{G}(t-\tau)| \left(|\Gamma(\tau) - Y(\tau)| + |\dot{\Gamma}(\tau) - \dot{Y}(\tau)| \right) d\tau \leq \\
 &\leq 2L \|\Gamma(t) - Y(t)\| \int_{-\infty}^{+\infty} |G(t-\tau)| d\tau \leq \\
 &\leq 2L \|\Gamma(t) - Y(t)\| \left(\int_{-\infty}^t N_1 e^{-\alpha_1(t-\tau)} d\tau + \int_t^{+\infty} N_2 e^{-\alpha_2(\tau-t)} d\tau \right) = \\
 &= 2L \left(\frac{N_1}{\alpha_1} + \frac{N_2}{\alpha_2} \right) \|\Gamma(t) - Y(t)\|, \\
 &|\dot{\Gamma}(t) - \dot{Y}(t)| = \\
 &= |\tilde{A}\Gamma(t) + \tilde{f}(t, \Gamma(t), \dot{\Gamma}(t)) - \tilde{A}Y(t) - \tilde{f}(t, Y(t), \dot{Y}(t))| \leq \\
 &\leq |\tilde{A}| \cdot \|\Gamma(t) - Y(t)\| + 2L \left(|\Gamma(t) - Y(t)| + |\dot{\Gamma}(t) - \dot{Y}(t)| \right) \leq \\
 &\leq 2L|A| \left(\frac{N_1}{\alpha_1} + \frac{N_2}{\alpha_2} \right) \|\Gamma(t) - Y(t)\| + 2L \|\Gamma(t) - Y(t)\| = \\
 &= 2L \left(|A| \left(\frac{N_1}{\alpha_1} + \frac{N_2}{\alpha_2} \right) + 1 \right) \|\Gamma(t) - Y(t)\|, \\
 &\text{де } \|\Gamma(t) - Y(t)\| = \max_{t \in [0; N)} \left(|\Gamma(t) - Y(t)| + |\dot{\Gamma}(t) - \dot{Y}(t)| \right).
 \end{aligned}$$

Звідси випливає

$$\|\Gamma(t) - Y(t)\| \leq \Delta \|\Gamma(t) - Y(t)\|,$$

що можливо лише у випадку, коли $\Gamma(t) \equiv Y(t)$. Отримане протиріччя завершує доведення твердження, що вектор-функція $\Gamma(t) = (\gamma_0(t), \gamma_1(t), \dots, \gamma_{N-1}(t))$, яка визначається співвідношенням (10), є єдиним неперервно диференційовним N -періодичним розв'язком системи рівнянь (7).

Оскільки система (7) має вигляд

$$(11) \quad \begin{cases} \dot{x}_0(t) = Ax_0(t) + f(t, x_0(t), x_{N-1}(t), \dot{x}_{N-1}(t)), \\ \dot{x}_1(t) = Ax_1(t) + f(t+1, x_1(t), x_0(t), \dot{x}_0(t)), \\ \dot{x}_2(t) = Ax_2(t) + f(t+2, x_2(t), x_1(t), \dot{x}_1(t)), \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \dot{x}_{N-1}(t) = Ax_{N-1}(t) + f(t+N-1, x_{N-1}(t), x_{N-2}(t), \dot{x}_{N-2}(t)), \end{cases}$$

то можна переконатися, врахувавши N -періодичність по t вектор-функції $f(t, x, y, z)$, що вектор-функція

$$\bar{\Gamma}(t) = (\gamma_{N-1}(t+1), \gamma_0(t+1), \dots, \gamma_{N-2}(t+1))$$

також буде N -періодичним розв'язком системи (7). В силу єдиності отримаємо

$$(12) \quad \begin{aligned} \gamma_{N-1}(t+1) &= \gamma_0(t), \\ \gamma_0(t+1) &= \gamma_1(t), \\ \gamma_1(t+1) &= \gamma_2(t), \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \gamma_{N-2}(t+1) &= \gamma_{N-1}(t), \\ &t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

звідки безпосередньо випливає, що $\gamma_{N-1}(t) = \gamma_0(t-1)$.

Оскільки в силу (11) маємо

$$\dot{\gamma}_0(t) = A\gamma_0(t) + f(t, \gamma_0(t), \gamma_{N-1}(t), \dot{\gamma}_{N-1}(t)),$$

то приймаючи до уваги (12), отримуємо

$$\dot{\gamma}(t) = A\gamma(t) + f(t, \gamma(t), \gamma(t-1), \dot{\gamma}(t-1)),$$

де $\gamma(t) = \gamma_0(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Таким чином, неперервно диференційовна N -періодична вектор-функція $\gamma(t)$ є розв'язком системи (1).

Припустимо, що існує ще один неперервно диференційовний N -періодичний розв'язок $\tilde{\gamma}(t)$ системи рівнянь (1) ($\gamma(t) \neq \tilde{\gamma}(t)$). Тоді N -періодична вектор-функція

$$\tilde{\Gamma}(t) = (\tilde{\gamma}(t), \tilde{\gamma}(t+1), \dots, \tilde{\gamma}(t+N-1))$$

буде задовольняти систему (7). В силу єдиності N -періодичного розв'язку системи (7), одержимо

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Отримане протиріччя завершує доведення теореми.

Виконуючи в (1) заміну змінних

$$(13) \quad x(t) = y(t) + \gamma(t),$$

де $\gamma(t)$ — N -періодичний розв'язок цієї системи, одержуємо систему рівнянь вигляду

$$(14) \quad \dot{y}(t) = Ay(t) + \Phi(t, y(t), y(t-1), \dot{y}(t-1)),$$

де

$$\begin{aligned} \Phi(t, y(t), y(t-1), \dot{y}(t-1)) = \\ = f(t, \gamma(t) + y(t), \gamma(t-1) + y(t-1), \dot{\gamma}(t-1) + \\ + \dot{y}(t-1)) - f(t, \gamma(t), \gamma(t-1), \dot{\gamma}(t-1)). \end{aligned}$$

Очевидно, що вектор-функція $\Phi(t, x, y, z)$ відповідає умовам 1) – 2) теореми 1 і $\Phi(t, 0, 0, 0) \equiv 0$ при $t \in \mathbb{R}$.

Розглянемо систему (14) при $t \leq 0$. Має місце наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови 1) – 3) теореми 1 і умова*

$$4') \quad \Delta_- = \left(\frac{N_1}{\alpha_1 + \alpha_*} + \frac{N_2}{\alpha_2 - \alpha_*} \right) (3 + |A|)L < 1,$$

де α_* — деяка додатна стала така, що $0 < \alpha_2 - \alpha_* < 1$.

Тоді існує $(n - p)$ -параметрична сім'я $y_-(t)$ розв'язків системи (14) у вигляді ряду

$$(15) \quad y_-(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t)$$

($y_i(t)$, $i = 0, 1, \dots$, — деякі неперервно диференційовні вектор-функції), для яких виконується умова

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} y_-(t) = 0.$$

Доведення. Розглянемо послідовність систем рівнянь

$$\begin{aligned} \dot{y}_0(t) &= Ay_0(t), \\ \dot{y}_1(t) &= Ay_1(t) + \Phi(t, y_0(t), y_0(t-1), \dot{y}_0(t-1)), \\ (16) \quad \dot{y}_i(t) &= Ay_i(t) + \left[\Phi\left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j(t), \sum_{j=0}^{i-1} y_j(t-1), \sum_{j=0}^{i-1} \dot{y}_j(t-1)\right) - \right. \\ &\quad \left. - \Phi\left(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j(t), \sum_{j=0}^{i-2} y_j(t-1), \sum_{j=0}^{i-2} \dot{y}_j(t-1)\right) \right], \\ &\quad i = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Легко переконатися, що неперервно диференційовні при $t \leq 0$ вектор-функції

$$\begin{aligned} y_0(t) &= \text{diag}\left(0, e^{A_2 t} C_{n-p}\right), \\ y_1(t) &= \int_{-\infty}^0 G(t-\tau) \Phi(\tau, y_0(\tau), y_0(\tau-1), \dot{y}_0(\tau-1)) d\tau, \\ (17) \quad y_i(t) &= \int_{-\infty}^0 G(t-\tau) \sigma_{i-1}(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_0(t) &= \text{diag}\left(0, A_2 e^{A_2 t} C_{n-p}\right), \\ \dot{y}_1(t) &= Ay_1(t) + \Phi(t, y_0(t), y_0(t-1), \dot{y}_0(t-1)), \\ \dot{y}_i(t) &= Ay_i(t) + \sigma_{i-1}(t), \\ &\quad i = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

де C_{n-p} — довільний вектор-стовпець розмірності $n - p$,

$$\begin{aligned} \sigma_{i-1}(t) = & \Phi(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j(t), \sum_{j=0}^{i-1} y_j(t-1), \sum_{j=0}^{i-1} \dot{y}_j(t-1)) - \\ & - \Phi(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j(t), \sum_{j=0}^{i-2} y_j(t-1), \sum_{j=0}^{i-2} \dot{y}_j(t-1)), \end{aligned}$$

є розв'язками відповідних систем рівнянь (16) при $t \leq 0$.

Покажемо, що ряд (15), члени якого визначаються формулами (17), рівномірно збігається при всіх $t \leq 0$ і його сума $y_-(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow -\infty$. Для цього достатньо показати, що при $t \leq 0$ виконуються наступні співвідношення:

$$(18) \quad |y_i(t)| \leq \widehat{M}_1 \Delta_-^i e^{\alpha_* t}, \quad |\dot{y}_i(t)| \leq \widehat{M}_2 \Delta_-^i e^{\alpha_* t},$$

$$i = 0, 1, \dots$$

де

$$\widehat{M}_1 = N_2 |C_{n-p}|, \quad \widehat{M}_2 = (|A| + 1) \widehat{M}_1.$$

Справді, нехай $i = 0$. Тоді в силу умови 3) теореми 1 маємо

$$\begin{aligned} |y_0(t)| &= |\text{diag}(0, e^{A_2 t} C_{n-p})| \leq N_2 e^{\alpha_2 t} |C_{n-p}| \leq \widehat{M}_1 e^{\alpha_2 t}, \\ |\dot{y}_0(t)| &= |\text{diag}(0, A_2 e^{A_2 t} C_{n-p})| \leq |A_2| \widehat{M}_1 e^{\alpha_2 t} \leq \widehat{M}_2 e^{\alpha_2 t}. \end{aligned}$$

Звідси випливає:

$$|y_0(t)| \leq \widehat{M}_1 e^{\alpha_* t}, \quad |\dot{y}_0(t)| \leq \widehat{M}_2 e^{\alpha_* t}, \quad \text{при } t \leq 0,$$

де α_* — деяка додатна стала така, що $0 < \alpha_2 - \alpha_* < 1$.

Припустимо, що співвідношення (18) доведені уже для деяких

$m = 0, 1, \dots, i-1$ і покажемо, що вони не зміняться при переході від $i-1$ до i . Дійсно, на підставі (17) і умов теореми одержуємо

$$|y_i(t)| = \left| \int_{-\infty}^0 G(t-\tau) \sigma_{i-1}(\tau) d\tau \right| \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{-\infty}^0 |G(t-\tau)|L(|y_{i-1}(\tau)| + |y_{i-1}(\tau-1)| + |\dot{y}_{i-1}(\tau-1)|)d\tau \leq \\
&\leq L(3+|A|)\widehat{M}_1\Delta_-^{i-1}\left(\int_{-\infty}^t N_1e^{-\alpha_1(t-\tau)}e^{\alpha_*\tau}d\tau + \right. \\
&\qquad \qquad \qquad \left. + \int_t^0 N_2e^{-\alpha_2(\tau-t)}e^{\alpha_*\tau}d\tau\right) \leq \\
&\leq L(3+|A|)\widehat{M}_1\Delta_-^{i-1}\left(\frac{N_1}{\alpha_1+\alpha_*} + \frac{N_2}{\alpha_2-\alpha_*}\right)e^{\alpha_*t} \leq \widehat{M}_1\Delta_-^i e^{\alpha_*t}, \\
&\qquad \qquad \qquad |\dot{y}_i(t)| = |Ay_i(t) + \sigma_{i-1}(t)| \leq \\
&\leq |A||y_i(t)| + L(|y_{i-1}(t)| + |y_{i-1}(t-1)| + |\dot{y}_{i-1}(t-1)|) \leq \\
&\leq |A|\widehat{M}_1\Delta_-^i e^{\alpha_*t} + L(3+|A|)\widehat{M}_1\Delta_-^{i-1}e^{\alpha_*t} \leq \\
&\leq |A|\widehat{M}_1\Delta_-^i e^{\alpha_*t} + L(3+|A|)\left(\frac{N_1}{\alpha_1+\alpha_*} + \frac{N_2}{\alpha_2-\alpha_*}\right)\widehat{M}_1\Delta_-^{i-1}e^{\alpha_*t} \leq \\
&\qquad \qquad \qquad \leq \widehat{M}_2\Delta_-^i e^{\alpha_*t}.
\end{aligned}$$

Цим самим справедливність нерівностей (18) доведена для довільних $i = 0, 1, \dots$, звідки безпосередньо випливає, що

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} y_i(t) = 0.$$

Тоді в силу умови 4') ряди

$$\begin{aligned}
y_-(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t), \\
(19) \quad \dot{y}_-(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \dot{y}_i(t),
\end{aligned}$$

члени яких визначаються формулами (17), рівномірно збігаються при $t \leq 0$ і виконується співвідношення

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} y_-(t) = 0.$$

Для доведення теореми залишається показати, що ряд

$$(20) \quad \Phi(t, y_0(t), y_0(t-1), \dot{y}_0(t-1)) + \\ + \sum_{i=2}^{\infty} \left[\Phi(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j(t), \sum_{j=0}^{i-1} y_j(t-1), \sum_{j=0}^{i-1} \dot{y}_j(t-1)) - \right. \\ \left. - \Phi(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j(t), \sum_{j=0}^{i-2} y_j(t-1), \sum_{j=0}^{i-2} \dot{y}_j(t-1)) \right],$$

де $y_i(t)$ визначаються формулами (17), рівномірно збігається при $t \leq 0$ і його сума дорівнює $\Phi(t, y_-(t), y_-(t-1), \dot{y}_-(t-1))$.

Оскільки при всіх $m \geq 0$ мають місце співвідношення

$$\Phi(t, y_0(t), y_0(t-1), \dot{y}_0(t-1)) + \sum_{i=2}^{m+1} \sigma_{i-1}(t) = \\ = \Phi(t, \sum_{j=0}^m y_j(t), \sum_{j=0}^m y_j(t-1), \sum_{j=0}^m \dot{y}_j(t-1)),$$

то в силу умови 1) теореми 1 знаходимо

$$\left| \Phi(t, \sum_{j=0}^m y_j(t), \sum_{j=0}^m y_j(t-1), \sum_{j=0}^m \dot{y}_j(t-1)) - \right. \\ \left. - \Phi(t, y_-(t), y_-(t-1), \dot{y}_-(t-1)) \right| \leq \\ \leq L \left(\left| \sum_{j=0}^m y_j(t) - y_-(t) \right| + \left| \sum_{j=0}^m y_j(t-1) - y_-(t-1) \right| + \right. \\ \left. + \left| \sum_{j=0}^m \dot{y}_j(t-1) - \dot{y}_-(t-1) \right| \right).$$

Далі, оскільки ряди (15) і (19) є рівномірно збіжними при $t \leq 0$, то для кожного додатного числа $\frac{\varepsilon}{3L}$ знайдеться таке натуральне число m_0 , що при всіх $m \geq m_0$, $t \leq 0$ виконуються

нерівності

$$\left| \sum_{j=0}^m y_j(t) - y_-(t) \right| < \frac{\varepsilon}{3L}, \quad \left| \sum_{j=0}^m \dot{y}_j(t-1) - \dot{y}_-(t-1) \right| < \frac{\varepsilon}{3L}.$$

Приймаючи до уваги останні співвідношення, отримуємо, що для довільних $\varepsilon > 0$, $t \leq 0$, і всіх $m \geq m_0$ має місце нерівність

$$\left| \Phi\left(t, \sum_{j=0}^m y_j(t), \sum_{j=0}^m y_j(t-1), \sum_{j=0}^m \dot{y}_j(t-1)\right) - \Phi\left(t, y_-(t), y_-(t-1), \dot{y}_-(t-1)\right) \right| < \varepsilon,$$

звідки випливає рівність

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \Phi\left(t, \sum_{j=0}^m y_j(t), \sum_{j=0}^m y_j(t-1), \sum_{j=0}^m \dot{y}_j(t-1)\right) &= \\ &= \Phi\left(t, y_-(t), y_-(t-1), \dot{y}_-(t-1)\right). \end{aligned}$$

Цим самим теорема 2 повністю доведена.

Приймаючи до уваги заміну змінних (13) і доведені вище теореми, отримуємо наступне твердження.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови теорем 1 і 2. Тоді існує $(n-p)$ -параметричне сімейство розв'язків $x_-(t)$ системи (1) у вигляді ряду*

$$x_-(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t) + \gamma(t),$$

де $y_i(t)$, $i = 0, 1, \dots$, визначаються формулами (17), таких, що має місце співвідношення

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} (x_-(t) - \gamma(t)) = 0.$$

Розглянемо тепер систему (14) при $t \geq 0$. Має місце наступна теорема.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови 1) – 3) теореми 1 і умова*

$$4') \Delta_+ = \max \left\{ 1 + (|A| + 1) \frac{N_2}{\alpha_2 + \alpha^*}; \right. \\ \left. \frac{N_1}{\alpha_1 - \alpha^*} + \frac{N_2}{\alpha_2 + \alpha^*} \right\} (3 + |A|) e^{\alpha^*} L < 1,$$

де α^* — деяка додатна стала така, що $0 < \alpha_1 - \alpha^* < 1$.

Тоді існує p -параметричне сімейство розв'язків $x_+(t)$ системи (1) у вигляді ряду

$$x_+(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t) + \gamma(t),$$

($y_i(t)$, $i = 0, 1, \dots$, — деякі неперервно диференційовні вектор-функції), для яких виконується умова

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (x_+(t) - \gamma(t)) = 0.$$

Доведення теореми проводиться за тією ж схемою, що і доведення теореми 3.

Зауваження 1. Використовуючи відому теорему Флоке, одержані результати можна узагальнити на випадок системи рівнянь вигляду

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t, x(t), x(t-1), \dot{x}(t-1)),$$

де елементи матриці $A(t)$ є неперервними N -періодичними (N — ціле додатне число) функціями, $f(t, x, y, z) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ є неперервною за всіма змінними і N -періодичною по t .

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Р.Р. Ахмеров, М.И. Каменский, А.С. Потапов, А.Е. Родкина, Б.Н. Садовский. Теория уравнений нейтрального типа. // Мат. анализ (Итоги науки и техники), — 1981. — Т.19. — С.55-126.

- [2] *В.Г. Курбатов.* Линейные дифференциально-разностные уравнения. // Воронеж. : Издательство Воронежского университета, — 1990. — 167 с.
- [3] *Дж. Хейл.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. // — М. : Мир, 1984. — 421 с.
- [4] *Г.П. Пелюх, О.П. Олійниченко.* Асимптотичні властивості глобальних розв'язків системи диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу з нелінійними відхиленнями аргументу. // Нелінійні коливання, — 2002. — 5, №4 — С. 489 – 503.
- [5] *Ю. А. Митропольський, А. М. Самойленко, Д. И. Мартынюк.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно-периодическими коэффициентами. // КИЕВ. : НАУКОВА ДУМКА. — 1984. — 212 с.
- [6] *Г.П. Пелюх, Н.І.Блацук.* Про існування і єдиність періодичних розв'язків систем нелінійних диференціально-функціональних рівнянь з лінійним відхиленням аргумента. // Доп. НАН України, — 1997. — №8 — С. 10 – 13.
- [7] *А.М.Самойленко, Г.П. Пелюх.* О периодических решениях систем нелинейных дифференциально-функциональных уравнений нейтрального типа. // Доп. НАН України, — 1994. — №3 — С. 19 – 21.

Н. В. Лукова

Київський національний університет ім. Т. Шевченка, Київ
E-mail: lukova@ukr.net

Топологічна класифікація функцій без критичних точок на тривимірних многовидах з межею

We consider functions on compact 3-manifolds with boundary without critical points and with less than 4 critical points of its restrictions on the boundary. Their topological classification is obtained.

Ключові слова: Функції, тривимірний многовид, граф, топологічна еквівалентність

1. ВСТУП

Якщо M – гладкий замкнений многовид, то функція Морса на ньому буде функцією загального положення, якщо на кожному її критичному рівні міститься одна критична точка. Такі функції утворюють відкриту скрізь щільну множину у просторі всіх функцій. За лемою Морса [7], для невиродженої критичної точки p існує локальна система координат (x_1, \dots, x_n) , в якій функція має вигляд

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(p) - x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_n^2.$$

Нехай M – гладкий компактний n -вимірний многовид з межею ∂M . Функція $f : M \rightarrow \mathbf{R}$ є m -функцією, якщо

а) усі її критичні точки – невироджені і не лежать на межі ∂M ,

б) обмеження f_∂ функції f на ∂M є функцією Морса загального положення.

Нехай $x \in \partial M$ – критична точка f_∂ . Індексом $ind x$ цієї критичної точки називається пара (λ, δ) , де λ – звичайний індекс,

а $\delta = +1$, якщо вектор $\text{grad } f_x$ спрямований назовні, і $\delta = -1$, якщо $\text{grad } f_x$ спрямований в середину многовиду M . Якщо $x \notin \partial M$ — критична точка f , то індекс визначається звичайним чином. Аналогічно лемі Морса в околі невідродженої критичної точки f_{∂} існує локальна система координат (x_1, \dots, x_n) , $x_n \geq 0$, в якій функція f має вигляд [1]

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(p) - x_1^2 - \dots - x_{\lambda}^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_{n-1}^2 + \delta x_n.$$

На замкненому многовиді за кожною функцією Морса можна побудувати розклад многовиду на ручки. Для m -функцій існують розклади на m -ручки. При цьому кожній внутрішній критичній точці відповідає звичайна ручка, а кожній точці на межі — m -ручка того самого індексу.

Нехай $f, g : M \rightarrow \mathbf{R}$ — гладкі функції. Функції f і g називаються топологічно еквівалентними, якщо існують гомеоморфізми $\psi : M \rightarrow M$, $\zeta : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ такі, що $f\zeta = g\psi$.

Критерії топологічної еквівалентності функцій Морса на компактних двовимірних многовидах отримано в роботах [2, 4, 5], а тривимірних — у [8].

Розглянемо m -функцію на 3-многовиді. З'єднавши внутрішні критичні точки цієї функції шляхами з межею і викинувши околиці цих шляхів, ми отримаємо многовид, дифеоморфний початковому, і m -функцію без внутрішніх критичних точок на ньому. Далі, ми можемо впорядкувати m -ручки так, щоб спочатку приклеювалися ручки індексу $(0, -1)$, потім $(0, +1)$, $(1, -1)$, $(1, +1)$, $(2, -1)$, і нарешті $(2, +1)$. Всі ручки індексу $(0, -1)$ та $(2, +1)$, крім однієї індексу $(0, -1)$ та однієї індексу $(2, +1)$, скорочуються з ручками індексу $(1, -1)$ та $(1, +1)$, відповідно.

Нехай M — компактний зв'язний тривимірний многовид зі зв'язною межею, $f : M \rightarrow \mathbf{R}$ — гладка функція на ньому. Функція f називається p -функцією, якщо вона не має критичних точок і обмеження її на межу має не більше ніж 4 критичні точки, які за зростанням значення функції мають такий вигляд: 1) точка мінімуму індексу $(0, -1)$; 2) (вироджена) точка з

$\delta = -1; 3$) (вироджена) точка з $\delta = +1; 4$) точка максимуму індексу $(2, +1)/$

Постановка задачі. Основна мета даної статті — побудувати повний топологічний інваріант p -функції на тривимірних многовидах, та довести теорему про його реалізацію.

2. ДІАГРАМА p -ФУНКЦІЇ

Дослідимо, як змінюється поверхня рівня p -функції при зростанні значення функції.

При проходженні через точку мінімуму, тобто точку індексу $(0, -1)$, з'являється двовимірний диск. Далі, за відсутності критичних точок топологічний тип поверхні рівня не змінюється. В околі виродженої критичної точки функція f_∂ топологічно еквівалентна функції $\Re(x + iy)^k$ для деякого натурального k [3]. Тоді функція f топологічно еквівалентна функції $\Re(x + iy)^k + \delta z$ в системі координат $(x, y, z), z \geq 0$. При проходженні другої точки до двовимірного диску приклеюється $2k$ -кутник за k сторонами, які розташовані через одну (наприклад, непарні, при послідовній нумерації сторін). До самого многовиду приєднується так звана узагальнена m -ручка, що рівносильне приєднанню $k - 1$ штук m -ручок. Отже, після проходження другої точки ми отримаємо, що поверхнею рівня функції буде деяка поверхня F , на якій виділено k правильно вкладених відрізків u_1, u_2, \dots, u_k (кінці відрізків лежать на межі поверхні), що не мають точок перетину і точок самоперетину. Набір $u = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ — правильно вкладених кривих, що не перетинаються, на поверхні F таких, що після розрізання за ними отримуємо два диски, і таких, що кожне u_i належить межі кожного з цих дисків, називається системою розрізів поверхні F . Проведемо аналогічну конструкцію для функції $-f$. Отримаємо поверхню F' і систему розрізів $v' = \{v_1', v_2', \dots, v_k'\}$ на ній. Оскільки між рівнями F і F' немає критичних точок, то вони гомеоморфні між собою, а многовид

між ними гомеоморфний $F \times [0, 1]$. При цьому різним структурам прямого добутку відповідають різні, але ізотопні гомеоморфізми F' на F . Нехай $v = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ — образ системи розрізів $v' = \{v'_1, v'_2, \dots, v'_k\}$ при одному з таких гомеоморфізмів. Якщо поверхня F орієнтовна, то зафіксуємо орієнтацію на ній. Тоді орієнтація 2-диска, що відповідає мінімуму індукує орієнтацію на його межі, у тому числі і на розрізах u . Аналогічно, орієнтація 2-диска, що відповідає максимуму, породжує орієнтацію на кривих v . У випадку неорієнтованої поверхні задамо орієнтації цих 2-дисків довільно, і також отримаємо орієнтації кривих u та v .

Трійку (F, u, v) будемо називати p -діаграмою. p -діаграми (F, u, v) і (F', u', v') називаються гомеоморфними, якщо існує такий гомеоморфізм $h : F \rightarrow F'$, що $h(u) = u'$ і $h(v) = v'$. При цьому, якщо гомеоморфізм зберігає (змінює) орієнтацію поверхні, то він зберігає (змінює) і орієнтації розрізів. У випадку неорієнтованої поверхні гомеоморфізм зберігає або одночасно змінює орієнтації всіх u -розрізів і, аналогічно, v -розрізів.

p -діаграми (F, u, v) і (F', u', v') називаються напівізотопними, якщо існують такі ізотопії $\varphi_t, \psi_t : F \rightarrow F'$, що $\varphi_0 = \psi_0 = id$, $\varphi_1(u) = u'$, $\psi_1(v) = v'$. Отже, різні вибори структури прямого добутку на $F \times [0, 1]$ приводять до напівізотопних діаграм.

Використовуючи напівізотопії діаграм можна знищити всі криволінійні двокутники, одна із сторін яких належить системі u , а інша — v . Так само можна знищити всі криволінійні трикутники, у яких одна сторона належить системі u , друга — v , а третя — ∂F . Також за допомогою напівізотопії криві з систем u і v , які ізотопні, можна зробити такими, що співпадають. Діаграму, у якій немає криволінійних двокутників та трикутників, а ізотопні криві з різних систем співпадають, будемо називати нормалізованою.

Теорема 1. p -функції $f : M \rightarrow \mathbf{R}$, $g : N \rightarrow \mathbf{R}$ топологічно еквівалентні тоді та тільки тоді, коли побудовані за ними нормалізовані p -діаграми гомеоморфні.

Доведення. Необхідність.

За побудовою p -діаграма за даною функцією задається з точністю до напівізотопії. Аналогічно доведенню теореми 5.3 з [6] для діаграм Хегора, якщо дві діаграми напівізотопні, то нормалізовані діаграми гомеоморфні. Крім того, топологічна еквівалентність функцій породжує гомеоморфізм між p -діаграмами, а отже, і гомеоморфізм між нормалізованими p -діаграмами.

Достатність. Якщо діаграми гомеоморфні, то у них однакові числа k . Тоді функції в околах критичних точок топологічно еквівалентні функціям $h(x, y, z) = \Re(x + iy)^k \pm z$ або $h(x, y, z) = \pm(x^2 + y^2 + z)$. Отже, в околах критичних точок функції топологічно еквівалентні. Так само, як для діаграм Хегора [8], гомеоморфізм нормалізованих p -діаграм задає продовження цих гомеоморфізмів до шуканого гомеоморфізму тривимірного многовиду. Теорема доведена. \square

3. p -ГРАФ

Побудуємо вкладений в замкнену поверхню орієнтований граф, який будемо називати p -графом. Стягнемо кожну компоненту межі в точку, яку будемо розглядати як вершини p -графа. Ребрами будуть розрізи u_1, u_2, \dots, u_k та v_1, v_2, \dots, v_k . Якщо розрізи співпадають, то їм буде відповідати одне "подвійне" ребро. Отже, ребра p -графа розбиті на три типи: 1) u ; 2) v і 3) "подвійні". Орієнтації розрізів задають орієнтації ребер. При цьому на подвійних ребрах задано дві орієнтації (u -орієнтація і v -орієнтація). Після стягнення компонент межі поверхні F в точки отримаємо нову замкнену поверхню Φ . При цьому, p -граф є графом, вкладеним в Φ . Далі будемо розглядати такі графи, у яких більше ніж 2 ребра. Випадки з 1 та 2 ребрами розглянуто в прикладах.

Теорема 2. p -функції $f : M \rightarrow \mathbf{R}$, $g : N \rightarrow \mathbf{R}$ топологічно еквівалентні тоді і тільки тоді, коли існує гомеоморфізм відповідних поверхонь Φ , який задає ізоморфізм p -графів, зберігає

тип ребер та зберігає або одночасно змінює орієнтації ребер, як для розрізів.

Доведення. Необхідність. Необхідність випливає з теореми 1 та однозначності побудови p -графа.

Достатність. Покажемо, як за вкладеним p -графом побудувати p -діаграму. Вирізаємо з поверхні Φ регулярні околиці вершин p -графа. Отримуємо, поверхню, гомеоморфну F , і вкладені в неї криві (розрізи), що задаються вкладеннями ребер p -графа. При цьому подвійним ребрам відповідає пара u - і v -розрізів, що співпадають. Тоді гомеоморфізм поверхонь Φ задає гомеоморфізм p -діаграм, а отже, і топологічну еквівалентність p -функцій. Теорема доведена. \square

Властивості p -графів.

За побудовою p -граф має такі властивості:

- (1) число ребер типу u рівне числу ребер типу v ;
- (2) u -підграф, що складений з ребер типу u та подвійних ребер розбиває поверхню на дві однозв'язні області і кожне ребро цього підграфа входить в межу кожної з двох областей;
- (3) аналогічна властивість для v -підграфа, складеного з ребер типу v та подвійних ребер.

Теорема 3. *Вкладений в замкнену поверхню граф, ребра якого розбиті на три типи так, що виконуються властивості 1)–3), є p -графом деякої p -функції.*

Доведення. Розглянемо чотири тривимірних диска і функції $h(x, y, z) = \Re(x + iy)^k \pm z$ та $h(x, y, z) = \pm(x^2 + y^2 + z)$ на них, де $(0, 0, 0)$ — деяка точка на межі, в околі якої диск має рівняння $z \geq 0$. За p -графом побудуємо p -діаграму, яка задає склейку цих дисків між собою. Після склейки отримаємо тривимірний многовид і функцію на ньому. За необхідності згладивши функцію в місцях склейки, отримуємо шукану p -функцію. Теорема доведена. \square

4. ПРИКЛАДИ ОБЧИСЛЕНЬ

Число розрізів k однієї з систем будемо називати складністю функції. Якщо F — орієнтована поверхня роду g з d компонентами краю, то $k = 2g + d$, а якщо вона не орієнтована, то $k = g + d$.

Розглянемо випадок орієнтованої поверхні.

1) $k = 1$. Тоді $g = 0$, $d = 1$. Існує єдиний p -граф — петля з подвійним ребром. Дві орієнтації на ньому можуть співпасти або бути протилежними. Проте обидва ці випадки задають напівізотопні діаграми. Отже, існує єдина, з точністю до топологічної еквівалентності, така p -функція.

2) $k = 2$. Тоді $g = 0$, $d = 2$. Також існує єдиний p -граф, гомеоморфний колу з двома вершинами на ньому і подвійними ребрами, а обидві пари орієнтацій на ньому приводять до напівізотопних діаграм. Отже, в цьому випадку існує єдина, з точністю до топологічної еквівалентності, p -функція.

3) $k = 3$. А) $g = 0$, $d = 3$. p -граф, гомеоморфний колу з трьома вершинами на ньому і подвійними ребрами. На подвійних ребрах орієнтації співпадають або протилежні. Тому існує дві, з точністю до топологічної еквівалентності, p -функції.

Б) $g = 1$, $d = 1$. u -підграф має одну вершину і три петлі без точок перетину на торі. Тоді дві з цих петель задають твірні фундаментальної групи тора, а третя є їх добутком. v -підграф має ту саму властивість. Оскільки пара твірних фундаментальної групи виражається через іншу пару твірних за допомогою матриці з $\mathbf{SL}(2, \mathbf{Z})$, то ця матриця задає p -граф. При цьому дві матриці задають один і той самий p -граф, якщо вони однакові, або одну з іншої можна отримати множенням матриці на -1 . Отже, у цьому випадку існує нескінченно багато p -графів.

Розглянемо випадок неорієнтованої поверхні.

1) $k = 2$. Тоді $g = 1$, $d = 1$. Існує єдиний p -граф, гомеоморфний 8 з подвійними ребрами. F – гомеоморфна стрічці Мьобіуса. Якщо її подати як прямокутник зі склеєною парою протилежних сторін, то розрізи гомотопні цим сторонам. Однакові та протилежні орієнтації подвійних ребер задають напівізотопні діаграми. Отже, існує єдина, з точністю до топологічної еквівалентності, така p -функція.

2) $k = 3$. А) $g = 1$, $d = 2$. u -підграф можна отримати з p -графа з попереднього прикладу, якщо до нього додати одну вершину і ребро, що її з'єднує з вершиною на 8 . Один p -граф можна отримати, якщо всім ребрам приписати тип подвійних ребер. Ще один p -граф має вигляд двох 8 , вершини яких з'єднані подвійним ребром. На кожному з подвійних ребер, кожну з пари орієнтацій можна вибрати двома способами, тобто всього існує 4 способи для пари. А тому існує вісім, з точністю до топологічної еквівалентності, p -функцій.

Б) $g = 2$, $d = 1$. u -підграф має одну вершину та три петлі. Можливі два не гомеоморфних вкладення його в пляшку Клейна, що дають 4 різних p -графа. На трьох з них можливі по 2 орієнтації (у них існує гомеоморфізм самого графа на себе, що змінює орієнтацію), а у четвертого – 4 орієнтації (такого гомеоморфізму не існує). Отже, в цьому випадку існує 10 топологічно не еквівалентних p -функцій.

Висновок. Побудовано повний топологічний інваріант p -функцій на тривимірних многовидах, доведено теорему реалізації цього інваріанта функцією. Тим самим отримано топологічну класифікацію p -функцій. Ефективність побудованого інваріанту продемонстровано на прикладах. Описано всі функції, складність яких не перевищує 3.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] *Jankowski A., Rubinsztein R.* Functions with non-degenerated critical points on manifolds with boundary // *Comm. Math.* – 1972. – V.XVI. – P.99–112.

-
- [2] *Kulinich E. V.* On topological equivalence Morse functions on surfaces// Methods of Func. An. and Topology.– 1998.– N1.– P. 22–28.
 - [3] *Prishlyak A. O.* Topological equivalence of smooth functions with isolated critical points on a closed surface// Topology and its application.– 2002.– V.119, N3.– P.257–267.
 - [4] *Sharko V. V.* On topological equivalence Morse functions on surfaces// Int. conference at Chelyabinsk State Univ.: Low-dimensional Topology and Combinatorial Group Theory.– 1996.– P.19–23.
 - [5] *Максименко С. І.* Еквівалентність m -функцій на поверхнях, Некоторые вопросы совр. мат.: Праці Ін-ту математики НАН України.–1998.– Т.25.– С.128–134.
 - [6] *Матвеев С. В., Фоменко А. Т.* Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии. – М.: Изд-во Моск.гос.ун-та, 1991.– 301с.
 - [7] *Милнор Дж.* Теория Морса.– М.: Мир,1964.–184 с.
 - [8] *Пришляк А. О.* Сопряженность функций Морса// Некоторые вопросы совр. мат.: Праці Ін-ту математики НАН України.–1998.– Т.25.– С94–103.

Д. П. Лычак

Київський національний університет ім. Т.Г. Шевченка

E-mail: amid1@ukr.net

Послойная эквивалентность гладких функций на поверхностях с изолированными критическими точками

This paper studies smooth functions with isolated critical points. They are considered to within fiber equivalence. The fd-graph, which specifies the f-atom, is constructed. The necessary and sufficient condition for fiber equivalence of smooth functions is formulated.

Ключевые слова: *Классификация, изолированные критические точки, функции Морса*

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматриваются гладкие функции с изолированными критическими точками на гладких замкнутых поверхностях. Известно, что любую гладкую функцию сколь угодно малым шевелением можно превратить в функцию Морса (функция, все критические точки которой невырожденные). Однако при рассмотрении семейства функций, зависящих от параметра, появляются неустранимые малыми шевелениями вырождения. Локальная классификация гладких функций с изолированными критическими точками с точностью до топологической эквивалентности была получена А.О. Пришляком в [3]. Глобальная классификация разными способами была предложена В.В. Шарко в [4] и А.О. Пришляком в [3].

В настоящей работе обобщается способ классификации функций Морса с точностью до послойной эквивалентности при помощи атомов и молекул, предложенный А.Т. Фоменко

(см. [1]), на случай вырожденных критических точек. Для кодирования атомов построен fd-граф, являющийся обобщением f-графа, предложенного А.А. Ошемковым в [2].

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть далее X — гладкое замкнутое двумерное многообразие, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ и $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкие функции с изолированными критическими точками.

Определение 1. *Две функции называются топологически эквивалентными, если найдутся гомеоморфизмы $h : X \rightarrow X$ и $\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что $f(h(x)) = \mu(g(x))$, и μ сохраняет ориентацию \mathbb{R} .*

Определение 2. *Слоями функции будем называть компоненты связности её линий уровня. Две функции будем называть послойно эквивалентными, если существует гомеоморфизм поверхности на себя, который переводит слои одной функции в слои другой. Две функции будем называть оснащённо послойно эквивалентными, если существует гомеоморфизм поверхности на себя, который переводит слои одной функции в слои другой с сохранением направления роста функции.*

При послойной эквивалентности компоненты связности одной линии уровня могут отобразиться на разные уровни. А при топологической эквивалентности такого не происходит, и поэтому можно считать, что все критические уровни функции упорядочены. Поэтому классов топологической эквивалентности больше, чем классов послойной эквивалентности.

Пусть c и c' — критические значения функций f и g соответственно, а линии уровня $f^{-1}(c)$ и $g^{-1}(c')$ связны.

Определение 3. *Функции f и g называются оснащённо послойно эквивалентными в окрестностях своих особых слоёв $f^{-1}(c)$ и $g^{-1}(c')$, если существуют положительные числа ε и*

ε' и гомеоморфизм $h : f^{-1}(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \rightarrow g^{-1}(c' - \varepsilon', c' + \varepsilon')$, переводящий линии уровня функции f в линии уровня функции g и отображающий область $(f > c)$ в $(g > c')$.

Определение 4. *Атомом называется окрестность P^2 критического слоя, задаваемая неравенством $c - \varepsilon \leq f \leq c + \varepsilon$ для достаточно малого ε , расслоённая на линии уровня функции f и рассматриваемая с точностью до послойной эквивалентности. f -атомом называется пара (P^2, f) , рассматриваемая с точностью до оснащённой послойной эквивалентности.*

Из леммы Морса следует, что у функции Морса на поверхности могут быть критические точки двух типов: локальные экстремумы и седловые точки. Существуют всего два f -атома, соответствующие локальным экстремумам. Рассмотрим седловые атомы. Седловой атом можно представить как двумерную поверхность, состоящую из плоских крестов и соединяющих их концы длинных узких лент. Поэтому для функции Морса можно сформулировать эквивалентное определение седлового атома.

Определение 5. *Седловым атомом назовём пару (P^2, K) , где P^2 — связная компактная двумерная поверхность с краем, а K — связный граф в ней такой, что все его вершины имеют степень 4, каждая связная компонента множества $P^2 \setminus K$ гомеоморфна кольцу $S \times (0, 1]$ и множество этих колец можно разбить на отрицательные и положительные так, чтобы к каждому ребру графа K примыкало ровно одно положительное и ровно одно отрицательное кольцо. f -атомом назовём атом, в котором зафиксировано разбиение колец на положительные и отрицательные.*

Атомы рассматриваются с точностью до гомеоморфизма поверхностей, который граф переводит в граф. f -атомы рассматриваются с точностью до гомеоморфизма, который граф переводит в граф, а положительные кольца переводит в положительные. Граф K является спайном атома (P^2, K) .

Определение 6. Молекулой функции f называется граф, полученный из поверхности стягиванием слоёв функции в точку, в вершинах которого расположены атомы соответствующих критических слоёв. Причём указано взаимно однозначное соответствие между граничными окружностями атома и рёбрами графа, инцидентными вершине, в которую помещён атом. f -молекулой функции f называется молекула, рёбра которой ориентированы по направлению роста функции f .

Если поверхность ориентируема, то атомы-вершины молекулы естественно считать ориентированными. Если поверхность неориентируема, то атомы рассматриваются без учёта ориентации. Молекулы рассматриваются с точностью до гомеоморфизма графа, который продолжается на атомы. Для f -молекул этот гомеоморфизм должен дополнительно сохранять направление рёбер.

Теорема 1. *Функции Морса на ориентированной поверхности послойно эквивалентны с сохранением ориентации тогда и только тогда, когда соответствующие им молекулы эквивалентны. Функции Морса на ориентированной поверхности оснащённо послойно эквивалентны с сохранением ориентации тогда и только тогда, когда соответствующие им f -молекулы эквивалентны.*

Доказательство см. в [1].

Приведём конструкцию f -графа, введённого Ошемковым в [2] для кодирования атомов критических слоёв, содержащих невырожденные критические точки (см. также [1]).

Пусть задан f -атом. Проведём сепаратрисы соответствующей ему функции Морса, которые идут из границы отрицательных колец в седла. Вершинами f -графа будут концы сепаратрис, лежащие на границе отрицательных колец. Каждая пара сепаратрис задаёт неориентируемое ребро f -графа. Задав произвольным образом ориентацию на границах отрицательных

колец, получим ориентированные рёбра f -графа. На неориентированных рёбрах нужно расставить знаки: если части граничных окружностей отрицательных колец, которые являются противоположными сторонами прямоугольника-окрестности пары соответствующих сепаратрис, задают противоположную ориентацию на границе прямоугольника, то ставим метку -1 , иначе $+1$.

Таким образом, f -граф — это граф, каждой вершине которого инцидентны три ребра: одно неориентированное ребро с меткой, а также два ориентированных ребра — одно входит, другое выходит. f -графы рассматриваются с точностью до эквивалентности, которая задаётся изоморфизмом графов, сохраняющим ориентацию рёбер и метки на рёбрах, а также последовательностью операций изменения направления всех рёбер некоторого цикла с одновременным изменением меток неориентированных рёбер, инцидентных этому циклу, на противоположные.

Если удалить из поверхности f -атома все сепаратрисы соответствующей ему функции, то поверхность распадётся на шестиугольники следующего вида: две противоположные стороны являются дугами граничных окружностей колец (положительного и отрицательного), а каждая из двух других пар сторон составлена из сепаратрис (входящей и выходящей). f -граф содержит информацию, как нужно склеивать эти шестиугольники. Занумеруем ориентированные рёбра f -графа и с каждым из них сопоставим шестиугольник. Зададим на шестиугольниках ориентацию (а также положительную и отрицательную область) и обозначим их стороны через $a_i^\pm, p_i^\pm, q_i^\pm$, где i — номер ориентированного ребра f -графа (см. рис. 4). На первом этапе склеиваются отрицательные кольца: отрезок p_i^- склеивается с отрезком q_j^- (направления при склейке противоположны), если конец i -го ребра совпадает с началом j -го ребра. На втором этапе склеиваются положительные кольца f -атома: если неориентированное ребро соединяет вершину (j, i) (конец j -го ребра

и начало i -го ребра) с вершиной (m, k) , то отрезок $q_i^+ p_j^+$ склеивается с $q_k^+ p_m^+$ (если метка на ребре $+1$, то направления при склейке противоположны, иначе — согласованы).

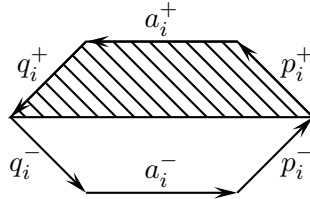


Рис. 4. Шестиугольник

Граничным окружностям f -атома соответствуют циклы на f -графе. Границы отрицательных колец — это просто ориентированные циклы. Границы положительных колец задаются смешанными циклами, в которых ориентированные и неориентированные рёбра чередуются, причём знак неориентированного ребра определяет, по какому ориентированному ребру следует продолжить обход графа: если знак плюс, то направление следующего ориентированного ребра совпадает с направлением предыдущего ребра. При этом каждое ориентированное ребро принадлежит одному циклу, а неориентированное ребро — точно двум циклам, которые задают граничные окружности положительных колец.

Для ориентируемого атома можно так подобрать ориентацию граничных окружностей отрицательных колец, что все метки на неориентированных рёбрах f -графа будут положительны, а значит, их можно опустить.

3. АТОМЫ ВЫРОЖДЕННЫХ КРИТИЧЕСКИХ СЛОЁВ

В [1] рассматриваются функции с невырожденными критическими точками, но допускается расположение нескольких из них на одном уровне. Мы рассмотрим произвольную гладкую

функцию на гладкой замкнутой поверхности с изолированными критическими точками (возможно, вырожденными).

Определение 7. Будем называть все критические точки, отличные от локальных экстремумов, седловыми, а соответствующие атомы — седловыми атомами.

Известно (см. [3]), что для любой изолированной седловой критической точки гладкой функции на гладкой поверхности существует окрестность, в которой функция послойно эквивалентна функции $f(x, y) = \Re e(x+iy)^k$ для некоторого натурального k . При $k = 1$ от критической точки можно избавиться. При $k = 2$ это будет морсовское седло $x^2 - y^2$.

Поэтому можно переформулировать определение седлового атома следующим образом.

Определение 8. Седловым атомом назовём пару (P^2, K) , где P^2 — связная компактная двумерная поверхность с краем, а K — связный граф в ней такой, что его вершины имеют чётную степень больше двух, каждая связная компонента множества $P^2 \setminus K$ гомеоморфна кольцу $S \times (0, 1]$ и множество этих колец можно разбить на отрицательные и положительные так, чтобы к каждому ребру графа K примыкало в точности одно положительное и в точности одно отрицательное кольцо. f -атомом назовём атом, в котором зафиксировано разбиение колец на положительные и отрицательные.

Атомы рассматриваются с точностью до гомеоморфизма поверхностей, который граф переводит в граф. f -атомы рассматриваются с точностью до гомеоморфизма, который граф переводит в граф, а положительные кольца переводит в положительные. Понятие молекулы и f -молекулы для невырожденного случая переносится без изменений на вырожденный случай.

Теорема 2. Гладкие функции с изолированными критическими точками на ориентированной поверхности послойно эквивалентны с сохранением ориентации тогда и только тогда,

когда соответствующие им молекулы эквивалентны. Гладкие функции на ориентированной поверхности оснащённо послойно эквивалентны с сохранением ориентации тогда и только тогда, когда соответствующие им f -молекулы эквивалентны.

Доказательство. Необходимость следует из определения молекулы. Достаточность доказывается аналогично невырожденному случаю. Действительно, из определения эквивалентности молекул следует, что атомы функций одинаковы. Из последнего вытекает, что функции послойно эквивалентны в окрестностях критических слоёв. Поскольку гомеоморфизм молекул задаёт биекцию между регулярными слоями функций, а на концах трубок, которые соединяют атомы, гомеоморфизм уже задан, то его можно продолжить на эти трубки. \square

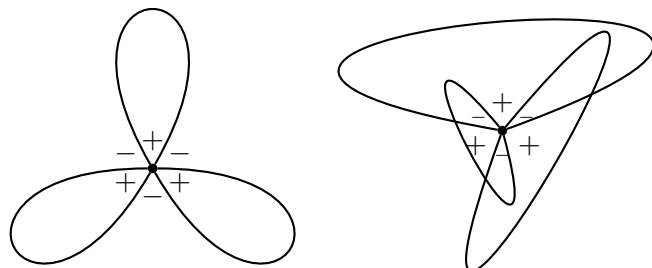
Замечание 1. Вообще говоря, существует два способа приклейки цилиндра (трубки), который соответствует ребру молекулы, к граничной окружности атома. Но в ориентированном случае молекула однозначно задаёт функцию, поскольку приклейку следует совершать с согласованием ориентаций. В неориентируемом случае в вершинах молекулы необходимо задать дополнительную информацию, чтобы соответствующее утверждение было верно.

4. КОДИРОВАНИЕ АТОМОВ КРИТИЧЕСКИХ СЛОЁВ

Обобщим конструкцию f -графа на случай вырожденных критических точек. Вершины и ориентированные рёбра определяются аналогично невырожденному случаю. Каждая пара сепаратрис, проходящих по отрицательным кольцам, которые в окрестности критической точки граничат с одним и тем же положительным кольцом, задаёт неориентированное ребро.

Замечание 2. Если расставить метки-знаки аналогично невырожденному случаю, то такой граф не будет различать некоторые атомы. Действительно, после склейки из шестиугольников отрицательных колец есть 2^k вариантов склейки

атома (в предположении, что на критическом уровне есть только одна вырожденная критическая точка индекса Пуанкаре $1 - k$, то есть её тип такой же, как и у точки $(0, 0)$ для функции $\Re(x + iy)^k$). А количество знаков на неориентированных рёбрах, хотя и равно k , но один из них определяется через остальные, то есть не несёт никакой информации. Например, два разных атома, спайны которых изображены на рис. 5(a), имеют один и тот же обобщённый f -граф. Для однозначности нужен ещё один бит информации.



(a) Спайны атомов

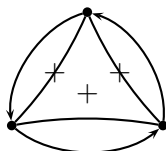
(b) f -граф

Рис. 5

Зафиксируем произвольным образом на каждом неориентированном многоугольнике ориентацию. Таким образом, неориентированные рёбра приобретут ориентацию, в дальнейшем мы

будем их называть *внутренними рёбрами* и изображать пунктиром, в отличие от *граничных рёбер*, которые соответствуют дугам границы атома. Знаки будем расставлять не на рёбрах, а в вершинах по следующему правилу. Рассмотрим окрестность той части сепаратрисы, идущей из границы отрицательного кольца в критическую точку, которая не содержит критическую точку. Одна сторона этого прямоугольника принадлежит граничной окружности, а значит, на ней задана ориентация, направление противоположной стороны задаётся ранее зафиксированной ориентацией многоугольника. Если они индуцируют одну и ту же ориентацию прямоугольника, то в соответствующей вершине ставим знак плюс, иначе — минус.

Определение 9. *Так определённый граф назовём fd-графом. Эквивалентность fd-графов задаётся изоморфизмом, сохраняющим ориентации рёбер и метки вершин, а также операцией изменения направления всех рёбер любого одноцветного цикла с одновременной заменой знаков инцидентных вершин на противоположные.*

То есть fd-граф — это граф, вершины которого имеют степень 4 и содержат метку-знак, а рёбра ориентированы и раскрашены в два цвета. Причём, в каждую вершину входит и из каждой вершины выходит по одному ребру каждого цвета, и внутренние рёбра образуют ориентированные циклы длины k_j , $j = 1, \dots, n$, где n — количество критических точек слоя, в окрестностях которых функция эквивалентна $\Re(x + iy)^{k_j}$, $j = 1, \dots, n$. Граничным окружностям отрицательных колец f-атома соответствуют циклы граничных рёбер fd-графа. Граничным окружностям положительных колец f-атома соответствуют смешанные циклы, где внутренние и граничные рёбра чередуются, причём знак вершины определяет по ребру с какой ориентацией следует продолжать путь (если плюс, то направление следующего ребра должно совпадать с направлением предыдущего). Каждое ребро принадлежит ровно одному

из циклов, соответствующих граничным окружностям положительных колец.

Опишем алгоритм склейки f -атома по fd -графу. Сопоставим каждому граничному ребру fd -графа шестиугольник. Первый этап склейки отрицательных колец f -атома происходит, как и в невырожденном случае. На втором этапе следует склеить отрезок p_i^+ с q_j^+ (направления при склейке противоположны), если существует внутреннее ребро, соединяющее вершины $(i, *)$ (i -е граничное ребро входит, выходит любое) и $(*, j)$ и при этом направленное от $(i, *)$ к $(*, j)$, если метки в вершинах $+1$, и от $(*, j)$ к $(i, *)$, если метки -1 . Отрезки p_i^+ и P_j^+ склеиваются (ориентации согласованы), если существует внутреннее ребро, соединяющее вершины $(i, *)$ и $(j, *)$ и направленное от $(i, *)$ к $(j, *)$, если метки в вершинах $+1$ и -1 соответственно, или же от $(j, *)$ к $(i, *)$, если метки -1 и $+1$. Отрезки q_i^+ и q_j^+ склеиваются (ориентации согласованы), если существует внутреннее ребро, соединяющее вершины $(*, i)$ и $(*, j)$ и направленное от $(*, i)$ к $(*, j)$, если метки в вершинах -1 и $+1$ соответственно, или же от $(*, j)$ к $(*, i)$, если метки $+1$ и -1 .

Теорема 3. *Два f -атома эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие им fd -графы эквивалентны.*

Доказательство. Хотя fd -граф рассматривается как абстрактный граф, его можно естественным образом вложить в поверхность f -атома. А поскольку гомеоморфизм, который задаёт эквивалентность f -атомов, переводит отрицательные кольца в отрицательные, а спайн f -атома в спайн, то он порождает изоморфизм fd -графов, который сохраняет направления рёбер и метки в вершинах. Причём, при одинаковых ориентациях соответствующих рёбер, метки будут равны, поскольку гомеоморфизм переводит спайн f -атома в спайн.

Достаточность доказывается аналогично невырожденному случаю. Сначала нужно изменить ориентацию некоторых циклов на одном из fd -графов, чтобы они стали изоморфны как

ориентированные графы с метками (возможность следует из определения эквивалентности fd-графов). Изоморфизм fd-графов порождает гомеоморфизмы спайнов и граничных окружностей f-атомов, которые непрерывным образом продолжаются на отрицательные и положительные кольца. \square

5. ПРИМЕРЫ

Рассмотрим функции, у которых помимо локальных экстремумов есть ровно одна критическая точка. Такие функции однозначно определяются с точностью до послойной эквивалентности седловым атомом и с точностью до оснащённо послойной эквивалентности седловым f-атомом, а значит, fd-графом.

Рассмотрим функции с одной седловой точкой, в окрестности которой они эквивалентны функции $\Re e(x + iy)^3$. Соответствующий fd-граф имеет три вершины, три граничных и три внутренних ребра. Три внутренних ребра образуют треугольник, а для граничных рёбер существуют три варианта: либо они являются сторонами треугольника, либо каждое ребро образует петлю, либо два из них образуют двуугольник, а третье — петлю. В каждом из трёх случаев следует зафиксировать направления рёбер и расставить знаки в вершинах. В первом случае при фиксированной ориентации каждого из циклов возможны четыре варианта расстановки знаков, которые задают неэквивалентные fd-графы: $(+, +, +)$, $(+, +, -)$, $(+, -, -)$ и $(-, -, -)$ (поскольку из-за симметричности графа вершины равноправны). Во втором случае любая расстановка знаков задаёт эквивалентные fd-графы, так как, изменяя ориентацию петель, мы можем изменить любой знак. В третьем случае знак в вершине, которая инцидентна петле, не существенен, а в двух оставшихся вершинах возможны два варианта: либо знаки совпадают, либо различны. Последнее верно, поскольку граничные рёбра образуют цикл длины два и изменение их направлений не изменит граф. Таким образом, всего имеем 7

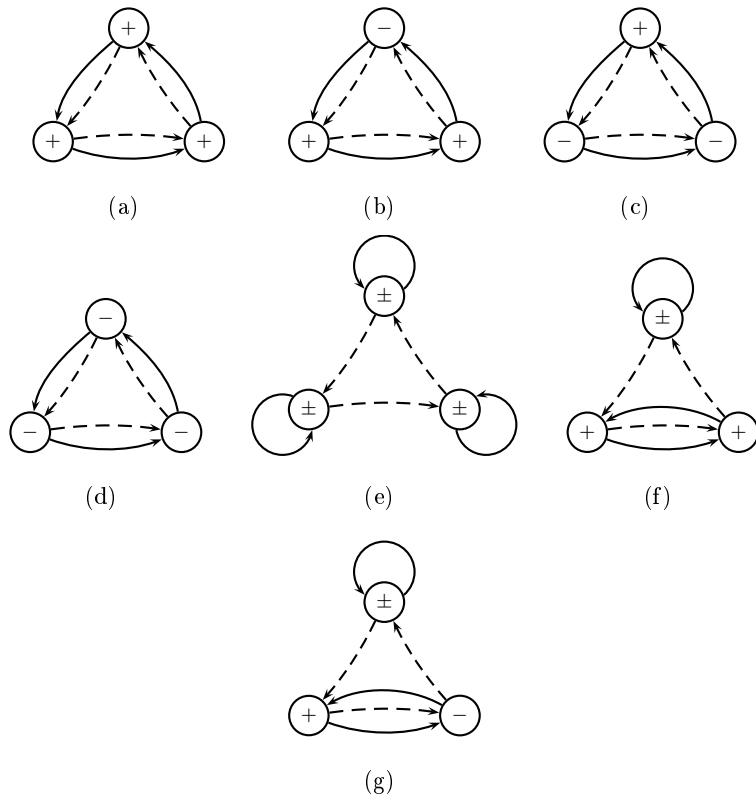


Рис. 6. fd-графы

функций, рассматриваемых с точностью до оснащённо послойной эквивалентности. Из них 4 заданы на ориентируемых поверхностях, а 3 — на неориентируемых. Функция на рис. 6(a) задана на торе, функции на рис. 6(d), рис. 6(e) и рис. 6(f) — на сфере, функции на рис. 6(c) и рис. 6(g) — на проективной плоскости и функция на рис. 6(b) задана на бутылке Клейна.

Если рассматривать эти функции с точностью до послойной эквивалентности, то, поскольку некоторым f -атомам соответствует один атом, некоторые функции будут принадлежать одному классу послойной эквивалентности. Так, функции на рис. 6(d) и рис. 6(e) послойно эквивалентны, а также — функции на рис. 6(c) и рис. 6(g). Таким образом, существует 5 разных (с точностью до послойной эквивалентности) функций такого вида.

6. Выводы

В работе доказано, что гладкие функции с изолированными критическими точками с точностью до послойной эквивалентности (оснащённо послойной эквивалентности) задаются при помощи молекул (f -молекул). Для кодирования f -атомов построен fd -граф, являющийся обобщением f -графа на вырожденный случай. Доказано, что fd -граф однозначно задаёт f -атом. Найдены все функции (рассматриваемые как с точностью до послойной, так и с точностью до оснащённо послойной эквивалентности) с одной седловой точкой, в окрестности которой они эквивалентны функции $\Re(x + iy)^3$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация: В 2-х т. — Ижевск: Издательский дом „Удмуртский университет“, 1999.
- [2] Ошемков А.А. Функции Морса на двумерных поверхностях. Кодирование особенностей // Труды Мат. ин-та РАН. — 1994. — Т. 205. — С. 131–140.
- [3] Prishlyak A.O. Topological equivalence of smooth functions with isolated critical points on a closed surface // Topology and its application. — V. 119, № 3. — 2002.
- [4] Шарко В.В. Гладкая и топологическая эквивалентность функций на поверхностях // Укра. мат. журн. — 2003. — Т. 55, № 5. — С. 687–700.

К. І. Міщенко

Київський національний університет ім. Т. Шевченка, Київ
E-mail: mischenko.katya@gmail.com

О. О. Пришляк

Київський національний університет ім. Т. Шевченка, Київ
E-mail: prishlyak@yahoo.com

Топологічна класифікація некомпактних поверхонь з краєм

We give a topological classification of noncompact surfaces with a boundary

Ключові слова: *некомпактні поверхні, поверхні з краєм, топологічна класифікація*

Вступ. Теорема класифікації компактних поверхонь є одним з найважливіших результатів теорії компактних просторів. Перша спроба класифікувати некомпактні поверхні з'явилася у роботах Керекьярто (Німеччина, початок 20 століття) [1] та Річардса (США, 1961р.) [2], але було розглянуто лише випадок поверхонь без краю. При роботі з некомпактними поверхнями вводиться поняття ідеальної межі поверхні та її кінців. В роботах Керекьярто [1] висвітлено ключові моменти та особливості роботи з некомпактними многовидами, але повної класифікації некомпактних поверхонь не наведено. Далі, Ян Річардс (США, 1961р.) довів [2], що дві некомпактні поверхні є гомеоморфними тоді і тільки тоді, коли їх ідеальні межі топологічно еквівалентні. Також він довів, що будь-який диз'юнктний компактний сепарабельний простір є ідеальною межею деякої некомпактної поверхні. І досі актуальним є питання отримання топологічної

класифікації некомпактних поверхонь з краєм. В даній роботі дано повну топологічну класифікацію некомпактних поверхонь з довільним числом компонент краю. Окремо розглянуто випадок скінченної та нескінченної кількості компонент краю. Класифікуючи поверхні за їх типом орієнтованості та родом, можна описати характеристичні властивості ідеальних меж некомпактних поверхонь з довільним числом компонент краю.

Базуючись на результатах Керекьярто [1] та Річардса [2], основною задачею тут є класифікація некомпактних поверхонь з краєм. Некомпактні поверхні зі скінченим числом компонент краю та їх топологічна класифікація вивчались в роботі [3]. Узагальнення ситуації на довільне число компонент краю поверхні розглянуто в даній роботі, також тут дано топологічну класифікацію таких поверхонь.

1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ОЗНАЧЕННЯ

Означення 1. *Граничною компонентою, або кінцем поверхні, S називатимемо послідовність зв'язних необмежених відкритих множин в даній топології на S : $P_1 \supset P_2 \supset P_3 \supset \dots$ таких, що виконуються умови:*

- (1) *межа P_n в S є компактною для будь-якого $n \geq 1$;*
- (2) *для довільної компактної множини $A \subset S$ та достатньо великого n виконується: $P_n \cap A = \emptyset$.*

Означення 2. *Дві граничних компоненти $P_1 \supset P_2 \supset P_3 \supset \dots$ та $Q_1 \supset Q_2 \supset Q_3 \supset \dots$ називаються еквівалентними, якщо $\forall n \in \mathbb{N} \exists N$ таке, що $P_N \subset Q_n$ та навпаки.*

За даною компонентою $P_1 \supset P_2 \supset P_3 \supset \dots$ визначимо клас еквівалентності граничних компонент, який їй відповідає. Клас еквівалентності, який містить граничну компоненту $P_1 \supset P_2 \supset P_3 \supset \dots$, позначимо через p^* .

Означення 3. *Ідеальною межею, або множиною кінців $B(S)$ некомпактної поверхні S назвемо топологічний простір, елементами якого є побудовані вище класи еквівалентності граничних компонент в S .*

Означення 4. *Назвемо точку p^* планарною, якщо для всіх її достатньо малих відкритих околів U перетин $U \cap S$ гомеоморфний підмножині площини.*

Означення 5. *Назвемо точку p^* орієнтованою, якщо для всіх її достатньо малих відкритих околів U перетин $U \cap S$ орієнтований.*

Позначимо через $B(S)''$ підмножину всіх непланарних точок з $B(S)$, та через $B(S)'$ підмножину всіх неорієнтованих точок з $B(S)$. З означень зрозуміло, що $B(S)'$ та $B(S)''$ є відкритими підмножинами компактного цілком незв'язного метричного простору $B(S)$ та $B(S) \supset B(S)' \supset B(S)''$.

2. НЕКОМПАКТНІ ПОВЕРХНІ ЗІ СКІНЧЕННИМ ЧИСЛОМ КОМПОНЕНТ КРАЮ

Розглянемо некомпактні поверхні зі скінченим числом компонент краю. Компоненти краю можуть бути як компактними, так і некомпактними. Кола можна стягнути в точку або заклеїти диском. Інтервали можна представити у вигляді кіл, з яких відкинуто скінченне число точок; отримані кола заклеїти дисками, але на границях цих дисків потрібно відмітити відкинуті точки:

$$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$$

Таким чином, ми отримаємо поверхню без краю, до якої (за умов, що вихідні поверхні мають однакову кількість заклеєних дисків та на кожній границі таких дисків кількість виколотих точок скінченна та однакова) можна застосувати теорему Річардса [2]. У роботі [3] доведено теорему.

Теорема 1. *Диск з виколотою точкою на границі гомеоморфний диску із виколотим відрізком на границі.*

За результатами теореми 1.1 край вихідної некомпактної поверхні складається з дисків із виколотими точками на границі або з інтервалів.

Теорема 2. *Нехай q^* — кінець, що належить краю некомпактної поверхні N . Тоді існує точно дві граничні компоненти, які примикають до q^* , та для яких він є граничною точкою.*

За теоремою 1.2 всі відрізки з краю можна з'єднувати, в результаті отримавши коло. Оскільки для кожного кінця існує своя пара граничних компонент, то порядок з'єднання встановлено точно. З теорем 1.1 та 1.2 випливає, що компоненти краю та крайові кінці можна розбити на групи так, що одну групу складає циклічна послідовність, складена з кінців і компонентів краю, в якій два довільні сусідні елемента є компонента краю і граничний до неї кінець. Отриману послідовність граничних компонент та компонент краю називатимемо крайовим циклом. Стягнувши крайові цикли до точок або заклеївши їх дисками, ми отримаємо некомпактну поверхню без краю. Таким чином, класифікація некомпактних поверхонь зі скінченним числом компонент краю зводиться до класифікації некомпактних поверхонь без краю.

Теорема 3. *Дві некомпактні поверхні S_1 та S_2 із скінченним числом компонент краю є гомеоморфними тоді і тільки тоді, коли вони:*

- (1) *мають однакову кількість заклеєних дисків;*
- (2) *мають однакову (скінченну) кількість виколотих точок на кожній своїй границі;*
- (3) *мають однаковий рід та клас орієнтованості;*
- (4) *крім того, існує гомеоморфізм $B(S_1)$ на $B(S_2)$, який відображає $B'(S_1)$ та $B''(S_1)$ в $B'(S_2)$ та $B''(S_2)$ відповідно.*

Повне доведення теорем 1 – 3 наведено у роботах [3, 4].

3. НЕКОМПАКТНІ ПОВЕРХНІ З ДОВІЛЬНИМ ЧИСЛОМ КОМПОНЕНТ КРАЮ

Розглянемо некомпактні поверхні з довільним числом компонент краю. Для проведення класифікації перш за все потрібно класифікувати кінці, які лежать на краю.

Позначимо через C множину тих кінців, які лежать на краю поверхні. Множину C так само, як і $B(S)$ ми розбиваємо на підмножини непланарних та неорієнтованих кінців C' та C'' і розглядатимемо в подальшому пари (B, C) , (B', C') та (B'', C'') . Суміжними називатимемо такі два кінці, між якими знайдеться компонента краю, кінцями якої вони є. Будемо вважати, що кінці належать одному і тому ж класу еквівалентності, якщо їх можна попарно з'єднати між собою послідовністю суміжних кінців. У випадку нескінченної кількості компонент краю крайові цикли можуть бути нескінченними. Відношення еквівалентності граничних компонент на множинах C' та C'' вводиться так само, як для кінців на C . Таке відношення еквівалентності породжує фактор-простір $D = C/\sim$. Назвемо D множиною крайових циклів. Вона являє собою множину кіл з виколотими точками.

Лема 1. *Об'єднання крайових кінців можна представити як кола з вкладеними в них підмножинами канторової множини, що є множинами крайових кінців.*

Доведення. За побудовою множина крайових кінців є цілком незв'язною. Отже, вона гомеоморфна підмножині канторової множини. Лему доведено. \square

4. КЛАСИФІКАЦІЯ НЕКОМПАКТНИХ ПОВЕРХОНЬ З КРАЄМ

Використаємо наступну конструкцію. Нехай S — некомпактна сепарабельна поверхня з краєм. Компоненти краю α_k можна організувати у кола із виколотими точками. Відкинувши край поверхні S , отримуємо некомпактну поверхню без краю. Для класифікації таких поверхонь слід застосувати теорему

Річардса [2]: внутрішності поверхонь гомеоморфні та існують послідовності компактних замкнених поверхонь F_k , кожна наступна з яких містить попередню: $\forall k \geq 1 : F_k \subset F_{k+1}$.

Оскільки зв'язна компактна обмежена поверхня топологічно визначена орієнтованістю, родом і кількістю граничних кривих, то, пов'язавши кожен з компактних поверхонь F_k з компонентами α_k , ми отримуємо можливість класифікувати некомпактні поверхні з краєм: до кожної підповерхні F_k приклеїмо смужки, які будуть неперервно з'єднувати її з компонентою α_k (рис. 1).

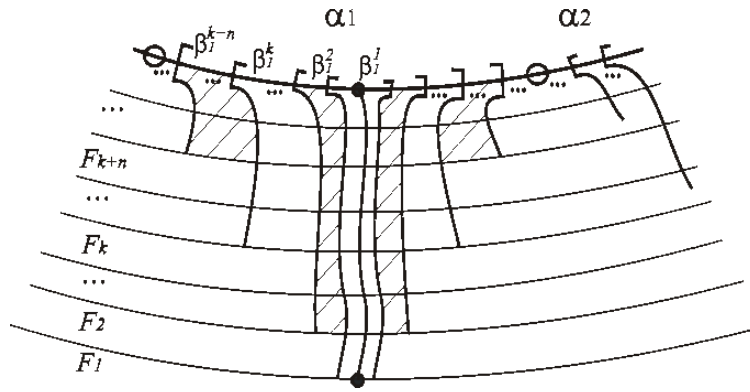


Рис. 1.

Оскільки на колі розміщені виколоті точки, то це коло можна представити границею послідовності об'єднань замкнених відрізків. Так, наприклад, для компоненти краю α_k існує

$$\{\beta_k^i, i \geq 1\} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \alpha_k.$$

Тоді існує послідовність об'єднань скінченного числа β_k^i :

$$\left\{ \bigcup_{k,i} \beta_k^i, i \geq 1 \right\}.$$

Фіксуючи номери цих відрізків, починаючи з найменшого, приклеювання проведемо в такий спосіб (рис. 1): з'єднаємо неперервним шляхом перший відрізок з першою (найменшою) підповерхнею F_1 . Вимагатимемо, щоб шлях перетинав край кожної поверхні F_k трансверсально в одній точці.

Щоб отримати поверхню з краєм, не порушуючи загальності, розширюємо цей шлях до замкненого околу. Для уникнення невизначеності в подальшому приклеюванні, перший раз точка на поверхні обирається довільним чином, а кожен наступний раз – у відповідності до побудованих множин D та D' . Неважко зробити так, щоб кожний наступний окіл шляху, що з'єднує чергову виколоту точку на колі з підповерхнею з відповідним номером, містив попередній. На кожному етапі приклеювання смужок ми маємо скінченну кількість відрізків.

Лема 2. *Нехай для певного k існує два шляхи γ_1 та γ_2 , що з'єднують поверхню F_k з відповідною компонентою краю. Тоді поверхні, отримані приклеюванням стрічок за цими шляхами є гомеоморфними.*

Доведення. За побудовою кожний шлях перетинає край трансверсально, тоді, не порушуючи загальності, можемо вважати, що шляхи γ_1 та γ_2 співпадають в деякому околі компоненти краю (рис. 2):

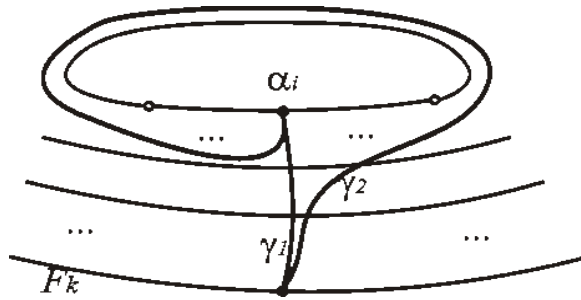


Рис. 2.

Отже, існує такий номер $n \in \mathbb{N}$, що шляхи γ_1 та γ_2 не будуть співпадати на $M = F_{k+n} \setminus F_n$. Це означає, що існує гомеоморфізм цієї множини на саму себе, який переводить γ_1 в γ_2 : $\varphi: M \rightarrow M: \varphi(\gamma_1) = \gamma_2$. Лему доведено. \square

Отже, між двома довільними виколотими точками на колі, кожен замкнений відрізок неперервним шляхом з'єднаний із відповідною підповерхнею F_k . Переходячи до границі, ми отримуємо вихідну некомпактну поверхню з краєм як границю компактних поверхонь з краєм.

Лема 3. Побудована в конструкції послідовність поверхонь з краєм з приклеєними смужками збігається до некомпактної поверхні S .

Доведення. Позначимо побудовану послідовність поверхонь з краєм з приклеєними смужками через F_k^\wedge . Тоді $\forall k \geq 1: F_k \subset F_k^\wedge$. А отже

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F_k \subset \lim_{k \rightarrow \infty} F_k^\wedge.$$

В свою чергу

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F_k^\wedge = \text{Int } S \subset \lim_{k \rightarrow \infty} F_k^\wedge.$$

За побудовою F_k^\wedge містить кожен компонент краю. Таким чином, об'єднання компонент краю з внутрішністю поверхні S і дає поверхню S . Лему доведено. \square

Якщо S_1 та S_2 — дві некомпактні сепарабельні поверхні з краєм, то, щоб встановити між ними гомеоморфізм, на поверхні S_1 всі шляхи слід будувати довільним чином з вимогою того, що якщо шлях виходить із краю поверхні F_k , то він повинен перетинати край кожної поверхні $F_n (n > k)$ трансверсально в одній точці, а на поверхні S_2 шляхи будуються наступним чином: перший — довільно, решта шляхів обирається так, щоб криволінійні чотирикутники, утворені частинами країв поверхонь F_k і частинами цього шляху та раніше побудованих шляхів, були границями областей, гомеоморфних відповідним

областям поверхні S_1 . Тобто, вони повинні мати однакове число кінців, ручок або листів Мьобіуса (рис. 3):

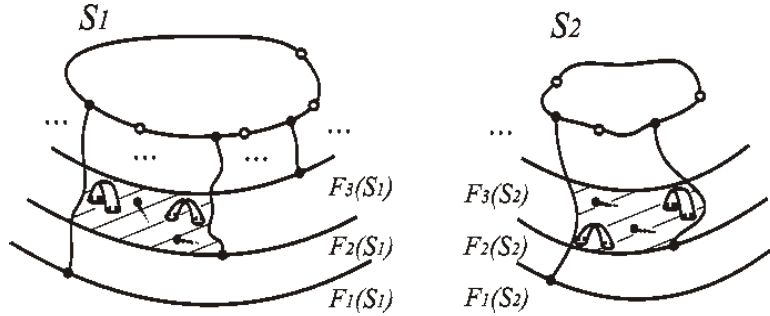


Рис. 3.

Теорема 4. *Некомпактні сепарабельні поверхні з краєм S_1 та S_2 є гомеоморфними між собою тоді і тільки тоді, коли вони мають однаковий рід, один клас орієнтованості та існує гомеоморфізм, який відображає $B(S_1)$ на $B(S_2)$, $D(S_1)$ на $D(S_2)$, $C(S_1)$ на $C(S_2)$, $B'(S_1)$ на $B'(S_2)$, $D'(S_1)$ на $D'(S_2)$, $C'(S_1)$ на $C'(S_2)$, $B''(S_1)$ на $B''(S_2)$, $D''(S_1)$ на $D''(S_2)$, $C''(S_1)$ на $C''(S_2)$.*

Доведення. Необхідність. Якщо некомпактні сепарабельні поверхні з краєм є гомеоморфними, то вони мають однаковий рід, один клас орієнтованості і існує гомеоморфізм, який відображає всі вказані множини однієї поверхні на такі ж самі множини іншої поверхні.

Достатність. Нехай є дві некомпактні сепарабельні поверхні з краєм S_1 та S_2 , які мають однаковий рід, один клас орієнтованості та існує гомеоморфізм, який відображає $B(S_1)$ на $B(S_2)$, $D(S_1)$ на $D(S_2)$, $C(S_1)$ на $C(S_2)$, $B'(S_1)$ на $B'(S_2)$, $D'(S_1)$ на $D'(S_2)$, $C'(S_1)$ на $C'(S_2)$, $B''(S_1)$ на $B''(S_2)$, $D''(S_1)$ на $D''(S_2)$, $C''(S_1)$ на $C''(S_2)$. Застосуємо до них конструкцію. За лемою 2 поверхні F_k^1 та F_k^1 є гомеоморфними, як і F_k^2 та F_k^2 . Тоді за лемою 3 послідовності $\{F_k^1, k \geq 1\} \rightarrow S_1$, $\{F_k^2, k \geq 1\} \rightarrow S_2$ та

$\forall k \geq 1 F_k \subset F_{k+1}$. Отже, існує $f_k : F_k^1 \rightarrow F_k^2$ та послідовність гомеоморфізмів $\{f_k, k \geq 1\}$ задає гомеоморфізм $f : S_1 \rightarrow S_2$, де $f = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k$. Теорему доведено. \square

Висновок. В даній роботі побудовано класифікацію некомпактних поверхонь з краєм з використанням результатів Керекьярто [1] та Річардса [2]. Детально розглянуто узагальнення ситуації на довільне число компонент краю поверхні. За допомогою впровадженної конструкції, доведено теорему 4, яка представляє топологічну класифікацію некомпактних поверхонь з довільним числом компонент краю. Основним результатом роботи є теорема про топологічну класифікацію некомпактних поверхонь з краєм (теорема 4). Дані результати можуть бути застосовані у комплексному аналізі та теорії гармонічних функцій.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] *Kerékjártó B.* Vorlesungen über Topologie // Verlag von Julius Berlin, Springer, 1923. – 270 p.
- [2] *Richards I.* On the classification of noncompact surfaces // Trans AMS. – 1963. – Vol.106, №2. – P. 259-269.
- [3] *Мищенко К.І., Пришляк О.О.* Класифікація некомпактних поверхонь зі скінченною кількістю компонент краю // Вісник Київ. ун-ту. Серія: Математика. Механіка. – 2004. – Вип. 11-12. – С. 89-91.
- [4] *Мищенко К. І., Пришляк О. О.* Повний топологічний інваріант функцій із скінченним числом особливостей на класичних некомпактних поверхнях // Вісник Київ. ун-ту. Серія: Математика. Механіка. – 2006. – Вип. 15-16. – С. 83-85.
- [5] *Ahlfors L. V., Sario L.* Riemann surfaces – N. J.: Princeton University Press, 1960. – 382 pp.
- [6] *Brahana H. R.* Systems of circuits on two-dimensional manifolds // Ann. Of Math. – 1921. – №23. – P. 144-168.

УДК 517.9

О. А. Сівак

Національний технічний університет України "КПІ"

Про існування неперервних при $t \in R$ розв'язків систем лінійних функціонально-різницевих рівнянь і їх властивості¹

For a system of linear difference equations, we establish conditions of the existence of its continuous solutions.

Розглянемо систему лінійних різницевих рівнянь вигляду

$$x(t+1) = Ax(t) + B(t)x(qt) + F(t), \quad (1)$$

де $t \in R$, $A, B(t)$ — дійсні $(n \times n)$ -матриці, $F(t)$ — дійсний вектор розмірності n , q — деяка дійсна стала. При різних припущеннях щодо матриць $A, B(t)$ і вектора $F(t)$ окремі класи таких систем рівнянь були основним об'єктом досліджень багатьох математиків (див. [1–9] і наведену в них літературу) і в даний час цілий ряд питань їх теорії досить детально вивчені. Особливо це стосується питань існування різного роду (аналітичних, неперервних тощо) розв'язків і дослідження їх властивостей. В даній статті продовжується дослідження структури множини розв'язків системи рівнянь вигляду (1). Зокрема, встановлюються умови існування неперервних розв'язків таких систем.

Розглянемо спочатку систему рівнянь вигляду

$$x(t+1) = Ax(t) + Bx(qt), \quad (2)$$

¹Робота частково підтримана проектом Ф 25.1/021

де A, B — дійсні сталі $(n \times n)$ -матриці, q — дійсна стала, і припустимо, що власні значення λ_i матриці A задовольняють умову:

$$0 < \lambda_i < 1, \quad i = 1, \dots, m \leq n.$$

В цьому випадку, як відомо, за допомогою заміни змінних

$$x(t) = Cy(t),$$

де C — деяка стала неособлива $(n \times n)$ -матриця, систему рівнянь (2) можна привести до вигляду

$$y(t+1) = \Lambda y(t) + \tilde{B}y(qt), \quad (3)$$

де $\Lambda = \text{diag}(\Lambda_1, \dots, \Lambda_m)$, $m \leq n$, Λ_i — $(k_i \times k_i)$ -матриці вигляду

$$\Lambda_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & \varepsilon & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \varepsilon & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{pmatrix}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad \sum_{i=1}^m k_i = n, \quad (4)$$

ε — достатньо мала додатна стала, $\tilde{B} = C^{-1}BC$.

Дослідимо систему рівнянь (3) при $t \geq 0$ у випадку, коли виконуються умови:

- 1) $0 < \lambda_i < 1$, $i = 1, \dots, m$, $q > 1$;
- 2) $\lambda_* > \lambda^{*q}$, $\Delta = \frac{\tilde{b}}{\lambda_* - \lambda^{*q}} < 1$, де

$$\tilde{b} = |\tilde{B}| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |\tilde{b}_{ij}|,$$

$$\lambda_* = \min\{\lambda_i, i = 1, \dots, m\}, \quad \lambda^* = \max\{\lambda_i, i = 1, \dots, m\}.$$

Покажемо, що ця система має розв'язки у вигляді ряду

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t), \quad (5)$$

де $y_i(t)$, $i = 0, 1, \dots$, — деякі неперервні вектор-функції. Підставляючи (5) в (3), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i(t+1) = \Lambda \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t) + \tilde{B} \sum_{i=0}^{\infty} y_i(qt).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо вектор-функції $y_i(t)$, $i = 0, 1, \dots$, є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$y_0(t+1) = \Lambda y_0(t), \quad (6_0)$$

$$y_i(t+1) = \Lambda y_i(t) + \tilde{B} y_{i-1}(qt), \quad i = 1, 2, \dots, \quad (6_i)$$

то ряд (5) буде формальним розв'язком системи рівнянь (3).

Дослідження системи рівнянь (6₀) зводиться до дослідження m підсистем рівнянь вигляду

$$y_0^i(t+1) = \Lambda_i y_0^i(t), \quad i = 1, \dots, m, \quad m \leq n, \quad (6_i^i)$$

де $y_0^i = (y_{k_1}^i, \dots, y_{k_i}^i)$, $i = 1, \dots, m$. Згідно з умовою 1 та з врахуванням (4) можна показати, що при достатньо малих ε існують додатні сталі α_* , α^* такі, що $\alpha_* < 1$, $\alpha^* < 1$, $|\Lambda^{-1}| \leq \alpha_*^{-1}$, $|\Lambda| \leq \alpha^*$ і має місце умова

$$2') \alpha_* > \alpha^{*q}, \quad \tilde{\Delta} = \frac{\tilde{b}}{\alpha_* - \alpha^{*q}} < 1.$$

Використовуючи представлення загального неперервного розв'язку системи (6₀) і умову 1, можна показати, що існує додатна стала M така, що при всіх $t \geq 0$ виконується оцінка

$$|y_0(t)| \leq M \alpha^{*t}. \quad (7_0)$$

Оскільки ряди

$$y_i(t) = - \sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^{-(j+1)} \tilde{B} y_{i-1}(q(t+j)), \quad i = 1, 2, \dots, \quad (7_i)$$

є формальними розв'язками відповідних систем рівнянь (6_i), $i = 1, 2, \dots$, (в цьому можна переконатися безпосередньою підстановкою (7_i), $i = 1, 2, \dots$, в (6_i), $i = 1, 2, \dots$), то приймаючи до уваги (7₀) і умови 1, 2' покажемо, що ряди (7_i), $i = 1, 2, \dots$,

рівномірно збігаються до деяких неперервних вектор-функцій $y_i(t)$, $i = 1, 2, \dots$, для яких при всіх $i \geq 1$, $t \geq 0$ має місце оцінка

$$|y_i(t)| \leq M \tilde{\Delta}^i \alpha^{*qt}. \quad (8)$$

Справді, враховуючи (7₀), (7₁) і $|\Lambda^{-1}| < \alpha_*^{-1}$, отримуємо

$$\begin{aligned} |y_1(t)| &\leq \sum_{j=0}^{\infty} |\Lambda^{-1}|^{j+1} |\tilde{B}| |y_0(q(t+j))| \leq \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_*^{-(j+1)} \tilde{b} M \alpha^{*q(t+j)} \leq M \tilde{b} \alpha_*^{-1} \alpha^{*qt} \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha_*^{-1} \alpha^{*q})^j \leq \\ &\leq M \frac{\tilde{b}}{\alpha_* (1 - \alpha_*^{-1} \alpha^{*q})} \alpha^{*qt} \leq M \frac{\tilde{b}}{\alpha_* - \alpha^{*q}} \alpha^{*qt} = M \tilde{\Delta} \alpha^{*qt}, \end{aligned}$$

тобто оцінка (8) має місце при $i = 1$. Міркуючи за індукцією, припустимо, що оцінка (8) вже доведена для деякого $i \geq 1$, і покажемо, що вона не зміниться при переході від i до $i + 1$. Згідно з (7 _{$i+1$}) і (8) маємо

$$\begin{aligned} |y_{i+1}(t)| &\leq \sum_{j=0}^{\infty} |\Lambda^{-1}|^{j+1} |\tilde{B}| |y_i(q(t+j))| \leq \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_*^{-(j+1)} \tilde{b} M \tilde{\Delta}^i \alpha^{*q(q(t+j))} \leq \\ &\leq M \tilde{\Delta}^i \tilde{b} \alpha_*^{-1} \alpha^{*q^2 t} \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha_*^{-1} \alpha^{*q^2})^j \leq \\ &\leq M \tilde{\Delta}^i \tilde{b} \alpha_*^{-1} \alpha^{*qt} \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha_*^{-1} \alpha^{*q})^j \leq \\ &\leq M \tilde{\Delta}^i \frac{\tilde{b}}{\alpha_* - \alpha^{*q}} \alpha^{*qt} = M \tilde{\Delta}^{i+1} \alpha^{*qt}. \end{aligned}$$

Отже, оцінка (8) виконується при всіх $i \geq 1$, $t \geq 0$. Звідси випливає, що ряди (7 _{i}), $i = 1, 2, \dots$, рівномірно збігаються при

$t \geq 0$ до деяких неперервних вектор-функцій $y_i(t)$, $i = 1, 2, \dots$, для яких має місце оцінка (8). В силу (8) ряд (5) рівномірно збігається при $t \geq 0$ до деякої неперервної вектор-функції $y(t)$, яка є розв'язком системи рівнянь (3) і задовольняє умову

$$|y(t)| \leq \frac{M}{1 - \widetilde{\Delta}} \alpha^{*t}.$$

Звідси безпосередньо випливає, що

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0.$$

Цим самим доведена така теорема.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови 1, 2. Тоді система рівнянь (3) має сім'ю неперервних обмежених при $t \geq 0$ розв'язків, що залежить від довільної неперервної 1-періодичної вектор-функції $\omega(t)$.*

Розглянемо тепер систему неоднорідних рівнянь вигляду

$$y(t+1) = \Lambda y(t) + \widetilde{B}y(qt) + F(t), \quad (9)$$

де матриці Λ , \widetilde{B} задовольняють умови теореми 1, а

$$F(t) : R \rightarrow R^n.$$

Має місце теорема.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови*

- 1) $0 < \lambda_i < 1$, $i = 1, \dots, m$, $q > 1$;
- 2) $\frac{\widetilde{b}}{1 - \alpha^*} = \theta < 1$;
- 3) *всі елементи вектор-функції $F(t)$ є неперервними обмеженими при всіх $t \in R$ функціями і*

$$\sup_t |F(t)| = \overline{M} < \infty.$$

Тоді система рівнянь (9) має неперервний обмежений при $t \in R$ розв'язок у вигляді ряду

$$\bar{y}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t), \quad (10)$$

де $\bar{y}_i(t)$, $i = 0, 1, \dots$, — деякі неперервні обмежені при $t \in R$ вектор-функції.

Доведення. Підставляючи (10) в (9), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t+1) = \Lambda \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t) + \tilde{B} \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(qt) + F(t).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо вектор-функції $\bar{y}_i(t)$, $i = 0, 1, \dots$, є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$\bar{y}_0(t+1) = \Lambda \bar{y}_0(t) + F(t), \quad (11_0)$$

$$\bar{y}_i(t+1) = \Lambda \bar{y}_i(t) + \tilde{B} \bar{y}_{i-1}(qt), \quad i = 1, 2, \dots, \quad (11_i)$$

то ряд (10) є формальним розв'язком системи рівнянь (8).

Приймаючи до уваги умови теореми можна переконатися, що ряд

$$\bar{y}_0(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda^{j-1} F(t-j) \quad (12_0)$$

рівномірно збігається при всіх $t \in R$, задовольняє систему рівнянь (11₀) і виконується оцінка

$$|\bar{y}_0(t)| \leq \frac{\bar{M}}{1 - \alpha^*} = \bar{M}'. \quad (13_0)$$

Враховуючи (13₀), послідовно можна показати, що ряди

$$\bar{y}_i(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda^{j-1} \tilde{B} \bar{y}_{i-1}(q(t-j)), \quad i = 1, 2, \dots, \quad (12_i)$$

рівномірно збігаються при $t \in R$, задовольняють відповідні системи рівнянь (11_{*i*}), $i = 1, 2, \dots$, і для них мають місце оцінки

$$|\bar{y}_i(t)| \leq \bar{M}' \theta^i, \quad i = 1, 2, \dots \quad (13_i)$$

Таким чином, оскільки вектор-функції $\bar{y}_i(t)$, $i = 0, 1, \dots$, що визначаються за допомогою співвідношень (12_i), $i = 0, 1, \dots$, задовольняють умови (13_i), $i = 0, 1, \dots$, то ряд (10) рівномірно збігається при $t \in R$ до деякої неперервної вектор-функції $\bar{y}(t)$, яка є розв'язком системи рівнянь (9) і задовольняє умові

$$|\bar{y}(t)| \leq \frac{\bar{M}}{1 - \theta}.$$

Теорема 2 доведена. \square

Зауваження. Виконуючи в (9) заміну змінних

$$y(t) = z(t) + \bar{y}(t), \quad (14)$$

отримаємо систему рівнянь (3) відносно вектор-функції $z(t)$. Оскільки для цієї системи рівнянь має місце теорема 1, то приймаючи до уваги заміну змінних (14), умови теореми 2, можна побудувати сім'ю неперервних обмежених при $t \in R^+$ розв'язків $y(t)$ системи рівнянь (9), для яких справедливе співвідношення

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |y(t) - \bar{y}(t)| = 0.$$

Дослідимо тепер структуру множини неперервних розв'язків системи рівнянь (9) у випадку, коли $\tilde{B} = \tilde{B}(t)$, тобто розглянемо систему рівнянь

$$y(t+1) = \Lambda y(t) + \tilde{B}(t)y(qt) + \tilde{F}(t), \quad (15)$$

де $\Lambda = \text{diag}(\Lambda_1, \dots, \Lambda_m)$, $m \leq n$, $\Lambda_i - (k_i \times k_i)$ -матриці, $i = 1, \dots, m$, $\sum_{i=1}^m k_i = n$, q -деяка стала, $\tilde{B}(t) : R \rightarrow R^{n^2}$, $\tilde{F}(t) : R \rightarrow R^n$.

Має місце така теорема.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови*

- 1) $0 < \lambda_i < 1$, $i = 1, \dots, m$, $q > 1$;
- 2) *всі елементи матриці $\tilde{B}(t)$ і вектор-функції $\tilde{F}(t)$ є неперервними обмеженими при всіх $t \in R$ функціями і*
 $\sup_t |\tilde{B}(t)| = b^*$, $\sup_t |\tilde{F}(t)| = f^*$;

$$3) \frac{b^*}{1 - \alpha^*} = \theta^* < 1.$$

Тоді система рівнянь (15) має неперервний обмежений при $t \in R$ розв'язок у вигляді ряду

$$\tilde{y}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{y}_i(t), \quad (16)$$

де $\tilde{y}_i(t)$, $i = 0, 1, \dots$, — деякі неперервні обмежені при $t \in R$ вектор-функції.

Доведення. Дійсно, підставляючи (16) в (15), одержуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} \tilde{y}_i(t+1) = \Lambda \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{y}_i(t) + \tilde{B}(t) \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{y}_i(qt) + \tilde{F}(t).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо вектор-функції $\tilde{y}_i(t)$, $i = 0, 1, \dots$, є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$\tilde{y}_0(t+1) = \Lambda \tilde{y}_0(t) + \tilde{F}(t), \quad (17_0)$$

$$\tilde{y}_i(t+1) = \Lambda \tilde{y}_i(t) + \tilde{B}(t) \tilde{y}_{i-1}(qt), \quad i = 1, 2, \dots, \quad (17_i)$$

то ряд (16) є формальним розв'язком системи рівнянь (15).

В силу умов теореми ряд

$$\tilde{y}_0(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda^{j-1} \tilde{F}(t-j) \quad (18_0)$$

рівномірно збігається при $t \in R$ до деякого неперервного розв'язку системи рівнянь (17₀), який задовольняє умову

$$|\tilde{y}_0(t)| \leq \frac{f^*}{1 - \alpha^*} = \tilde{f}^*. \quad (19_0)$$

Приймаючи до уваги (17_i), $i = 1, 2, \dots$, умови теореми і співвідношення (19₀), можна послідовно показати, що ряди

$$\tilde{y}_i(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda^{j-1} \tilde{B}(t-j) \tilde{y}_{i-1}(q(t-j)), \quad i = 1, 2, \dots, \quad (18_i)$$

рівномірно збігаються при $t \in R$ до деяких неперервних вектор-функцій $\tilde{y}_i(t)$, $i = 1, 2, \dots$, які є розв'язками відповідних систем рівнянь (17_i), $i = 1, 2, \dots$, і задовольняють умови

$$|\tilde{y}_i(t)| \leq \tilde{f}^* \theta^{*i}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (19_i)$$

Приймаючи до уваги співвідношення (19_i), $i = 0, 1, \dots$, і умови теореми, приходимо до висновку, що ряд (16) рівномірно збігається до деякої неперервної при $t \in R$ вектор-функції $\tilde{y}(t)$, яка є розв'язком системи рівнянь (15) і задовольняє умові

$$|\tilde{y}(t)| \leq \frac{\tilde{f}^*}{1 - \theta^*}.$$

Теорема 3 доведена. □

Виконуючи в (15) взаємно-однозначну заміну змінних

$$y(t) = z(t) + \tilde{y}(t), \quad (20)$$

отримаємо систему рівнянь

$$z(t+1) = \Lambda z(t) + \tilde{B}(t)z(qt), \quad (21)$$

для якої має місце така теорема.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови 1, 2 теореми 3 і умова*

$$3) \frac{b^*}{\alpha_* - \alpha^{*q}} = \tilde{\theta}^* < 1.$$

Тоді система рівнянь (21) має сім'ю неперервних обмежених при $t \in R^+$ розв'язків, які задовольняють умову

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) = 0.$$

Доведення теореми проводиться за тією ж схемою, що і доведення теореми 1.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] *Birkhoff G.D.* General theory of linear difference equations // *Trans. Amer. Math. Soc.* - 1911. - 12. - P. 243–284.
- [2] *Birkhoff G.D.* Formal theory of irregular linear difference equations // *Acta Math.* - 1930. - 54. - P. 205–246.
- [3] *Trjitzinsky W.J.* Analytic theory of linear q -difference equations // *Acta Math.* - 1933. - 61. - P. 1–38.
- [4] *Adams C.R.* On the irregular cases of linear ordinary difference equations // *Trans. Amer. Math. Soc.* - 1928. - 30. - № 3. - P. 507–541.
- [5] *Carmichael R.D.* linear difference equations and their analytic solutions // *Trans. Amer. Math. Soc.* - 1911. - 12. - P. 99–134.
- [6] *Кuczma М.* Functional equations in a single variable. - *Warsawa*, 1968.
- [7] *Миромлобов А.А., Солдатов М.А.* Линейные неоднородные разностные уравнения. - М.: Наука, 1986. - 128 с.
- [8] *Шарковский А.Н., Майстренко Ю.Л., Романенко Е.Ю.* Разностные уравнения и их приложения, Киев: Наук. думка, 1986ю - 280 с.
- [9] *Пелюх Г.П.* К теории систем линейных разностных уравнений с непрерывным аргументом // Докл. РАН. - 2006. - Т. 407, № 5. - С. 600–603.

515.164.174

І. А. Юрчук

Институт математики НАН України
E-mail: iyurch@ukr.net

РРО- та РСО-еквівалентності неперервних відображень, заданих на $S^1 \vee S^1$

Let $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ be a circle, $S^1 \vee S^1 = (S^1 \amalg S^1)/\sim$, $x_0 \sim y_0$ a topological space with a fix point and $f : S^1 \vee S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ a continuous function with a finite number of local extrema. We will consider two different types of equivalency of such functions and for both of them necessary and sufficient conditions for functions to be equivalent will be obtained.

Ключові слова: *РРО- and РСО-equivalences, a continuous function, a local extremum*

1. ВСТУП

В багатьох роботах, що стосуються питань класифікації функцій, потоків тощо на многовидах чи інших топологічних просторах, одним з основних способів доведення критерію є побудова інваріанту, який містить основну інформацію про досліджуваний об'єкт [1–6].

В даній роботі розглядаємо неперервні функції, що задані на букеті двох кіл зі скінченним числом локальних екстремумів, та отримуємо критерії для деяких типів їх еквівалентностей.

Нехай задано (S^1, x_0) та (S^1, y_0) , де

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

© І. А. Юрчук, 2009

Розглядаємо топологічний простір з відміченою точкою

$$S^1 \vee S^1 = (S^1 \amalg S^1) / \sim, \quad x_0 \sim y_0,$$

будемо його позначати через \mathcal{S} , а точку – через a . Далі, для даного простору будемо розрізняти кола (S_1^1, a) і (S_2^1, a) та зафіксуємо на \mathcal{S} деяку орієнтацію.

Нехай $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ – деяка неперервна функція зі скінченним числом локальних екстремумів. Нагадаємо, що точка $x_0 \in X$ називається точкою локального мінімуму (максимуму) функції $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, якщо $\forall x \in U(x_0), x \neq x_0$, справедливо $f(x) > f(x_0)$ ($f(x) < f(x_0)$). Значення функції в локальних екстремумах будемо називати критичними.

Відмітимо той факт, що точка a буде локальним екстремумом функції f лише у випадку, коли a є локальним екстремумом для кожної з функцій $f|_{S_1^1}$ та $f|_{S_2^1}$.

Означення 1. *Неперервні відображення $f, g : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ називаються PPO-еквівалентними, якщо існують гомеоморфізми $h_1 : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ та $h_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, які зберігають орієнтацію і такі, що $f = h_2^{-1} \circ g \circ h_1$ та $S_i^1 = h_1^{-1}(g^{-1}(h_2(f(S_i^1))))$, де $i = 1, 2$.*

Означення 2. *Неперервні відображення $f, g : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ називаються PCO-еквівалентними, якщо існують гомеоморфізми $h_1 : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ та $h_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такі, що $f = h_2^{-1} \circ g \circ h_1$ та $S_i^1 = h_1^{-1}(g^{-1}(h_2(f(S_i^1))))$, де $i = 1, 2$.*

Із даних означень випливає, що *PPO*-еквівалентні функції є *PCO*-еквівалентними, але не навпаки.

2. ПОПЕРЕДНІ ВІДОМОСТІ З КОМБІНАТОРИКИ

Сформулюємо означення деяких комбінаторних об'єктів. Нагадаємо [5], що змією типу R_m^n називається послідовність додатних цілих чисел x_i , які задовольняють умови: $x_0 < x_1 > x_2 < \dots < x_n$, де $0 \leq x_i \leq m$, $m < n$ і $\forall k, k \in \{0, \dots, m\}$ існує принаймні одне значення $i, i \in \{0, \dots, n\}$ таке, що $x_i = k$.

У Табл.1 наведено значення кількостей різних R_m^n -змій.

ТАБЛ. 1. Значення кількості R_m^n -змій.

$m \setminus n$	1	2	3	4	5
1	2	2	2	2	2
2		2	8	16	29
3			5	34	113
4				16	162
5					61

Означення 3. Змією типу β називається послідовність додатних цілих чисел x_i , що задовольняють умови: $x_0 < x_1 > \dots > x_n$, де $0 \leq x_i \leq m$, $n, m \in \mathbb{N}$.

Означення 4. Монотонним відрізком в послідовності $\Delta = (i_1, \dots, i_n)$ називається максимальний відрізок, на якому послідовність спадає або зростає:

$$(i_{a-1} <)i_a > i_{a+1} > \dots > i_b (< i_{b+1}),$$

або

$$(i_{a-1} >)i_a < i_{a+1} < \dots < i_b (> i_{b+1})$$

(випадки $a = 1$ і $b = n$ також можливі), де $i_j \in \{0, 1, \dots, m\}$, $n, m \in \mathbb{N}$.

Далі монотонний відрізок будемо позначати через $\Delta(a, b)$.

Означення 5. Узагальненою змією $G(n, m)$ називається послідовність додатних цілих чисел x_i , що задовольняють умови: $x_0 \neq x_1 \neq \dots \neq x_n$, де $0 \leq x_i \leq m$, $n, m \in \mathbb{N}$.

Згідно з означенням змія $G(n, m)$ має два типи складових: β - змії та відрізки $\Delta(a, b)$.

3. УМОВИ PPO- ТА PCO-ЕКВІВАЛЕНТНОСТЕЙ

Оскільки \mathcal{S} є букетом двох кіл, на яких зафіксовано орієнтацію, то було б природно, скориставшись роботою [5], де проведена топологічна класифікація неперервних функцій на

колі, отримати *PPO*- та *PCO*-класифікацію для відображень $S \rightarrow \mathbb{R}$. Проте, у випадку кола з відміченою точкою, його інваріантом, взагалі кажучи, не буде змія (на Рис.1 наведено простий приклад двох функцій, де проілюстровано два випадки, для одного з яких фіксована точка x є регулярною, а тому інваріант не є змією).

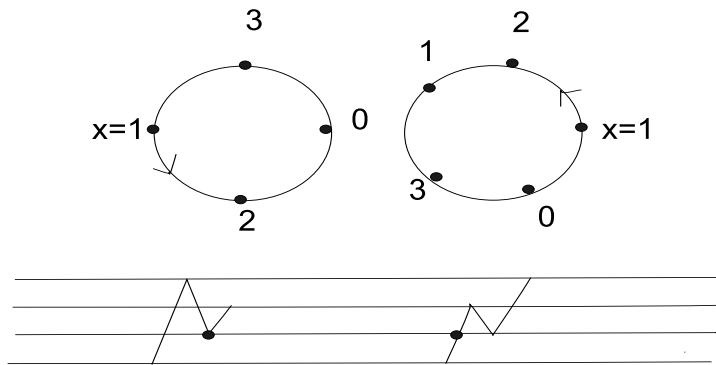


Рис. 7. Функції на колі з відміченою точкою x .

3.1. *PPO*-еквівалентність. Перш ніж сформулювати критерій *PPO*-еквівалентності функцій, заданих на S , побудуємо їх комбінаторний інваріант.

Побудова інваріанту. Нехай $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ – неперервна функція зі скінченим числом локальних екстремумів, в яких функція приймає k різних значень. На колі S_1^1 , починаючи з першого локального екстремума від точки a в заданому напрямі, позначимо локальні екстремуми через $x_1^1, x_2^1, \dots, x_{n_1}^1$. Далі, по аналогії, для кола S_2^1 отримаємо $x_1^2, x_2^2, \dots, x_{n_2}^2$. Об'єднаємо їх, додавши точку a , та утворимо послідовність

$$x_1^1, \dots, x_{n_1}^1, a, x_1^2, \dots, x_{n_2}^2.$$

Наступний крок, розглянемо значення функції

$$y_0 = f(x_1^1), \dots, y_{n_1-1} = f(x_{n_1}^1),$$

$$y_{n_1} = f(a), y_{n_1+1} = f(x_1^2), \dots, y_n = f(x_{n_2}^2).$$

Зрозуміло, що випадок, коли $y_i = y_{i+1}$, $i = \overline{0, n-1}$, виключено, оскільки f є неперервною функцією і згідно з теоремою Ролля між точками $f^{-1}(y_i)$ та $f^{-1}(y_{i+1})$ повинен лежати локальний екстремум, що неможливо. Тому значення y_i , $i = \overline{0, n}$, задовольняють таку систему нерівностей: $y_0 \neq y_1 \neq \dots \neq y_n$. Задамо відображення $y_i \rightarrow z_i$, де $z_i \in [0, 1, \dots, k-1]$ і z_i дорівнює числу значень y_l таких, що $y_l < y_i$. Числа z_i утворюють узагальнену змію $G(n, k-1)$. Останній крок побудови: відмітимо на $G(n, k-1)$ значення z_{n_1} . Утворений інваріант — узагальнена змія з відміченою точкою, для заданої функції f будуватиметься однозначно, що зумовлено зафіксованими порядком кіл $S_1^1 \vee S_2^1$ та орієнтацією.

Теорема 1. *Дві функції $f, g : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ є PPO-еквівалентними тоді і лише тоді, коли їм відповідає одна й та ж узагальнена змія $G(n, m)$ з відміченою точкою.*

Доведення. Необхідність. Доведення випливає з побудови інваріанту для функцій $f, g : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$.

Достатність. Нехай функціям f та g відповідає деяка змія $G(n, m)$ з відміченою точкою, доведемо, що функції f та g є PPO-еквівалентними. З умови випливає, що число локальних екстремумів колах S_1^1 та S_2^1 для кожної з функцій f та g співпадає, позначимо їх через k_1 та k_2 відповідно. Нехай функції f (g) на колі S_1^1 , починаючи з a (відміченої точки) та рухаючись за орієнтацією, відповідає послідовність локальних екстремумів $x_1^1, \dots, x_{k_1}^1$ ($y_1^1, \dots, y_{k_1}^1$). Аналогічно, на S_2^1 отримаємо $x_1^2, \dots, x_{k_2}^2$ ($y_1^2, \dots, y_{k_2}^2$). Відповідно побудові змії, існують відображення $\varphi_1 : f(x_i^j) \rightarrow z_i$ та $\varphi_2 : g(y_i^j) \rightarrow z_i$ (а також $\varphi_1 : f(a) \rightarrow z_l$ та $\varphi_2 : g(a) \rightarrow z_l$), де $j = 1, 2$, z_l — ціле додатне число і елемент змії $G(n, m)$. Позначимо через α_i^j (β_i^j) дугу

кола S_j^1 між локальними екстремумами x_i^j та x_{i+1}^j (y_i^j та y_{i+1}^j). Дані відображення можна легко продовжити до гомеоморфізмів $\tilde{\varphi}_1 : \alpha_i^j \rightarrow z_l z_{l+1}$ та $\tilde{\varphi}_2 : \beta_i^j \rightarrow z_l z_{l+1}$, де $z_l z_{l+1}$ – дуга змії $G(n, m)$ між точками z_l та z_{l+1} . Зрозуміло, що отримані гомеоморфізми зберігають орієнтацію, яка задана на кожному з кіл букету.

Нехай відрізок $[a, b] \in \mathbb{R}$ – множина значень функції f , а $[c, d] \in \mathbb{R}$ – функції g . Побудуємо гомеоморфізм

$$h_2 : [a, b] \rightarrow [c, d]$$

такий, що зберігає орієнтацію та задається такою формулою:
 $h_2(t) = c + \frac{t-a}{b-a}(d-c)$.

Зі сказаного вище випливає, що $f = h_2^{-1} \circ g \circ \tilde{\varphi}_2^{-1} \circ \tilde{\varphi}_1$ та

$$S_i^1 = \tilde{\varphi}_1^{-1}(\tilde{\varphi}_2(g^{-1}(h_2(f(S_i^1))))),$$

де $i = 1, 2$. □

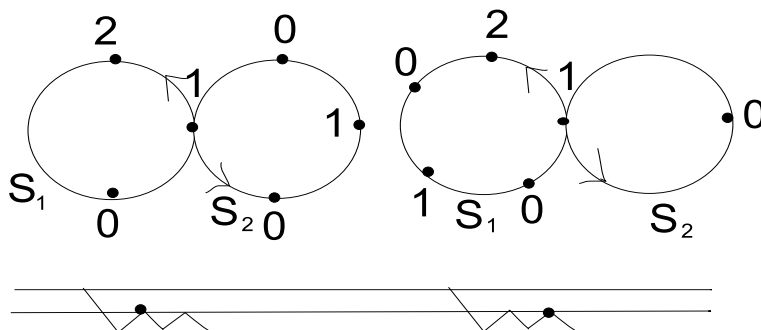


Рис. 8. *PPO*-нееквівалентні функції.

Нехай $G(m, n)$ – деяка змія з відміченою точкою x . Зрозуміло, що $G(m, n)$ складається з β -змій та $\Delta(a, b)$ відрізка. Позначимо складові даної змії через g_1 та g_2 , відповідно до та після відміченої точки. Припустимо, що g_1 містить k_1 елемент і $x \notin g_1$ та g_2 містить k_2 елементів і $x \notin g_2$, причому $k_1 + k_2 + 1 = n$. Слід зауважити, що g_1 та g_2 є зміями, в той час як x може належати деякому монотонному відрізку $\Delta(a, b)$. Нехай елементи з g_1 приймають m_1 різних значень, а елементи з g_2 приймають m_2 різних значень, причому $m_1 + m_2 \leq m$. Позначимо через $\delta_{k_1, k_2}(m_1, m_2)$ кількість $G(m, n)$ -змій. Тоді в даних позначеннях справедлива наступна оцінка:

$$(1) \quad \delta_{k_1, k_2}(m_1, m_2) < C_m^{m_1} R_{m_1-1}^{k_1-1} C_m^{m_2} R_{m_2-1}^{k_2-1}.$$

Нерівність (1) дає оцінку кількості PPO-нееквівалентних функцій таких, що S_1^1 містить k_1 локальних екстремумів, які приймають m_1 різних значень, і S_2^1 містить k_2 локальних екстремума, в яких функція приймає m_2 різних значень, де $m_1 \leq k_1$ та $m_2 \leq k_2$.

3.2. PPO-еквівалентність. Нехай $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ – деяка функція, що задовольняє такі умови:

- f є неперервною та має скінченне число локальних екстремумів;
- функції $f|_{S_1^1}$ та $f|_{S_2^1}$ мають точно один глобальний мінімум або максимум $x' \in S_1^1$, $x'' \in S_2^1$ та $f(x') \neq f(x'')$.

Побудова інваріанту. Починаючи з глобального мінімуму чи максимуму (а у випадку, коли один глобальний мінімум та один глобальний максимум, для однозначності будемо починати з мінімуму), що відповідає функції на колі S_1^1 , рухаючись по дузі кола в обох напрямках до точки a , позначимо локальні екстремуми та утворимо послідовності $x', x_1^1, x_2^1, \dots, x_{n_1}^1$, a та $x', x_1^2, x_2^2, \dots, x_{n_2}^2$. Аналогічно, для кола S_2^1 , отримаємо наступні дві послідовності $x'', x_1^3, x_2^3, \dots, x_{n_3}^3$, a та $x'', x_1^4, x_2^4, \dots, x_{n_4}^4$, a .

Далі, розглянемо значення функції

$$\begin{aligned} (y_0^1 = f(x'), y_1^1 = f(x_1^1), \dots, y_{n_1+2}^1 = f(a)), \\ (y_0^2 = f(x'), y_1^2 = f(x_1^2), \dots, y_{n_2+2}^2 = f(a)), \\ (y_0^3 = f(x''), y_1^3 = f(x_1^3), \dots, y_{n_3+2}^3 = f(a)), \\ (y_0^4 = f(x''), y_1^4 = f(x_1^4), \dots, y_{n_4+2}^4 = f(a)). \end{aligned}$$

Зрозуміло, що випадок, коли $y_i^j = y_{i+1}^j$, $j = \overline{1, 4}$, неможливий. Тому значення y_i , $i = \overline{0, n}$, задовольняють таку систему нерівностей $y_0^j \leq y_1^j \geq \dots$. Задамо відображення $y_i^j \rightarrow z_i^j$, де $z_i^j \in \mathbb{Z}^+$ і z_i^j дорівнює числу значень y_l^j , по всіх можливих значеннях числа j , таких, що $y_l^j < y_i^j$. Для кожного j числа z_i^j утворюють узагальнену змію $G_j(n_j, k_j)$. Оскільки

$$y_{n_1+2}^1 = y_{n_2+2}^2 = y_{n_3+2}^3 = y_{n_4+2}^4 = f(a),$$

ототожнимо значення

$$z_{n_1+2}^1 \sim z_{n_2+2}^2 \sim z_{n_3+2}^3 \sim z_{n_4+2}^4.$$

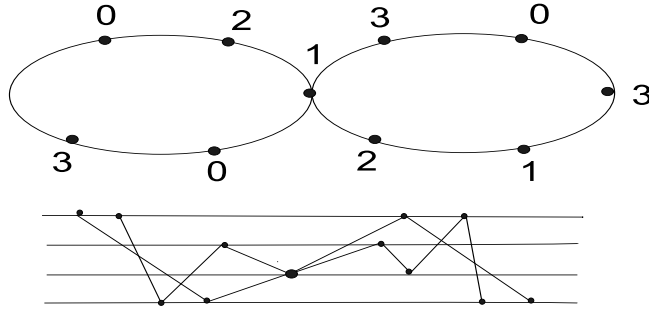
Позначимо отриманий інваріант через $Sp(f)$. Відмітимо, що дана конструкція схожа на "павука" (Рис.3): чотири змії, які мають спільну точку. Даний інваріант будується однозначно, що зумовлено розрізненням кіл $S_1^1 \vee S_2^1$ та умовами, що накладаються на функцію.

Означення 6. Нехай $Sp(f)$ складається з набору узагальнених змій $G_1(n_1, k_1)$, $G_2(n_2, k_2)$, $G_3(n_3, k_3)$ та $G_4(n_4, k_4)$, а $Sp(g)$ — з $G'_1(n_1, k_1)$, $G'_2(n_2, k_2)$, $G'_3(n_3, k_3)$ та $G'_4(n_4, k_4)$, відповідно. Скажемо, що $Sp(f)$ та $Sp(g)$ є ізоморфними,

$$Sp(f) \sim Sp(g),$$

якщо для $\forall j \exists i : G_j(n_j, k_j)$ співпадає з $G_i(n_i, k_i)$, де $i, j = \overline{1, 4}$.

Теорема 2. Дві функції $f, g : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ є РСО-еквівалентними тоді і лише тоді, коли $Sp(f) \sim Sp(g)$.

Рис. 9. $Sp(f)$ -інваріант деякої функції.

Доведення. Необхідність. Доведення випливає з побудови інваріанту для функцій $f, g : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$.

Достатність. Нехай функціям f та g відповідають інваріанти $Sp(f)$ та $Sp(g)$ такі, що $Sp(f) \sim Sp(g)$. З умови випливає, що числа локальних екстремумів, які відповідають функціям f і g на кожному з кіл S_1^1 та S_2^1 співпадають. По аналогії з доведенням теореми 1, для функції f отримаємо чотири послідовності локальних екстремумів $(x', x_1^j, \dots, x_{n_j}^j, a)$, $j = 1, 2$, та $(x'', x_1^i, \dots, x_{n_i}^i, a)$, $i = 3, 4$, де x' та x'' — глобальні мінімуми (максимуми) функції f на колах S_1^1 та S_2^1 відповідно. Для функції g утворимо $(y', y_1^j, \dots, y_{n_j}^j, a)$, $j = 1, 2$ та $(y'', y_1^i, \dots, y_{n_i}^i, a)$, $i = 3, 4$, де y' та y'' — глобальні мінімуми (максимуми) функції g на колах S_1^1 та S_2^1 , відповідно. Із побудови зм'ї випливає, що існують відображення $\varphi_1 : f(x') \rightarrow z_0^1$, $\varphi_2 : f(x') \rightarrow z_0^2$, $\varphi_j : f(x_i^j) \rightarrow z_i^j$, де $j = 1, 2$, та $\varphi_3 : f(x'') \rightarrow z_0^3$, $\varphi_4 : f(x'') \rightarrow z_0^4$, (нагадаємо, що $z_0^1 = z_0^2$ та $z_0^3 = z_0^4$) $\varphi_k : f(x_i^k) \rightarrow z_i^k$, де $k = 3, 4$, і z_i^s — ціле додатне число та елемент інваріанту $Sp(f)$. Аналогічно, отримаємо $\psi_1 : g(y') \rightarrow z_0^1$, $\psi_2 : g(y') \rightarrow z_0^2$, $\psi_j : g(y_i^j) \rightarrow z_i^j$, де $j = 1, 2$, та $\psi_3 : g(y'') \rightarrow z_0^3$, $\psi_4 : g(y'') \rightarrow z_0^4$, ($z_0^1 = z_0^2$ та $z_0^3 = z_0^4$) $\psi_k : g(x_i^k) \rightarrow z_i^k$, де $k = 3, 4$, і $z_i^s \in \mathbb{Z}^+$ та $z_i^s \in Sp(g)$.

Позначимо через $\alpha_0^1, \alpha_0^1, \alpha_0^3$ та α_0^4 дуги \mathcal{S} між точками x' і x_1^1 , x' і x_1^2 , x'' і x_1^3 та x'' і x_1^4 відповідно, а також через α_i^j дуги між x_i^j та x_{i+1}^j . Дані відображення можна легко продовжити до гомеоморфізмів $\tilde{\varphi} : \alpha_i^j \rightarrow z_l^j z_{l+1}^j$, де $z_l^j z_{l+1}^j$ – дуга інваріанту $Sp(f)$ між точками z_l^j та z_{l+1}^j . Очевидно, що отриманий гомеоморфізм не зберігає орієнтації, оскільки рух на кожному з кіл відбувається у протилежних напрямках відносно фіксованих точок. Аналогічно, для функції g можна побудувати гомеоморфізм $\tilde{\psi}$.

По аналогії з доведенням теореми 1, побудуємо гомеоморфізм $h_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Згідно зі сказаним вище маємо, що

$$f = h_2^{-1} \circ g \circ \tilde{\psi}^{-1} \circ \tilde{\varphi}$$

і

$$S_i^1 = \tilde{\varphi}^{-1}(\tilde{\psi}(g^{-1}(h_2(f(S_i^1))))),$$

де $i = 1, 2$. □

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Арнольд В.И. Исчисление змей и комбинаторика чисел Бернулли, Эйлера и Спрингера группы Коксетера // Успехи мат.наук.–1992. – Vol. 47, № 1(283). – С. 3-45.
- [2] Максименко С.И. Класифікація m – функцій на поверхностях // Укр. мат. журн. –1999. – Т.51, № 8. – С.1129-1135.
- [3] Пришляк А.О. Класифікація трехмерных градиентно-подобных динамических систем Морса-Смейла // Тр. Инст. Мат. АНУ. – Киев, 1998. – С.35-39.
- [4] Шарко В.В. Гладкая и топологическая эквивалентность функций на поверхностях // Укр.мат.жур – 2003. – Т.55, № 5 – С.687-700.
- [5] Юрчук І.А. Комбінаторні аспекти топологічної класифікації функцій на колі // Укр.мат.журн. – 2008. – Т.60, № 6. – С.829-836.
- [6] Юрчук І.А. Топологічна еквівалентність функцій з класу $F(D^2)$ // Проблеми топології та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2006.– Т.3, №3. – С. 474-486.

УДК 512.5+512.6

V. M. Bondarenko

Institute of Mathematics, NAS, Kyiv

E-mail: vit-bond@imath.kiev.ua

On connections between representations of semigroups $S(I, J)$ and representations of quivers

In this paper we study connections between representations of one natural class of semigroups and representations of quivers.

Let I be a finite set without 0 and let J be a subset of the cartesian product $I \times I$ without diagonal elements (i, i) . We define $S(I, J)$ to be the semigroup with generators e_i , where $i \in I \cup 0$, and the following relations:

- 1) $e_0 = 0$;
- 2) $e_i^2 = e_i$ for any $i \in I$;
- 3) $e_i e_j = 0$ for any pair $(i, j) \in J$.

The set of the semigroups of the form $S(I, J)$ is denoted by \mathcal{I} . We call $S(I, J) \in \mathcal{I}$ a *semigroup generated by idempotents with partial null multiplication*.

Throughout, k denotes a field. All vector space over k are finite-dimensional. Under consideration maps, morphisms, etc., we keep the right-side notation.

Let S be a semigroup and let $M_n(k)$ denotes the algebra of all $n \times n$ matrices with entries in k . A *matrix representation of S (of degree n) over k* is a homomorphism T from S to the multiplicative semigroup of $M_n(k)$. If there is an identity (resp. zero) element $a \in S$, we assume that the matrix $T(a)$ is identity (resp. zero).

Since $M_n(k)$ can be considered as the algebra of all linear transformations of any fixed n -dimensional vector space, we can consider representations of the semigroup S in terms of vector spaces and linear transformations. Thus, a *representation of S over k* is a homomorphism φ from S to the multiplicative semigroup of the algebra $\text{End}_k U$ with U being a finite-dimensional vector space. Two representation $\varphi : S \rightarrow \text{End}_k U$ and $\varphi' : S \rightarrow \text{End}_k U'$ are called *equivalent* if there is a linear map $\sigma : U \rightarrow U'$ such that $\varphi\sigma = \varphi'$.

A representation $\varphi : S \rightarrow \text{End}_k U$ of S is also denoted by (U, φ) . By the dimension of (U, φ) one means the dimension of U . The representations of S form a category which will be denoted by $\text{rep}_k S$ (it has as morphisms from (U, φ) to (U', φ') the maps σ such that $\varphi\sigma = \varphi'$).

In this paper we study connections between representations of the semigroups $S(I, J)$ and representations of quivers.

Recall the notion of representations of a quiver [1].

Let $Q = (Q_0, Q_1)$ be a (finite) quiver, where Q_0 is the set of its vertices and Q_1 is the set of its arrows $\alpha : x \rightarrow y$.

A *representation of the quiver $Q = (Q_0, Q_1)$ over a field k* is a pair $R = (V, \gamma)$ formed by a collection $V = \{V_x \mid x \in Q_0\}$ of vector spaces V_x and a collection

$$\gamma = \{\gamma_\alpha \mid \alpha : x \rightarrow y \text{ runs through } Q_1\}$$

of linear maps $\gamma_\alpha : V_x \rightarrow V_y$. A morphism from $R = (V, \gamma)$ to $R' = (V', \gamma')$ is given by a collection $\lambda = \{\lambda_x \mid x \in Q_0\}$ of linear maps $\lambda_x : V_x \rightarrow V'_x$, such that $\gamma_\alpha \lambda_y = \lambda_x \gamma'_\alpha$ for any arrow $\alpha : x \rightarrow y$.

The category of representations of $Q = (Q_0, Q_1)$ will be denoted by $\text{rep}_k Q$.

We identify a linear map α of

$$U = U_1 \oplus \dots \oplus U_p$$

into

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_q$$

with the matrix (α_{ij}) , $i = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, q$, where

$$\alpha_{ij} : U_i \rightarrow V_j$$

are the linear maps induced by α (then the sum and the composition of maps are given by the matrix rules).

For a finite set X and $Y \subseteq X \times X$, we denote by $Q(X, Y)$ the quiver with vertex set X and arrows $a \rightarrow b$, $(a, b) \in Y$.

Let $S = S(I, J)$, where, as before, $I = \{1, 2, \dots, m\}$ and

$$\bar{J} = \{(i, j) \in (I \times I) \setminus J \mid i \neq j\}.$$

Define the functor F from $\text{rep}_k Q(I, \bar{J})$ to $\text{rep}_k S(I, J)$ as follows. $F = F(I, J)$ assigns to each object $(V, \gamma) \in \text{rep}_k Q(I, \bar{J})$ the object $(V', \gamma') \in \text{rep}_k S(I, J)$, where $V' = \bigoplus_{i \in I} V_i$, $(\gamma'(e_i))_{jj} = \mathbf{1}_{V_j}$ if $i = j$, $(\gamma'(e_i))_{ij} = \gamma_{ij}$ if $(i, j) \in \bar{J}$, and $(\gamma'(e_i))_{js} = 0$ in all other cases. F assigns to each morphism λ of $\text{rep}_k Q(I, \bar{J})$ the morphism $\bigoplus_{i \in I} \lambda_i$ of $\text{rep}_k S(I, J)$.

Theorem 1. *The functor*

$$F = F(I, J) : \text{rep}_k Q(I, \bar{J}) \rightarrow \text{rep}_k S(I, J)$$

is full and faithful.

Proof. It is obvious that the functor F is faithful. It remains to prove that it is full. Let δ be a morphism from $(V, \gamma)F = (V', \gamma')$ to $(W, \sigma)F = (W', \sigma')$. In other words, δ is a linear map of V' into W' such that $\gamma'(e_s)\delta = \delta\sigma'(e_s)$ for $s = 1, \dots, m$. We will consider these equalities as matrix ones (taking into account that $V' = \bigoplus_{i \in I} V_i$ and $W' = \bigoplus_{i \in I} W_i$) and denote by $[s, i, j]$ the scalar equality $(\gamma'(e_s)\delta)_{ij} = (\delta\sigma'(e_s))_{ij}$, induced by the (matrix) equality $\gamma'(e_s)\delta = \delta\sigma'(e_s)$.

From an equation $[j, i, j]$ with $j \neq i$ it follows that $\delta_{ij} = 0$, and consequently δ is a diagonal matrix: $\delta = \delta_{11} \oplus \delta_{22} \oplus \dots \oplus \delta_{mm}$. Further, if $\alpha : i \rightarrow j$ is an arrow of the quiver $Q(I, \bar{J})$, then from the equation $[i, i, j]$ we have that $\gamma_\alpha \delta_{jj} = \delta_{ii} \sigma_\alpha$. Consequently, a collection $\bar{\delta} = \{\delta_{ss} \mid s = 1, \dots, m\}$ is a morphism from (V, γ) to

(W, σ) . Since $\delta = \delta_{11} \oplus \delta_{22} \oplus \cdots \oplus \delta_{mm}$, we have that $\delta = \lambda F$, where $\lambda = \bar{\delta}$, as claimed. \square

From this theorem it follows that a semigroup $S(I, J)$ is wild if so is the quiver $Q(I, \bar{J})$ (the general definitions of wild classification problems are given in [2]).

REFERENCES

- [1] *P. Gabriel*. Unzerlegbare Darstellungen // Manuscripts Math. – 1972. – **6**. – pp. 71-103,309.
- [2] *Yu. A. Drozd*. Tame and wild matrix problems // Lecture Notes in Math. – 1980. – **832**. – pp. 242-258.

UDC 512.5/512.6

V. M. Bondarenko

Institute of Mathematics, NAS, Kyiv
E-mail: vit-bond@imath.kiev.ua

Yu. M. Pereguda

Korolyov military Institute of national aviation University,
Zhytomyr

On P -numbers of quadratic forms

In this paper we introduce P -numbers of quadratic forms over \mathbb{R} and study their properties.

In this paper, by a quadratic form we mean a quadratic form over the field of real numbers \mathbb{R}

$$f(z) = f(z_1, \dots, z_n) = \sum_{i=1}^n f_i z_i^2 + \sum_{i < j} f_{ij} z_i z_j.$$

The set of all such form is denoted by \mathcal{R} , and the set of all $f(z) \in \mathcal{R}$ with $f_1, \dots, f_n = 1$ is denoted by \mathcal{R}_0 .

Let $f(z) \in \mathcal{R}_0$ and $s \in \{1, \dots, n\}$. We introduce the notion of the s -deformation of $f(z)$ as follows:

$$f^{(s)}(z, a) = f^{(s)}(z_1, \dots, z_n, a) = az_s^2 + \sum_{i \neq s} z_i^2 + \sum_{i < j} f_{ij} z_i z_j,$$

where a is a parameter. Denote by $F_+^{(s)}$ the set of all $b \in \mathbb{R}$ such that the form $f^{(s)}(z, b)$ is positive definite, and put

$$F_-^{(s)} = \mathbb{R} \setminus F_+^{(s)}.$$

In other words, $b \in F_-^{(s)}$ iff there exists a nonzero vector

$$r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n$$

such that $f^{(s)}(r_1, \dots, r_n, b) \leq 0$. Further, put

$$m_f^{(s)} = \sup F_-^{(s)} \in \mathbb{R} \cup \infty$$

(since $x \in F_-^{(s)}$ implies $y \in F_-^{(s)}$ for any $y < x$, this supremum is a limit point). We call $m_f^{(s)}$ the s -th P -number of $f(z)$.

Proposition 1. *Let $f(z_1, \dots, z_n) \in \mathcal{R}_0$. Then*

- 1) $m_f^{(s)} \geq 0$;
- 2) $m_f^{(s)} = \infty$ if the form

$$f_{-s}(z_1, \dots, z_{s-1}, z_{s+1}, \dots, z_n) = f(z_1, \dots, z_{s-1}, 0, z_{s+1}, \dots, z_n)$$

is not positive definite.

Both these assertions follow easily from the definitions.

Theorem 1. *Let $f(z_1, \dots, z_n) \in \mathcal{R}_0$ and let $m_f^{(s)} \neq \infty$. Then*

- 1) $m_f^{(s)} \in F_-^{(s)}$, and consequently $m_f^{(s)}$ is the greatest number of $F_-^{(s)}$.
- 2) the form $f^{(s)}(z, m_f^{(s)})$ is non-negative definite;

Proof. 1) We may assume, without loss of generality, that $s = n$. Consider the matrix $S(a)$ of the quadratic form $f^{(n)}(z, a)$:

$$S(a) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & f_{12} & \dots & f_{1,n-1} & f_{1n} \\ f_{12} & 2 & \dots & f_{2,n-1} & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{1,n-1} & f_{2,n-1} & \dots & 2 & f_{n-1,n} \\ f_{1n} & f_{2n} & \dots & f_{n-1,n} & 2a \end{pmatrix}.$$

Denote by $\Delta_k, k = 1, \dots, n - 1$, the principal $k \times k$ minor of $S(a)$ and by Δ_{in} the $(n - 1) \times (n - 1)$ minor of $S(a)$ which is obtained from $S(a)$ by deleting i th row and n th column. The determinant

of $S(a)$ is denoted by $\Delta(a)$. Then by the well-known formula,

$$\begin{aligned} \Delta(a) = 1/2[(-1)^{n+1}f_{1n}\Delta_{1n} + (-1)^{n+2}f_{2n}\Delta_{2n} + \dots \\ \dots + (-1)^{2n-1}f_{n-1,n}\Delta_{n-1,1n}] + a\Delta_{n-1}, \end{aligned}$$

whence

$$\Delta(a) = a\Delta_{n-1} + N \quad (*)$$

where $N = 1/2[(-1)^{n+1}f_{1n}\Delta_{1n} + (-1)^{n+2}f_{2n}\Delta_{2n} + \dots + (-1)^{2n-1}f_{n-1,n}\Delta_{n-1,1n}]$.

By assertion 2) of Proposition 1 the form $f_{-n}(z_1, \dots, z_{n-1})$ is positive definite (since $m_f^{(n)} \neq \infty$). From Silvestr's criterion of positive definiteness of quadratic forms it follows that

$$\Delta_1 > 0, \dots, \Delta_{n-1} > 0.$$

Further, from this criterion it follows that $f(z, a)$ is positive definite if $\Delta(a) > 0$, and is not positive definite if $\Delta(a) \leq 0$. Consequently (see $(*)$)

$$\begin{aligned} F_-^{(n)} &= \{b \in \mathbb{R} \mid \Delta(b) \leq 0\} \\ &= \{b \in \mathbb{R} \mid b\Delta_{n-1} \leq -N\} \\ &= \{b \in \mathbb{R} \mid b \leq -N/\Delta_{n-1}\}. \end{aligned}$$

So $m_f^{(n)} = -N/\Delta_{n-1} \in F_-^{(n)}$, as claimed.

2) **The first proof.** Suppose that $f^{(s)}(z, m_f^{(s)})$ is not non-negative definite. Then there is a vector $r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n$ such that $f^{(s)}(r, m_f^{(s)}) = \alpha < 0$. Fix $0 < \varepsilon < -\alpha$. By continuity of $f(z, a)$, there exist $\delta_i > 0$ for $i = 1, \dots, n$ and $\delta > 0$ such that

$$|f^{(s)}(r_1 + \mu_1, \dots, r_n + \mu_n, m_f^{(s)} + \mu) - f^{(s)}(r_1, \dots, r_n, m_f^{(s)})| < \varepsilon$$

whenever $|\mu_i| < \delta_i$ for $i = 1, \dots, n$ and $|\mu| < \delta$. Put $\mu_i = 0$ for $i = 1, \dots, n$ and fix $0 < \mu_0 < \delta$. Then

$$|f^{(s)}(r_1, \dots, r_n, m_f^{(s)} + \mu_0) - \alpha| < \varepsilon.$$

It follows that $f^{(s)}(r_1, \dots, r_n, m_f^{(s)} + \mu_0) - \alpha < \varepsilon$, whence

$$f^{(s)}(r_1, \dots, r_n, m_f^{(s)} + \mu_0) < \varepsilon + \alpha < 0.$$

So $m_f^{(s)} + \mu_0 \in F_-^{(s)}$, a contradiction to the definition of $m_f^{(s)}$.

The second proof. Let $s = n$. It follows from the proof of assertion 1) (of this theorem) that $\delta(m_f^{(n)}) = 0$. Since

$$\Delta_1 > 0, \quad \dots, \quad \Delta_{n-1} > 0,$$

the form $f^{(n)}(z, m_f^{(n)})$ is non-negative definite (see, for example, [1, P.322]). \square

REFERENCES

- [1] V. V. Voevodin Linear algebra. Moskow: Nauka, 1980, 400p. (in Russian).

УДК 512.5+512.6

V. M. Bondarenko

Institute of Mathematics, NAS, Kyiv
E-mail: vit-bond@imath.kiev.ua

O. M. Tertychna

Kyiv National Taras Shevchenko University
E-mail: olena-tertychna@mail.ru

On representations of the semigroups $S(I, J)$ with acyclic quiver

In this paper we study representations of semigroups (over a field k) generated by idempotents with partial null multiplication in the case when the corresponding quiver has not oriented cycles.

We will use the definitions, notions and conventions of [1]. The main of them will be repeated.

Let I be a finite set without 0 and J a subset of $I \times I$ without elements of the form (i, i) . We define $S(I, J)$ to be the semigroup with generators e_i , where i runs through all elements of $I \cup 0$, and the following relations:

- 1) $e_0 = 0$;
- 2) $e_i^2 = e_i$ for every $i \in I$;
- 3) $e_i e_j = 0$ for every pair $(i, j) \in J$.

The set of the semigroups of the form $S(I, J)$ is denoted by \mathcal{I} . We call $S(I, J) \in \mathcal{I}$ a *semigroup generated by idempotents with partial null multiplication*.

For a finite set X and $Y \subseteq X \times X$, we denote by $Q(X, Y)$ the quiver with vertex set X and arrows $a \rightarrow b$, $(a, b) \in Y$. We also put

$$\bar{Y} = \{(a, b) \in (X \times X) \setminus Y \mid a \neq b\}.$$

Throughout, k denotes a field.

Let S be a semigroup. A *matrix representation of S (of degree n) over k* is a homomorphism T from S to the multiplicative semigroup of $M_n(k)$. If there is an identity (resp. zero) element $a \in S$, we assume that the matrix $T(a)$ is identity (resp. zero). In terms of vector spaces and linear transformations, a *representation of S over k* is a homomorphism φ from S to the multiplicative semigroup of the algebra $End_k U$ with U being a finite-dimensional vector space. Two representation $\varphi : S \rightarrow End_k U$ and $\varphi' : S \rightarrow End_k U'$ are called *equivalent* if there is a linear map $\sigma : U \rightarrow U'$ such that $\varphi\sigma = \varphi'$.

A representation $\varphi : S \rightarrow End_k U$ of S is also denoted by (U, φ) . By the dimension of (U, φ) one means the dimension of U . The representations of S form a category which will be denoted by $rep_k S$ (it has as morphisms from (U, φ) to (U', φ') the maps σ such that $\varphi\sigma = \varphi'$).

In this paper we study representations of semigroups $S(I, J)$ over k in the case when the quiver $Q(I, \bar{J})$ is acyclic, i.e. has not oriented cycles.

Recall the notion of representations of a quiver [2].

Let $Q = (Q_0, Q_1)$ be a finite quiver with the set Q_0 of its vertices and the set Q_1 of its arrows $\alpha : x \rightarrow y$.

A *representation of the quiver $Q = (Q_0, Q_1)$ over a field k* is given by a pair $R = (V, \gamma)$ formed by a collection

$$V = \{V_x \mid x \in Q_0\}$$

of vector spaces V_x and a collection

$$\gamma = \{\gamma_\alpha \mid \alpha : x \rightarrow y \text{ runs through } Q_1\}$$

of linear maps $\gamma_\alpha : V_x \rightarrow V_y$. A morphism from $R = (V, \gamma)$ to $R' = (V', \gamma')$ is a collection $\lambda = \{\lambda_x \mid x \in Q_0\}$ of linear maps

$\lambda_x : V_x \rightarrow V'_x$, such that $\gamma_\alpha \lambda_y = \lambda_x \gamma'_\alpha$ for any arrow $\alpha : x \rightarrow y$. The category of representations of $Q = (Q_0, Q_1)$ will be denoted by $\text{rep}_k Q$.

A linear map α of $U = U_1 \oplus \dots \oplus U_p$ into $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_q$ is identified with the matrix (α_{ij}) , $i = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, q$, where $\alpha_{ij} : U_i \rightarrow V_j$ are the induced linear maps.

Let $S = S(I, J)$ with $I = \{1, 2, \dots, m\}$. Define the functor

$$F = F(I, J) : \text{rep}_k Q(I, \overline{J}) \rightarrow \text{rep}_k S(I, J)$$

as follows. $F = F(I, J)$ assigns to an object $(V, \gamma) \in \text{rep}_k Q(I, \overline{J})$ the object $(V', \gamma') \in \text{rep}_k S(I, J)$, where

$$V' = \bigoplus_{i \in I} V_i,$$

$(\gamma'(e_i))_{jj} = \mathbf{1}_{V_j}$ if $i = j$, $(\gamma'(e_i))_{ij} = \gamma_{ij}$ if $(i, j) \in \overline{J}$, and $(\gamma'(e_i))_{js} = 0$ in all other cases. F assigns to a morphism λ of $\text{rep}_k Q(I, \overline{J})$ the morphism $\bigoplus_{i \in I} \lambda_i$ of $\text{rep}_k S(I, J)$.

In [1] the first author proved that the functor $F = F(I, J)$ is full and faithful (see the only theorem).

From this theorem it follows that a semigroup $S(I, J)$ is wild if so is the quiver $Q(I, \overline{J})$ (the general definitions of tame and wild classification problems are given in [3]).

In this paper we prove the following theorem.

Theorem 1. *Let $S(I, J)$ be a semigroup from \mathcal{I} such that the quiver $Q(I, \overline{J})$ is acyclic.*

Then each object of the category $\text{rep}_k S(I, J)$ is isomorphic to an object of the form $XF(I, J) \oplus (W, 0)$, where $X \in \text{rep}_k Q(I, \overline{J})$ and W is a vector space of dimension $d \geq 0$.

Proof. For simplicity, the quiver $Q(I, \overline{J})$ is designated by

$$Q = (Q_0, Q_1).$$

We use the induction on m ; the case $m = 0, 1$ are trivial.

Now let $m > 1$ and $R = (U, \varphi)$ be a representation of $S(I, J)$. Fix $s \in Q_0$ such that there is no arrow $i \rightarrow s$; we will assume (without loss of generality) that $s = m$. Consider the subsemigroup S'

of S generated by $e_i, i \in I' \cup 0$, where $I' = \{1, \dots, m - 1\}$. Then $S' = S(I', J')$ with

$$J' = \{(i, j) \in I \times I \mid i, j \in I'\},$$

and $Q' = Q(I', \overline{J'})$ is the full subquiver of Q with vertex set $Q'_0 = I'$.

Denote by $R' = (U, \varphi')$ the restriction of R to S' ($\varphi'(x) = \varphi(x)$ for any $x \in S'$). It follows by induction that

$$R' \cong \overline{R'} = X'F(I', J') \oplus (W', 0),$$

where X' is a representation of the quiver $Q(I', \overline{J'})$.

Let $\overline{R'} = (\overline{U}, \overline{\varphi}')$ and $X' = (V', \gamma')$ with $V' = \{V'_i \mid i \in Q'_0\}$ and

$$\gamma' = \{\gamma'_\alpha \mid \alpha : i \rightarrow j \text{ runs through } Q'_1\}.$$

Since $R' \cong \overline{R'}$, there exists a linear map

$$\sigma : U \rightarrow \overline{U} = V'_1 \oplus V'_2 \oplus \dots \oplus V'_{m-1} \oplus W'$$

such that $\varphi'\sigma = \overline{\varphi}'$. Then the representation $R = (U, \varphi)$ is equivalent to the representation $\overline{R} = (\overline{U}, \overline{\varphi})$, where $\overline{\varphi}(e_i) = \overline{\varphi}'(e_i)$ for any $i = 1, \dots, m - 1$ and $\overline{\varphi}(e_m) = \varphi(e_m)\sigma$ (since, for $i \neq m$, $\overline{\varphi}'(e_i) = \varphi'(e_i)\sigma = \varphi(e_i)\sigma$, and so $\overline{\varphi}(x) = \varphi(x)\sigma$ for each $x \in S$).

We consider the representation $\overline{R} = (\overline{U}, \overline{\varphi})$ in more detail. Put $V_m = W'$ and consider $\overline{\varphi}$ as a matrix, taking into account that

$$\overline{U} = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_{m-1} \oplus V_m.$$

For $(p, q) \in J$, we denote by $[p, q, i, j]$ the scalar equality

$$[\overline{\varphi}(e_p)\overline{\varphi}(e_q)]_{ij} = 0,$$

induced by the (matrix) equality $\overline{\varphi}(e_p)\overline{\varphi}(e_q) = 0$ (the last equation holds since $e_p e_q = 0$ in $S(I, J)$). It follows from $[m, q, i, q]$ (for any fixed $q \neq m$) that $(\overline{\varphi}(e_m))_{iq} = 0$, and consequently $(\overline{\varphi}(e_m))_{ij} = 0$ for any $(i, j) \in I \times I'$.

We first consider two special cases:

- a) $\overline{\varphi}_{mm} = 0$;
- b) $\overline{\varphi}_{mm} = \mathbf{1} = \mathbf{1}_{V_m}$.

In case a) $(\overline{\varphi})^2 = \overline{\varphi}$ implies $\overline{\varphi} = 0$ and so

$$\overline{R} = XF(I, J) \oplus (W, 0)$$

with $X = (V, \gamma)$, where $V = \{V'_1, \dots, V'_{m-1}, 0\}$, $\gamma_\alpha = \gamma'_\alpha$ for $\alpha \in Q'_1$, $\gamma_\alpha = 0$ for $\alpha \notin Q'_1$ and $W = W'$.

In case b) an equality $[p, m, p, m]$ for $(p, m) \notin \overline{J}$ implies

$$(\overline{\varphi})_{pm} = 0$$

and so

$$\overline{R} = XF(I, J) \oplus (W, 0)$$

with $X = (V, \gamma)$, where $V = \{V'_1, \dots, V'_{m-1}, 0\}$, $\gamma_\alpha = \gamma'_\alpha$ for $\alpha \in Q'_1$, $\gamma_\alpha = 0$ for $\alpha \notin Q'_1$ and $W = W'$.

Now we consider the general case. Since $(\overline{\varphi}_{mm})^2 = \overline{\varphi}_{mm}$, there is an invertible map $\nu = (\nu_1, \nu_2) : V_m \rightarrow W_1 \oplus W_2$ such that

$$\overline{\varphi}_{mm}(\nu_1, \nu_2) = (\nu_1, \nu_2) \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

where $\mathbf{1} = \mathbf{1}_{W_1}$. Then the representation $\overline{R}' = (\overline{U}, \overline{\varphi}')$ is isomorphic to the representation $\widehat{R}' = (\widehat{U}, \widehat{\varphi}')$, where

$$\widehat{U} = \widehat{U}_1 \oplus \widehat{U}_2 \oplus \dots \oplus \widehat{U}_{m+1}$$

with $\widehat{U}_i = V_i$ for $i = 1, \dots, m - 1$, $\widehat{U}_m = W_1$, $\widehat{U}_{m+1} = W_2$, and $\widehat{\varphi}'(e_i) = \overline{\varphi}'(e_i)$ for $i = 1, \dots, m - 1$, $(\widehat{\varphi}'(e_m))_{ij} = (\overline{\varphi}'(e_m))_{ij}$ for $(i, j) \in I' \times I'$, $(\widehat{\varphi}'(e_m))_{ij} = 0$ for $i = m, m + 1, j \in I'$, $(\widehat{\varphi}'(e_m))_{m,mj} = \mathbf{1} = \mathbf{1}_{W_1}$, $(\widehat{\varphi}'(e_m))_{m,m+1} = 0$, $(\widehat{\varphi}'(e_m))_{m+1,m} = 0$, $(\widehat{\varphi}'(e_m))_{m+1,m+1} = 0$ (for instance, one can take the isomorphism $\beta : \widehat{R}' \rightarrow \overline{R}'$ with $\widehat{\varphi}'(e_i) = \mu^{-1} \overline{R}' \mu$, where $\mu = \mathbf{1}_{U_1} \oplus \dots \oplus \mathbf{1}_{U_{m-1}} \oplus \nu$).

From $(\widehat{\varphi}'(e_i))^2 = \widehat{\varphi}'(e_i)$ it follows that $(\widehat{\varphi}'(e_m))_{i,m+1} = 0$ for any $i \in I'$ (see the partial case a)); (then $(\widehat{\varphi}'(e_m))_{i,m+1} = 0$ for any $i = 1, \dots, m + 1$). From the scalar equalities $[p, m, p, m]$ for $(p, m) \notin \overline{J}$ implies $(\widehat{\varphi})_{pm} = 0$ (see the partial case b)). Thus,

$$\overline{R} = (\widehat{U}, \widehat{\varphi}) \cong R = (U, \varphi)$$

has the form $XF(I, J) \oplus (W, 0)$, where $X = (V, \gamma)$ with $V = \{\widehat{U}_i \mid i \in Q_0\}$, $\gamma = \{\gamma_\alpha \mid \alpha : i \rightarrow j \text{ runs through } Q_1\}$ with $\gamma_\alpha = \gamma'_\alpha$ for $\alpha \in Q'_1$, $\gamma_\alpha = \widehat{\varphi}(e_m)_{ij}$ for $\alpha \notin Q'_1$ (then $j = m$), and

$$W = \widehat{W_{m+1}},$$

as claimed. \square

Let $\text{rep}_k^\circ S(I, J)$ denotes the full subcategory of the category $\text{rep}_k S(I, J)$ consisting of all objects that have no objects $(W, 0)$, with $W \neq 0$, as direct summands.

Then from the Theorem of [1] and Theorem 1 it follows the following statement.

Theorem 2. *Let $S(I, J)$ be as in Theorem 1. Then the functor $F = F(I, J)$, viewed as a functor from $\text{rep}_k Q(I, \overline{J})$ to $\text{rep}_k^\circ S(I, J)$, is an equivalence of categories.*

From this theorem it follows that a semigroup $S(I, J)$ and the quiver $Q(I, \overline{J})$ have the same representation type (in the case when $Q(I, \overline{J})$ is acyclic).

REFERENCES

- [1] V. M. Bondarenko. On connections between representations of semigroups $\mathbf{S(I, J)}$ and representations of quivers // This book
- [2] P. Gabriel. Unzerlegbare Darstellungen // Manuscripts Math. – 1972. – 6. – pp. 71-103, 309.
- [3] Yu. A. Drozd. Tame and wild matrix problems // Lecture Notes in Math. – 1980. – 832. – pp. 242-258.

Kaveh Eftekharinasab

*Institute of Mathematics of Ukrainian National Academy of
Sciences*

E-mail: kaveh@imath.kiev.ua

Curvature forms and Curvature functions for 2-manifolds with boundary

We obtain that any 2-form and any smooth function on a given 2-manifold with boundary can be realized as the curvature form and the gaussian curvature function of some Riemmanian metric, respectively.

Keywords: *Curvature form, Curvature function, Gauss Bonnet formula, Manifold with boundary.*

1. INTRODUCTION

For 2-manifolds, possibly, with boundary the classical Gauss Bonnet formula asserts a relationship between the Euler characteristic of a manifold, its gaussian curvature, and the geodesic curvature of the boundary. This is the only known obstruction on a given 2-form on a manifold to be the curvature form of some Riemmanian metric. Nevertheless, it imposes a constraint on the sign of a function for being the curvature function of a metric. The problem of prescribing curvature forms on closed 2-manifolds was solved by Wallach and Warner [4]. They showed that the Gauss Bonnet formula is a necessary and sufficient condition on a 2-form to be a curvature form. Later, the problem of prescribing curvature functions has been studied by some authors and completely solved for closed manifold by Kazdan and Warner [2]. They proved that any smooth function which satisfies Gauss Bonnet sign condition, is the gaussian curvature of some Riemmanian metric.

In this paper we deal with 2-manifolds with boundary and the problems of prescribing curvature forms and curvature functions which were put to the author by Volodymyr Sharko. In contrast with the case when manifolds have nonempty boundary no obstruction on 2-forms and functions arises. It turns out that any 2-form and smooth function can be realized as the curvature form and curvature function of a metric respectively, this is a surprising phenomena.

2. PRELIMINARIES AND THE MAIN RESULTS

If we want to study manifolds with boundary we are often faced with the extension problems, we handle these problems by gluing manifolds together, providing desired extensions using the elementary techniques of differential topology. At first, we shall consider forms then, the same method will be used for functions.

Let M be a connected, compact and oriented 2-manifold with smooth boundary. Now, glue a 2-disk D^2 to M to get a 2-manifold without boundary \widetilde{M} , suitably oriented, joined together along boundaries. Now we shall have occasion to extend forms from M to the whole manifold, the existence of extension is an obvious corollary of the theorem 1.4 [3], that is, if ω_1 and ω_2 are given 2-forms on M and D^2 respectively, (here we just consider 2-forms but in general it is true for arbitrary forms) which are locally represented as $\omega_1 = f_{12} dx^1 \wedge dx^2$ and $\omega_2 = g_{12} dy^1 \wedge dy^2$ in collar neighborhoods of their boundaries then we can piece together functions f_{12} and g_{12} in bicollar neighborhood as the same as of the theorem 1.4 [3] and get a smooth function on \widetilde{M} and hence a smooth 2-form $\tilde{\omega}$ on \widetilde{M} whose restrictions to M and D^2 are ω_1 and ω_2 respectively.

Lemma 1. *Let ω be a given 2-form then for any arbitrary nonzero real number a there exists an extension $\bar{\omega}$ of ω to D^2 such that $\int_{D^2} \bar{\omega} = a$.*

Proof. Let $\tilde{\omega}$ be an arbitrary extension such that $\int_{D^2} \tilde{\omega} \neq 0$. We construct a 2-form $\bar{\omega}$ using bump function such that in an open neighborhood of the boundary coincides with $\tilde{\omega}$ and $\int_{D^2} \bar{\omega} = a$. Let U be an open neighborhood of the boundary and V be an open neighborhood of the boundary of the disk \tilde{D}^2 with the smaller radius contained in D^2 . Let $fdx^1 \wedge dx^2$ be a local representation of $\tilde{\omega}$ and g be a bump function which equals to the identity in U and vanishes in V now, put $\tilde{\tilde{\omega}} = g \tilde{\omega}$, $\int_{D^2} \tilde{\tilde{\omega}} = k \neq 0$ and $\int_U \tilde{\tilde{\omega}} = k_1$, $\int_{\Omega} \tilde{\tilde{\omega}} = k_2$ and $\int_{\tilde{D}^2} \tilde{\tilde{\omega}} = k_3$ where Ω is a space between U and V . Now define a new function h which is equal to the identity in U and $\frac{a-k_1}{k_2+k_3}g$ elsewhere. Set $\bar{\omega} = h\tilde{\tilde{\omega}}$. (Notice that we always can choose neighborhoods and function g in order to $k_2 + k_3 \neq 0$). \square

As an evident consequence of this lemma we have the following corollary.

Corollary 1. *For any 2-form ω on M there exists an extension $\tilde{\omega}$ such that*

$$\int_{\tilde{M}} \tilde{\omega} = 2\pi\chi(\tilde{M})$$

Theorem 1. *Let M be a connected, compact and oriented 2-manifold with smooth boundary then any 2-form ω on M is the curvature form of some Riemannian metric g on M .*

Proof. There exists an extension $\tilde{\omega}$ of ω such that

$$\int_{\tilde{M}} \tilde{\omega} = 2\pi\chi(\tilde{M})$$

by corollary 1, then employing the theorem of Wallach and Warner [4] for $\tilde{\omega}$, we get a Riemannian metric \tilde{g} on \tilde{M} which its restriction to M is an expected metric. \square

Remark 1. *Note that in what, discussed and follows we just consider manifolds having only one boundary component, but, in general, when boundary consists of more than one component the*

theorems remain valid, we just need to glue D^2 to each component to get a closed manifold.

Since, we integrate a function, not a 2-form, this fact leads us to proceed with the same approach, and expect the similar result for functions, however, we can ask a different question concerns prescribing gaussian and geodesic curvatures simultaneously, for example, in [1] the author applies the technique of solving the Neumann problem on a compact manifold with boundary to the problem of finding a metric, pointwise conformal to a given metric with prescribed gaussian curvature and with the prescribed geodesic curvature on the boundary when $\chi(M) \leq 0$. But here our approach is completely different, indeed our objective is to extend functions and transfer problems to a closed manifold to avoid difficulties on boundary. Fortunately, appropriate extensions always exist

Assume f is a smooth function defined on M the Whitney extension theorem assures that f can be extended so as to be smooth throughout \widetilde{M} .

Lemma 2. *Let f be a smooth function defined on M then there exists an extension \tilde{f} such that satisfies the sign condition.*

Proof. let \bar{f} be an arbitrary extension which is not zero everywhere, suppose $\chi(M) > 0$ if there exists a point x_0 at which $f(x_0) > 0$ there is nothing to do otherwise multiply f to a function g , where

$$g = \begin{cases} 1, & \text{in an open neighborhood of the boundary,} \\ \text{negative,} & \text{at some point,} \end{cases}$$

fg is a desired extension. If $\chi(M) < 0$ we can modify the extension likewise. If $\chi(M) = 0$ and f does not vanish identically and does not change sign, it is strictly positive or negative thus we just need to multiply it to a function which is equal to the identity in an open neighborhood of the boundary of D^2 and changes sign elsewhere. \square

Theorem 2. *Let M be a compact, connected and oriented 2-manifold with smooth boundary then any smooth function f is the gaussian curvature of some Riemmanian metric on M .*

Proof. By lemma 2 there exists an extension \tilde{f} of f such that satisfies the sign condition then by the theorem of Kazdan and warner [2] there exists a metric on \tilde{M} possesses \tilde{f} as its gaussian curvature, restriction of the metric to M is an expected metric. \square

REFERENCES

- [1] *Cherrier P.* Problèmes de Neumann non linéaires sur les varietés Riemanniennes // J. Funct. Anal. – 1984. – V. 57 – P. 154-206.
- [2] *Kazdan J. L., Warner F. W.* Existence and conformal deformation of metrics with prescribed Gaussian and scalar curvatures // Ann. of Math. – 1975. – V. 101, No. 2. – P. 317-331.
- [3] *Milnor J.* Lectures on the h -cobordism theorem. Math. Notes.– Princeton: Princeton university press, 1965.
- [4] *Wallach N., Warner F. W.* Curvature forms for 2-manifolds // Proc. Amer. Math. Soc. – 1970. – V. 25. – P. 712–713.

Sergiy Maksymenko

*Topology dept., Institute of Mathematics of NAS of Ukraine,
Tereshchenkivska st. 3, Kyiv, 01601 Ukraine
E-mail: maks@imath.kiev.ua*

Reparametrizations of vector fields and their shift maps

Let M be a smooth manifold, F be a smooth vector field on M , and (\mathbf{F}_t) be the local flow of F . Denote by $Sh(F)$ the subset of $C^\infty(M, M)$ consisting of maps $h : M \rightarrow M$ of the following form:

$$h(x) = \mathbf{F}_{\alpha(x)}(x),$$

where α runs over all smooth functions $M \rightarrow \mathbb{R}$ which can be substituted into \mathbf{F} instead of t . This space often contains the identity component of the group of diffeomorphisms preserving orbits of F . In this note it is shown that $Sh(F)$ is not changed under reparametrizations of F , that is for any smooth strictly positive function $\mu : M \rightarrow (0, +\infty)$ we have that $Sh(F) = Sh(\mu F)$. As an application it is proved that F can be reparametrized to induce a circle action on M if and only if there exists a smooth function $\mu : M \rightarrow (0, +\infty)$ such that $\mathbf{F}(x, \mu(x)) \equiv x$.

Keywords: *Reparametrization of a flow, shift map, circle action*

1. INTRODUCTION

Let M be a smooth manifold and F be a smooth vector field on M tangent to ∂M . For each $x \in M$ its *integral trajectory* with respect to F is a unique mapping $o_x : \mathbb{R} \supset (a_x, b_x) \rightarrow M$ such that $o_x(0) = x$ and $\frac{d}{dt}o_x = F(o_x)$, where $(a_x, b_x) \subset \mathbb{R}$ is the maximal interval on which a map with the previous two properties can be defined. The image of o_x will be denoted by the same symbol o_x and also called the *orbit* of x . It follows that from standard

theorems in ODE the following subset of $M \times \mathbb{R}$

$$\text{dom}(F) = \bigcup_{x \in M} x \times (a_x, b_x),$$

is an open, connected neighbourhood of $M \times 0$ in $M \times \mathbb{R}$. Then the *local flow* of F is the following map

$$\mathbf{F} : M \times \mathbb{R} \supset \text{dom}(F) \rightarrow M, \quad \mathbf{F}(x, t) = \mathbf{F}_x(t).$$

It is well known that if M is compact, or F has compact support, then \mathbf{F} is defined on all of M .

Denote by $\text{func}(F) \subset C^\infty(M, \mathbb{R})$ the subset consisting of functions $\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}$ whose graph $\Gamma_\alpha = \{(x, \alpha(x)) : x \in M\}$ is contained in $\text{dom}(F)$. Then we can define the following map

$$\varphi : C^\infty(M, \mathbb{R}) \supset \text{func}(F) \longrightarrow C^\infty(M, M),$$

$$\varphi(\alpha)(x) = \mathbf{F}(x, \alpha(x)).$$

This map will be called the *shift map* along orbits of F and its image in $C^\infty(M, M)$ will be denoted by $Sh(F)$.

It is easy to see, [1, Lm. 2], that φ is $S^{r,r}$ -continuous for all $r \geq 0$, that is continuous between the corresponding S^r Whitney topologies of $\text{func}(F)$ and $C^\infty(M, M)$.

Moreover, if the set Σ_F of singular points of F is nowhere dense, then φ is locally injective, [1, Pr. 14]. Therefore it is natural to know whether it is a homeomorphism with respect to some Whitney topologies, and, in particular, whether it is $S^{r,s}$ -open, i.e. open as a map from S^r topology of $\text{func}(F)$ into S^s topology of the image $Sh(F)$, for some $r, s \geq 0$. These problems and their applications were treated e.g. in [1–3].

In this note we prove the following theorems describing the behaviour of the image of shift maps under reparametrizations and pushforwards.

Theorem 1. *Let $\mu : M \rightarrow \mathbb{R}$ be any smooth function and $G = \mu F$ be the vector field obtained by the multiplication F by μ . Then*

$$(1) \quad Sh(G) \subset Sh(F).$$

Suppose that $\mu \neq 0$ on all of M . Then

$$Sh(\mu F) = Sh(F).$$

In this case the shift mapping $\varphi : \text{func}(F) \rightarrow Sh(F)$ of F is $S^{r,s}$ -open for some $r, s \geq 0$, if and only if so is the shift mapping $\psi : \text{func}(G) \rightarrow Sh(G)$ of G .

Theorem 2. Let $z \in M$, $\alpha : (M, z) \rightarrow \mathbb{R}$ be a germ of smooth function at z , and $f : M \rightarrow M$ be a germ of smooth map defined by $f(x) = \mathbf{F}(x, \alpha(x))$. Suppose that f is a germ of diffeomorphism at z . Then

$$(2) \quad f_*F = (1 + F(\alpha)) \cdot F,$$

where $f_*F = Tf \circ F \circ f^{-1}$ is the vector field induced by f , and $F(\alpha)$ is the derivative of α along F . Thus f_*F is just a reparametrization of F .

If $\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}$ is defined on all of M and $f = \varphi(\alpha)$ is a diffeomorphism of M , then

$$Sh(f_*F) = Sh(F).$$

Further in §3 we will apply these results to circle actions. In particular, we prove that F can be reparametrized to induce a circle action on M if and only if there exists a smooth function $\mu : M \rightarrow (0, +\infty)$ such that $\mathbf{F}(x, \mu(x)) \equiv x$, see Corollary 1.

2. PROOFS OF THEOREMS 1 AND 2

These theorems are based on the following well-known statement, see e.g. [4, 5, 8] for its variants in the category of measurable maps.

Lemma 1. Let $G = \mu F$ and $\mathbf{G} : \text{dom}(G) \rightarrow M$ be the local flow of G . Then there exists a smooth function $\alpha : \text{dom}(G) \rightarrow \mathbb{R}$ such that

$$\mathbf{G}(x, s) = \mathbf{F}(x, \alpha(x, s)).$$

In fact,

$$(3) \quad \alpha(x, s) = \int_0^s \mu(\mathbf{G}(x, \tau)) d\tau.$$

In particular, for each $\gamma \in \text{func}(G)$ we have that

$$(4) \quad \mathbf{G}(x, \gamma(x)) = \mathbf{F}(x, \alpha(x, \gamma(x))),$$

whence $Sh(G) \subset Sh(F)$.

Proof. Put $\mathcal{G}(x, s) = \mathbf{F}(x, \alpha(x, s))$, where α is defined by (3). We have to show that $\mathbf{G} = \mathcal{G}$.

Notice that a flow \mathbf{G} of a vector field G is a *unique* mapping that satisfies the following ODE with initial condition:

$$\left. \frac{\partial \mathbf{G}(x, s)}{\partial s} \right|_{s=0} = G(x) = F(x)\mu(x), \quad \mathbf{G}(x, 0) = x.$$

Notice that

$$\alpha(x, 0) = 0, \quad \alpha'_s(x, 0) = \mu(\mathbf{G}(x, 0)) = \mu(x).$$

In particular, $\mathcal{G}(x, 0) = \mathbf{F}(x, \alpha(x, 0)) = x$. Therefore it remains to verify that

$$(5) \quad \left. \frac{\partial \mathcal{G}(x, s)}{\partial s} \right|_{s=0} = F(x) \cdot \mu(x).$$

We have:

$$(6) \quad \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial s}(x, s) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial s}(x, \alpha(x, s)) = \left. \frac{\partial \mathbf{F}(x, t)}{\partial t} \right|_{t=\alpha(x, s)} \cdot \alpha'_s(x, s).$$

Substituting $s = 0$ in (6) we get (5). \square

Proof of Theorem 1. Eq. (1) is established in Lemma 1.

Suppose that $\mu \neq 0$ on all of M . Then $F = \frac{1}{\mu}G$, and $\frac{1}{\mu}$ is smooth on all of M . Hence again by Lemma 1 $Sh(F) \subset Sh(G)$, and thus $Sh(F) = Sh(G)$.

To prove the last statement define a map $\xi : \text{func}(G) \rightarrow \text{func}(F)$ by

$$\xi(\gamma)(x) = \alpha(x, \gamma(x)) = \int_0^s \mu(\mathbf{G}(x, \tau)) d\tau, \quad \gamma \in \text{func}(G).$$

Then (4) means that the following diagram is commutative:

$$\begin{array}{ccc} \text{func}(G) & \xrightarrow{\xi} & \text{func}(F) \\ \psi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ Sh(G) & \xlongequal{\quad} & Sh(F) \end{array}$$

We claim that ξ is a homeomorphism with respect to S^r topologies for all $r \geq 0$. Indeed, evidently ξ is $S^{r,r}$ -continuous. Put

$$(7) \quad \beta(x, s) = \int_0^s \frac{d\tau}{\mu(\mathbf{F}(x, \tau))}.$$

Then the inverse map $\xi^{-1} : \text{func}(F) \rightarrow \text{func}(G)$ is given by

$$(8) \quad \xi^{-1}(\delta)(x) = \beta(x, \delta(x)) = \int_0^{\delta(x)} \frac{d\tau}{\mu(\mathbf{F}(x, \tau))}, \quad \delta \in \text{func}(F),$$

and is also $S^{r,r}$ -continuous. Hence ψ is $S^{r,s}$ -open iff so is φ . Theorem 1 is completed.

Proof of Theorem 2. First we reduce the situation to the case $\alpha(z) = 0$. Suppose that $a = \alpha(z) \neq 0$ and let $\beta(x) = \alpha(x) - a$. Define the following germ of diffeomorphisms $g = \mathbf{F}_{-a} \circ f$ at z :

$$g(x) = \mathbf{F}(\mathbf{F}(x, \alpha(x)), -a) = \mathbf{F}(x, \alpha(x) - a) = \mathbf{F}(x, \beta(x)).$$

Then $g(z) = z$, and $\beta(z) = 0$.

Since \mathbf{F} preserves F , i.e. $(\mathbf{F}_t)_*F = F$ for all $t \in \mathbb{R}$, we obtain that

$$f_*F = f_*(\mathbf{F}_{-a})_*F = (f \circ \mathbf{F}_{-a})_*F = g_*F.$$

Moreover, $F(\alpha) = F(\beta)$. Therefore it suffices to prove our statement for g .

If z is a singular point of F , i.e. $F = 0$, then both parts of (2) vanish. Therefore we can assume that z is a regular point of F . Then there are local coordinates (x_1, \dots, x_n) at $z = 0 \in \mathbb{R}^n$ in which $F(x) = \frac{\partial}{\partial x_1}$ and

$$\mathbf{F}(x_1, \dots, x_n, t) = (x_1 + t, x_2, \dots, x_n).$$

Then $g(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + \beta(x), x_2, \dots, x_n)$, whence

$$\begin{aligned} Tg \circ F \circ g^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 + \beta'_{x_1} & \beta'_{x_2} & \cdots & \beta'_{x_n} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= (1 + \beta'_{x_1})F = (1 + F(\beta))F. \end{aligned}$$

Suppose now that α is defined on all of M and f is a diffeomorphism of all of M . Then by [1] the function $\mu = 1 + F(\alpha) \neq 0$ on all of M , whence by Theorem 1 $Sh(\mu F) = Sh(F)$.

3. PERIODIC SHIFT MAPS

Let F be a vector field, and φ be its shift map. The set

$$\ker(\varphi) = \varphi^{-1}(\text{id}_M)$$

will be called the *kernel* of φ , thus $\mathbf{F}(x, \nu(x)) \equiv x$ for all $\nu \in \ker(\varphi)$. Evidently, $0 \in \ker(\varphi)$. Moreover, it is shown in [1, Lm. 5] that $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$ iff $\alpha - \beta \in \text{func}(F)$.

Suppose that the set Σ_F of singular points of F is nowhere dense in M . Then, [1, Th. 12 & Pr. 14], φ is a locally injective map with respect to any weak or strong topologies, and we have the following two possibilities for $\ker(\varphi)$:

a) **Non-periodic case:** $\ker(\varphi) = \{0\}$, so $\varphi : \text{func}(F) \rightarrow Sh(F)$ is a bijection.

b) **Periodic case:** there exists a smooth strictly positive function

$$\theta : M \rightarrow (0, +\infty)$$

such that $\mathbf{F}(x, \theta(x)) \equiv x$ and $\ker(\varphi) = \{n\theta\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

In this case $\text{func}(F) = C^\infty(M, \mathbb{R})$, φ yields a bijection between $C^\infty(M, \mathbb{R})/\ker(\varphi)$ and $Sh(F)$, and for every $\alpha \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ we have that

$$\varphi^{-1} \circ \varphi(\alpha) = \alpha + \ker(\varphi) = \{\alpha + k\theta\}_{k \in \mathbb{Z}}.$$

It also follows that every non-singular point x of F is periodic of some period $\text{Per}(x)$,

$$\theta(x) = n_x \text{Per}(x)$$

for some $n_x \in \mathbb{N}$, and in particular, θ is constant along orbits of F . We will call θ the *period function* for φ .

Lemma 2. *Suppose that the shift map φ of F is periodic and let θ be its period function. Let also $\mu : M \rightarrow (0, +\infty)$ be any smooth strictly positive function. Put $G = \mu F$. Then the shift map ψ of G is also periodic, and its period function is*

$$(9) \quad \bar{\theta}(x) \stackrel{(8)}{=} \xi^{-1}(\theta)(x) = \beta(x, \theta(x)) = \int_0^{\theta(x)} \frac{d\tau}{\mu(\mathbf{F}(x, \tau))}.$$

If μ is constant along orbits of F , then the last formula reduces to the following one:

$$(10) \quad \bar{\theta} = \frac{\theta}{\mu}.$$

In particular, for the vector field $G = \theta F$ its period function is equal to $\bar{\theta} \equiv 1$.

Proof. Let $\mathbf{G} : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ be the flow of G . We have to show that $\mathbf{G}(x, \bar{\theta}(x)) \equiv x$ for all $x \in M$:

$$(11) \quad \mathbf{G}(x, \bar{\theta}(x)) \stackrel{(9)}{=} \mathbf{G}(x, \beta(x, \theta(x))) = \mathbf{F}(x, \theta(x)) \equiv x.$$

Since θ is the *minimal* positive function for which $\mathbf{F}(x, \theta(x)) \equiv x$ and $\mu > 0$, it follows from (9) that so is $\bar{\theta}$ is also the minimal positive function for which (11) holds true. Hence $\bar{\theta}$ is the period function for the shift map of G .

Let us prove (10). Since μ is constant along orbits of F , we have that $\mu(\mathbf{F}(x, \tau)) = \mu(x)$, whence

$$\bar{\theta}(x) = \beta(x, \theta(x)) = \int_0^{\theta(x)} \frac{d\tau}{\mu(\mathbf{F}(x, \tau))} = \int_0^{\theta(x)} \frac{d\tau}{\mu(x)} = \frac{\theta(x)}{\mu(x)}.$$

Lemma is proved. \square

3.1. Circle actions. Regard S^1 as the group $U(1)$ of complex numbers with norm 1, and let $\exp : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ be the exponential map defined by $\exp(t) = e^{2\pi it}$.

Let $\Gamma : M \times S^1 \rightarrow M$ be a smooth action of S^1 on M . Then it yields a smooth \mathbb{R} -action (or a flow) $\mathbf{G} : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ given by

$$(12) \quad \mathbf{G}(x, t) = \Gamma(x, \exp(t)).$$

Moreover \mathbf{G} is generated by the following vector field

$$G(x) = \left. \frac{\partial \mathbf{G}(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0}.$$

Evidently, any of Γ , \mathbf{G} , and G determines two others. In particular, a flow \mathbf{G} on M is of the form (12) for some smooth circle action Γ on M if and only if $\mathbf{G}_1 = \text{id}_M$, i.e. $\mathbf{G}(x, 1) \equiv x$ for all $x \in M$.

In other words, the shift map of \mathbf{G} is periodic and its period function is the constant function $\theta \equiv 1$.

As a consequence of Lemma 2 we get the following:

Corollary 1. *Let F be a smooth vector field on M and*

$$\theta : M \rightarrow (0, +\infty)$$

be a smooth strictly positive function. Then the following conditions are equivalent:

- (a) the vector field $G = \theta F$ yields a smooth circle action, i.e. $\mathbf{G}(x, 1) = x$ for all $x \in M$;
- (b) the shift map φ of F is periodic and θ is its period function, i.e. $\mathbf{F}(x, \theta(x)) \equiv x$ for all $x \in M$.

Corollary 2. Suppose that the shift map φ of F is periodic and let $z \in M$ be a singular point of F . Then there are $k, l \geq 0$ such that $2k + l = \dim M$, non-zero numbers $A_1, \dots, A_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, local coordinates $(x_1, y_1, \dots, x_k, y_k, t_1, \dots, t_l)$ at $z = 0 \in \mathbb{R}^{2k+l}$, and in which the linear part of F at 0 is given by

$$j_0^1 F(x_1, y_1, \dots, x_k, y_k, t_1, \dots, t_l) = -A_1 y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + A_1 x_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots \\ -A_k y_k \frac{\partial}{\partial x_k} + A_k x_k \frac{\partial}{\partial y_k}.$$

Proof. Let θ be the period function for F and $G = \theta F$. Since $\theta > 0$, it follows that $\Sigma_F = \Sigma_G$ and for every $z \in \Sigma_F$ we have that

$$j_z^1 G = \theta(z) \cdot j_z^1 F.$$

Therefore it suffices to prove our statement for G .

By Corollary 1 G yields a circle action, i.e. $\mathbf{G}_1 = \text{id}_M$, where \mathbf{G} is the flow of G . Then \mathbf{G} yields a linear flow $T_z \mathbf{G}_t$ on the tangent space $T_z M$ such that $T_z \mathbf{G}_1 = \text{id}$. In other words we obtain a linear action (i.e. representation) of the circle group $U(1)$ in the finite-dimensional vector space $T_z M$. Now the result follows from standard theorems about presentations of $U(1)$. \square

Remark 1. Suppose that in Corollary 2 $\dim M = 2$. Then we can choose local coordinates (x, y) at $z = 0 \in \mathbb{R}^2$ in which

$$j_0^1 F(x, y) = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}.$$

For this case the normal forms of such vector fields are described in [7].

REFERENCES

- [1] *Maksymenko S.*, Smooth shifts along trajectories of flows // Topol. Appl. – 2003. – V. 130. – P. 183–204, [arXiv:math/0106199](#).
- [2] *Maksymenko S.*, Homotopy types of stabilizers and orbits of Morse functions on surfaces // Ann. Glob. Anal. Geom. – 2006. – V. 26, No. 3. – P. 241–285, [arXiv:math/0310067](#).
- [3] *Maksymenko S.*, Local inverses of shift maps along orbits of flows, submitted, [arXiv:0806.1502](#).
- [4] *Ornstein D. S., Smorodinsky M.*, Continuous speed changes for flows, // Israel J. Math. – 1978. – V. 31, No. 2. – P. 161–168.
- [5] *W. Parry*, Cocycles and velocity changes, // J. London Math. Soc. – 1972. – V. 5 (2). – P. 511–516.
- [6] *dos Santos Nathan M.*, Parameter rigid actions of the Heisenberg groups, Ergodic Theory Dynam. Systems – 207. – V. 27, No. 6 – P. 1719–1735.
- [7] *Takens F.*, Normal forms for certain singularities of vectorfields, // Ann. Inst. Fourier – 1973. – V. 23, No. 2. – P. 163–195.
- [8] *Totoki H.*, Time changes of flows, // Memoirs Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A. – 1966. – V. 20, No. 1. – P. 27–55.

539.12

Yu. M. Malyuta

*Institute for Nuclear Research National Academy of Sciences of
Ukraine 03068 Kiev, Ukraine
E-mail: obikhod@kinr.kiev.ua*

T. V. Obikhod

*Institute for Nuclear Research National Academy of Sciences of
Ukraine 03068 Kiev, Ukraine
E-mail: obikhod@kinr.kiev.ua*

High energy physics and algebraic geometry

Superstring theory is applied to construction of the Minimal Supersymmetric Standard Model.

Keywords: *Superstring theory, Calabi-Yau fourfold, Superpotential, Mass spectrum of superpartners*

1. INTRODUCTION

The purpose of the present work is to derive the Minimal Supersymmetric Standard Model [1] from superstring theory [2]. It is performed by choosing superstring compactification in the form of elliptically fibred Calabi-Yau fourfold. Such approach allows to determine the gauge group, matter content, superpotential and mass spectrum of superpartners.

These predictions are important from experimental point of view as they are connected with searches for new physics at the LHC.

© Yu. M. Malyuta, T. V. Obikhod, 2009

2. SUPERSTRING COMPACTIFICATION

We consider superstring compactification on the Calabi-Yau fourfold F represented as the elliptic fibration

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \longrightarrow & F \\ & & \downarrow \\ & & B \end{array}$$

where the base B is the Fano variety of dimension three and the fiber \mathcal{E} is the elliptic curve.

Singular elliptic fibers [3] and their classification in terms of Lie groups are shown in Figure 1.

3. MATTER CONTENT

The Fano variety B [4] contains two del Pezzo surfaces S and S' . The surface S intersects the surface S' transversely along complex curves $\Sigma_H^{(u)}$, $\Sigma_H^{(d)}$, $\Sigma_M^{(1)}$, $\Sigma_M^{(2)}$ shown in Table 1 and in Figure 2. The fibration (1) restricted to these curves has sections

$$1 \times 5_H, \quad 1 \times \bar{5}_H, \quad 3 \times 10_M, \quad 3 \times \bar{5}_M$$

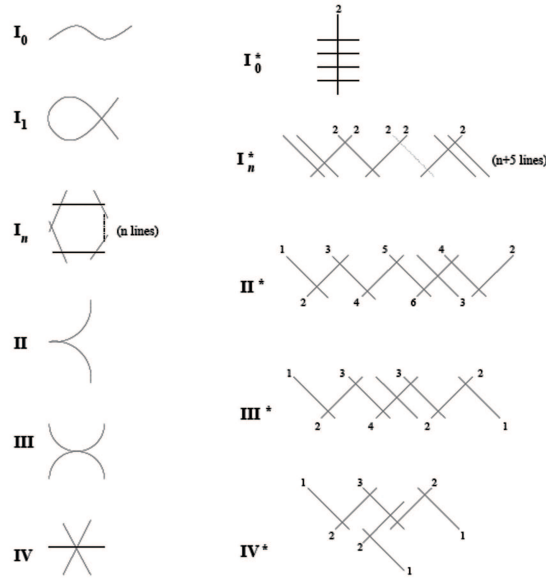
presented in Table 1 and in Figure 2. These sections determine the matter content of the MSSM.

4. SUPERPOTENTIAL

The gauge invariant MSSM superpotential takes the form

$$(2) \quad W_{SU(5)} = \lambda_{ij}^d \cdot \bar{5}_H \times \bar{5}_M^{(i)} \times 10_M^{(j)} + \lambda_{ij}^u \cdot 5_H \times 10_M^{(i)} \times 10_M^{(j)} + \\ + \lambda_{ia} \cdot 5_H \times \bar{5}_M^{(i)} \times N_R^{(a)} + \mu \cdot 5_H \times \bar{5}_H$$

where 5_H and $\bar{5}_H$ are Higgs multiplets, $\bar{5}_M^{(i)}$ and $10_M^{(j)}$ are multiplets of quark and lepton superpartners, λ_{ij}^d , λ_{ij}^u , λ_{ia} , μ are Yukawa coupling constants.



Fiber	I_0	I_N	II	III	IV	I_0^*	I_{N-6}^*	IV^*	III^*	II^*
Singularity type	—	A_{N-1}	—	A_1	A_2	D_4	D_{N-2}	E_6	E_7	E_8

FIGURE 10

5. MASS SPECTRUM OF SUPERPARTNERS

The analysis of Yukawa coupling constants, based on observational hints and theoretical considerations, allows to restrict the

Table 1

Model	Curve	Class
$1 \times 5_H$	$\Sigma_H^{(u)}$	$H - E_1 - E_3$
$1 \times \bar{5}_H$	$\Sigma_H^{(d)}$	$H - E_2 - E_4$
$3 \times 10_M$	$\Sigma_M^{(1)}$ (pinched)	$2H - E_1 - E_5$
$3 \times \bar{5}_M$	$\Sigma_M^{(2)}$	H

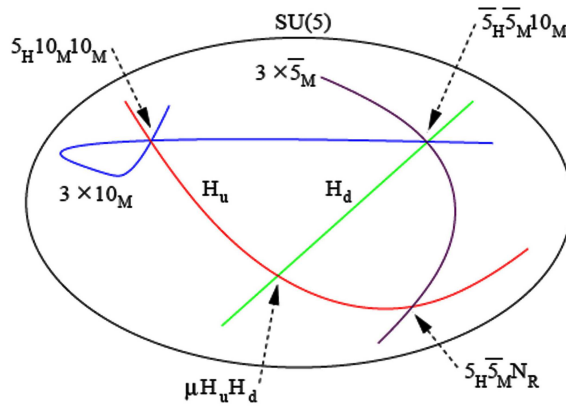


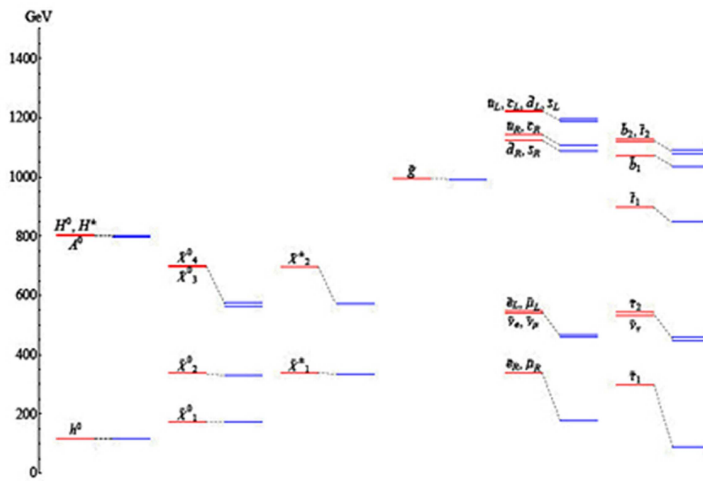
FIGURE 11

parameter space in (2) to five free parameters. Using this restricted parameter set it is possible to calculate the mass spectrum of superpartners by application of the computer program SOFTSUSY [5]. This MSSM spectrum is displayed in Figure 3.

6. COMPARISON WITH EXPERIMENT

Comparison of the predicted spectrum with experimental data obtained at the LEP and TEVATRON [6] (see Table 2) shows, that the calculated masses exceed the lower limits on masses reached at colliders.

New searches for superpartners and measurements of their masses should be realized at the LHC.



REFERENCES

[1] Allanach B. C. et al., *Mass spectrum in R-parity violating minimal supergravity and benchmark points*, arXiv: hep-ph/0609263.
 [2] Vafa C. et al., *Stringy reflections on LHC*, <http://www.claymath.org/workshops/lhc/>.
 [3] Peveralov E., Skarke H., *Enhanced gauge symmetry in Type II and F-theory compactifications*, arXiv: hep-th/9704129.
 [4] Klemm A., Lian B., Roan S-S., Yau S-T., *Calabi-Yau fourfolds for M- and F-theory compactifications*, arXiv: hep-th/9701023.
 [5] Allanach B. C., *SOFTSUSY2.0: a program for calculating supersymmetric spectra*, arXiv: hep-ph/0104145.

Table 2

particle	Condition	Lower limit (GeV/c ²)	Source	
$\tilde{\chi}_1^\pm$	gaugino $M_{\tilde{\nu}} > 200$ GeV/c ²	103	LEP 2	
	$M_{\tilde{\nu}} > M_{\tilde{\chi}_1^\pm}$	85	LEP 2	
	any $M_{\tilde{\nu}}$	45	Z width	
	Higgsino $M_2 < 1$ TeV/c ²	99	LEP 2	
	GMSB		150	DØ isolated photons
	RPV $LL\bar{E}$ worst case		87	LEP 2
	$LQ\bar{D}$ $m_0 > 500$ GeV/c ²	88	LEP 2	
$\tilde{\chi}_1^0$	indirect any $\tan\beta$, $M_{\tilde{\nu}} > 500$ GeV/c ²	39	LEP 2	
	any $\tan\beta$, any m_0	36	LEP 2	
	any $\tan\beta$, any m_0 , SUGRA Higgs	59	LEP 2 combined	
	GMSB		93	LEP 2 combined
	RPV $LL\bar{E}$ worst case		23	LEP 2
\tilde{e}_R	$e\tilde{\chi}_1^0$ $\Delta M > 10$ GeV/c ²	99	LEP 2 combined	
$\tilde{\mu}_R$	$\mu\tilde{\chi}_1^0$ $\Delta M > 10$ GeV/c ²	95	LEP 2 combined	
$\tilde{\tau}_R$	$\tau\tilde{\chi}_1^0$ $M_{\tilde{\chi}_1^0} < 20$ GeV/c ²	80	LEP 2 combined	
$\tilde{\nu}$		43	Z width	
$\tilde{\mu}_R, \tilde{\tau}_R$	stable	86	LEP 2 combined	
\tilde{t}_1	$c\tilde{\chi}_1^0$ any θ_{mix} , $\Delta M > 10$ GeV/c ²	95	LEP 2 combined	
	any θ_{mix} , $M_{\tilde{\chi}_1^0} \sim \frac{1}{2}M_{\tilde{t}}$	115	CDF	
	any θ_{mix} and any ΔM	59	ALEPH	
	$b\bar{t}\tilde{\nu}$ any θ_{mix} , $\Delta M > 7$ GeV/c ²	96	LEP 2 combined	
\tilde{g}	any $M_{\tilde{q}}$	195	CDF jets+ \cancel{E}_T	
\tilde{q}	$M_{\tilde{q}} = M_{\tilde{g}}$	300	CDF jets+ \cancel{E}_T	

FIGURE 12

- [6] Schmitt M., *Supersymmetry, Part II (Experiment)*, Phys. Lett. **B592** (2004) 1014.

UDC 517.54, 517.57

Yevgen Polulyakh

Institute of mathematics of NAS of Ukraine

E-mail: polulyah@imath.kiev.ua

On conjugate pseudo-harmonic functions

We prove the following theorem. Let U be a pseudo-harmonic function on a surface M^2 . For a real valued continuous function $V : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ to be a conjugate pseudo-harmonic function of U on M^2 it is necessary and sufficient that V is open on level sets of U .

Keywords: *a pseudo-harmonic function, a conjugate, a surface, an interior transformation*

Let M^2 be a surface, i.e. a 2-dimensional and separable manifold, $U : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ be a real-valued function on M^2 . Denote also by

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

the open unit disk in the plane.

Definition 1 (see [1,2]). *A function U is called pseudo-harmonic in a point $p \in M^2$ if there exist a neighbourhood N of p on M^2 and a homeomorphism $T : D \rightarrow N$ such that $T(0,0) = p$ and a function*

$$u = U \circ T : D \rightarrow \mathbb{R}^2$$

is harmonic and not identically constant.

A neighbourhood N is called simple neighbourhood of p .

We can even choose N and T from previous definition to comply with the equality

$$u(z) = U \circ T(z) = \operatorname{Re} z^n + U(p), \quad z = x + iy \in D,$$

for a certain $n = n(p) \in \mathbb{N}$ (see [2]).

Definition 2 (see [1,2]). A function U is called pseudo-harmonic on M^2 if it is pseudo-harmonic in each point $p \in M^2$.

Let $U : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ be a pseudo-harmonic function on M^2 and $V : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ be a real valued function.

Definition 3 (see [1]). A function V is called a conjugate pseudo-harmonic function of U in a point $p \in M^2$ if there exist a neighbourhood N of p on M^2 and a homeomorphism $T : D \rightarrow N$ such that $T(0,0) = p$ and

$$u = U \circ T : D \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{and} \quad v = V \circ T : D \rightarrow \mathbb{R}^2$$

are conjugate harmonic functions.

We can choose N and T from previous definition in such way that

$$\begin{aligned} u(z) &= U \circ T(z) = \operatorname{Re} z^n + U(p), \\ v(z) &= V \circ T(z) = \operatorname{Im} z^n + V(p), \quad z = x + iy \in D, \end{aligned}$$

for a certain $n = n(p) \in \mathbb{N}$ (see [2]).

Definition 4 (see [1]). A function V is called a conjugate pseudo-harmonic function of U on M^2 if it is a conjugate pseudo-harmonic function of U in every $p \in M^2$.

Definition 5. Let U and V be continuous real valued functions on a surface M^2 . We say that V is open on level sets of U if for every $c \in U(M^2)$ a mapping

$$V|_{U^{-1}(c)} : U^{-1}(c) \rightarrow \mathbb{R}$$

is open on the space $U^{-1}(c)$ in the topology induced from M^2 .

Theorem 1. Let U be a pseudo-harmonic function on M^2 . For a real valued continuous function $V : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ to be a conjugate pseudo-harmonic function of U on M^2 it is necessary and sufficient that V is open on level sets of U .

Let us remind following definition.

Definition 6 (see [3]). A mapping $G : M_1^2 \rightarrow M_2^2$ of a surface M_1^2 to a surface M_2^2 is called interior if it complies with conditions:

- 1) G is open, i. e. an image of any open subset of M_1^2 is open in M_2^2 ;
- 2) for every $p \in M_2^2$ its full preimage $G^{-1}(p)$ does not contain any nondegenerate continuum (closed connected subset of M_1^2).

In order to prove theorem 1 we need following

Lemma 1. Let U be a pseudo-harmonic function on M^2 . Let a real valued continuous function V be open on level sets of U .

Then the mapping $F : M^2 \rightarrow \mathbb{C}$,

$$F(p) = U(p) + iV(p), \quad p \in M^2$$

is interior.

First we will verify one auxiliary statement. Denote $I = [0, 1]$, $\overset{\circ}{I} = (0, 1) = I \setminus \{0, 1\}$.

Proposition 1. In the condition of Lemma 1 the following statement holds true.

Let $\gamma : I \rightarrow M^2$ be a simple continuous curve and $\gamma(I) \subseteq U^{-1}(c)$ for a certain $c \in \mathbb{R}$. If the set $\gamma(\overset{\circ}{I})$ is open in $U^{-1}(c)$ in the topology induced from M^2 , then the function $V \circ \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$ is strictly monotone.

Proof. Suppose that contrary to the statement of Proposition the equality $V \circ \gamma(\tau_1) = V \circ \gamma(\tau_2)$ is valid for certain $\tau_1, \tau_2 \in I$, $\tau_1 < \tau_2$.

Since the function $V \circ \gamma$ is continuous and a set $[\tau_1, \tau_2]$ is compact, then following values

$$d_1 = \min_{t \in [\tau_1, \tau_2]} V \circ \gamma(t),$$

$$d_2 = \max_{t \in [\tau_1, \tau_2]} V \circ \gamma(t),$$

are well defined. Let us fix $s_1, s_2 \in [\tau_1, \tau_2]$ such that $d_i = V \circ \gamma(s_i)$, $i = 1, 2$.

We designate $W = (\tau_1, \tau_2)$. It is obviously the open subset of \mathring{I} . Let us consider first the case $d_1 = d_2$. It is clear that

$$[\tau_1, \tau_2] \subseteq (V \circ \gamma)^{-1}(d_1)$$

in this case. So the open subset $\gamma(W)$ of the level set $U^{-1}(c)$ is mapped by V onto a one-point set $\{d_1\}$ which is not open in \mathbb{R} and V is not open on level sets of U .

Assume now that $d_1 \neq d_2$. Since $V \circ \gamma(\tau_1) = V \circ \gamma(\tau_2)$ due to our previous supposition, then either s_1 or s_2 is contained in W .

Let $s_1 \in W$ (the case $s_2 \in W$ is considered similarly). Then $V \circ \gamma(W) \subseteq [d_1, +\infty)$ and the open subset $\gamma(W)$ of the level set $U^{-1}(c)$ can not be mapped by V to an open subset of \mathbb{R} since its image contains the frontier point $d_1 = V \circ \gamma(s_1)$. So, in this case V is not open on level sets of U .

The contradiction obtained shows that our initial supposition is false and the function $V \circ \gamma$ is strictly monotone on I . \square

Proof of Lemma 1. Let $p \in M^2$ and Q be an open neighbourhood of p .

We are going to show that the set $F(Q)$ contains a neighbourhood of $F(p)$. At the same time we shall show that p is an isolated point of a level set $F^{-1}(F(p))$.

Without loss of generality we can assume that $U(p) = V(p) = 0$.

Let N be a simple neighbourhood of p and $T : D \rightarrow N$ be a homeomorphism such that for a certain $n \in \mathbb{N}$ the following equality holds true $u(z) = U \circ T(z) = \operatorname{Re} z^n$, $z \in D$ (see Definition 1 and the subsequent remark). It is clear that without losing generality we can regard that N is small enough to be contained in Q .

Observe that for an arbitrary level set Γ of U an intersection $\Gamma \cap T(D) = \Gamma \cap N$ is open in Γ . Consequently, since T is homeomorphism then a mapping $v = V \circ T : D \rightarrow \mathbb{R}$ is open on level sets of $u = U \circ T : D \rightarrow \mathbb{R}$ (see Definition 5).

Let us consider two possibilities.

Case 1. Zero is a regular point of the smooth function $u = U \circ T$, i. e. $n = 1$ and $u(z) = \operatorname{Re} z$, $z \in D$.

In this case

$$u^{-1}(u(0)) = u^{-1}(U(p)) = T^{-1}(U^{-1}(U(p))) = \{0\} \times (-1, 1).$$

According to Proposition 1 the function v is strictly monotone on every segment which is contained in this interval, so it is strictly monotone on $\{0\} \times (-1, 1)$. Consequently, for points $z_1 = 0 - i/2$ and $z_2 = 0 + i/2$ the following inequality holds true $v(z_1) \cdot v(z_2) < 0$.

Let us note that from previous it follows that V is monotone on the arc $\beta = T(\{0\} \times (-1, 1)) = U^{-1}(U(p)) \cap N$. And since $F^{-1}(F(p)) \cap N \subset \beta$ then $F^{-1}(F(p)) \cap N = \{p\}$ and p is an isolated point of its level set $F^{-1}(F(p))$.

Let $d_1 = v(z_1) < 0$ and $d_2 = v(z_2) > 0$ (The case $d_1 > 0$ and $d_2 < 0$ is considered similarly). Denote

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \min(|d_1|, |d_2|) > 0.$$

Function v is continuous, so there exists $\delta > 0$ such that following implications are fulfilled

$$\begin{aligned} |z - z_1| < \delta &\Rightarrow |v(z) - d_1| < \varepsilon, \\ |z - z_2| < \delta &\Rightarrow |v(z) - d_2| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Let us examine a neighbourhood $W = (-\delta, \delta) \times (-1/2, 1/2)$ of 0, which is depicted on Figure 13. It can be easily seen that for every $x \in (-\delta, \delta)$ following relations are valid

$$\begin{aligned} u(x + iy) &= x, \quad y \in (-\varepsilon, \varepsilon), \\ v(x - i/2) &< v(z_1) + \varepsilon < -2\varepsilon + \varepsilon = -\varepsilon, \\ v(x + i/2) &> v(z_2) - \varepsilon > 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

From two last lines and from the continuity of v on a segment $\{x\} \times [-1/2, 1/2]$ it follows that $v(\{x\} \times [-1/2, 1/2]) \supseteq (-\varepsilon, \varepsilon)$. Therefore

$$F \circ T(\{x\} \times [-1/2, 1/2]) \supseteq \{x\} \times (-\varepsilon, \varepsilon), \quad x \in (-\delta, \delta).$$

Since $T(W) \subseteq N \subseteq Q$ by the choice of N , then

$$0 = F(p) \in (-\delta, \delta) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq F \circ T(W) \subseteq F(Q).$$

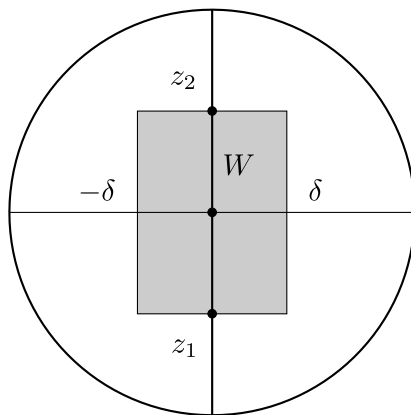


FIGURE 13

Case 2. Zero is a saddle point of $u = U \circ T$, i. e. $u(z) = \operatorname{Re} z^n$, $z \in D$ for a certain $n > 1$.

In this case

$$u^{-1}(u(0)) = T^{-1}(U^{-1}(U(p))) = \{0\} \cup \bigcup_{k=0}^{2n-1} \gamma_k,$$

where $\gamma_k = \{z \in D \mid z = a \cdot \exp(\pi i(k - 1/2)/n), a \in (0, 1)\}$, $k = 1, \dots, 2n - 1$.

As above, applying Proposition 1 we conclude that function

$$v = V \circ T$$

is strictly monotone on each arc γ_k , $k = 1, \dots, 2n - 1$. Since v is continuous and 0 is a boundary point for each γ_k , then

$$v(z) \neq v(0)$$

for all $z \in \bigcup_k \gamma_k$. Therefore, $0 = (F \circ T)^{-1}(F \circ T(0))$ and $F^{-1}(F(p)) \cap N = \{p\}$, i. e. p is the isolated point if its level set $F^{-1}(F(p))$.

Let us designate by

$$R_k = \left\{ z \in D \mid z = ae^{i\varphi}, a \in [0, 1), \varphi \in \left[\frac{\pi(k-1/2)}{2}, \frac{\pi(k+1/2)}{2} \right] \right\},$$

$$k = 0, \dots, 2n - 1$$

sectors on which disk D is divided by the level set $u^{-1}(u(0))$.

We also denote

$$D_l = \{z \in D \mid \operatorname{Re} z \leq 0\},$$

$$D_r = \{z \in D \mid \operatorname{Re} z \geq 0\}.$$

Consider map $\Phi : D \rightarrow D$ given by the formula $\Phi(z) = z^n$, $z \in D$. It is easy to see that for every $k \in \{0, \dots, 2n-1\}$ depending on its parity sector R_k is mapped homeomorphically by Φ either onto D_l or onto D_r . Let a mapping $\Phi_k : R_k \rightarrow D_r$ is given by relation

$$\Phi_k = \begin{cases} \Phi|_{R_k}, & \text{if } k = 2m, \\ \operatorname{Inv} \circ \Phi|_{R_k}, & \text{if } k = 2m + 1, \end{cases} \quad k = 0, \dots, 2n - 1,$$

where $\operatorname{Inv} : D \rightarrow D$ is defined by formula $\operatorname{Inv}(z) = -z$, $z \in D$. Evidently, all Φ_k are homeomorphisms.

We consider now inverse mappings $\varphi_k = \Phi_k^{-1} : D_r \rightarrow D$, $k = 0, \dots, 2n - 1$. By construction all of these mappings are embeddings. Moreover, it is easy to see that

$$u_k(z) = u \circ \varphi_k(z) = \begin{cases} \operatorname{Re} z, & \text{when } k = 2m, \\ -\operatorname{Re} z, & \text{when } k = 2m + 1. \end{cases}$$

Let us fix $k \in \{0, \dots, 2n - 1\}$. It is clear that φ_k homeomorphically maps a domain

$$\mathring{D}_r = \{z \in D \mid \operatorname{Re} z > 0\}$$

onto a domain

$$\mathring{R}_k = \left\{ z \in D \mid z = ae^{i\varphi}, a \in (0, 1), \varphi \in \left(\frac{\pi(k-1/2)}{2}, \frac{\pi(k+1/2)}{2} \right) \right\},$$

so with the help of argument similar to the observation preceding to case 1 we conclude that the mapping $\mathring{v}_k = v \circ \varphi_k|_{\mathring{D}_r} : \mathring{D}_r \rightarrow \mathbb{R}$

is open on level sets of the function $\hat{u}_k = u \circ \varphi_k|_{\hat{D}_r} : \hat{D}_r \rightarrow \mathbb{R}$. As above, applying Proposition 1 we conclude that function \hat{v}_k is strictly monotone on each arc

$$\alpha_c = \hat{u}_k^{-1}(\hat{u}_k(c + 0i)) = \{z \in \hat{D}_r \mid \operatorname{Re} z = c\}, \quad c \in (0, 1).$$

We already know that the function v is strictly monotone on the arcs γ_k and γ_s , where $s \equiv k + 1 \pmod{2n}$. Therefore the function $v_k = v \circ \varphi_k : D_r \rightarrow \mathbb{R}$ is strictly monotone on the arcs

$$\alpha_- = \varphi_k^{-1}(\gamma_k) = \{z \in D_r \mid \operatorname{Re} z = 0 \text{ and } \operatorname{Im} z < 0\},$$

$$\alpha_+ = \varphi_k^{-1}(\gamma_s) = \{z \in D_r \mid \operatorname{Re} z = 0 \text{ and } \operatorname{Im} z > 0\}.$$

Let us verify that v_k is strictly monotone on the arc

$$\alpha_0 = \alpha_- \cup \{0\} \cup \alpha_+ = u_k^{-1}(u_k(0)) = \{z \in D_r \mid \operatorname{Re} z = 0\}.$$

Since $v_k(0) = v(0) = V(p) = 0$ according to our initial assumptions and 0 is the boundary point both for α_- and α_+ , then v_k is of fixed sign on each of these two arcs.

So we have two possibilities:

- either v_k has the same sign on α_- and α_+ , then $v_k|_{\alpha_0}$ has a local extremum in 0;
- or v_k has different signs on α_- and α_+ , then v_k is strictly monotone on α_0 .

Suppose that v_k has the same sign on α_- and α_+ .

We will assume that v_k is negative both on α_- and α_+ . The case when v_k is positive on α_- and α_+ is considered similarly.

Denote $z_1 = 0 - i/2 \in \alpha_-$, $z_2 = 0 + i/2 \in \alpha_+$. Let

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{2} \min(|v_k(z_1)|, |v_k(z_2)|) > 0.$$

From the continuity of v_k it follows that there exists $\hat{\delta} > 0$ to comply with the following implications

$$(1) \quad \begin{aligned} |z - z_1| < \hat{\delta} &\Rightarrow |v_k(z) - v_k(z_1)| < \hat{\varepsilon}, \\ |z - z_2| < \hat{\delta} &\Rightarrow |v_k(z) - v_k(z_2)| < \hat{\varepsilon}, \\ |z| = |z - 0| < \hat{\delta} &\Rightarrow |v_k(z) - v_k(0)| = |v_k(z)| < \hat{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Let $c \in (0, \hat{\delta})$. Then the point $w_0 = c + i0$ is situated on the curve α_c between points $w_1 = c - i/2$ and $w_2 = c + i/2$. It follows from (1) that $v_k(w_1) < -\hat{\varepsilon}$, $v_k(w_2) < -\hat{\varepsilon}$ and $v_k(w_0) \in (-\hat{\varepsilon}, 0)$. But these three correlations can not hold true simultaneously since v_k is strictly monotone on α_c as we already know.

The contradiction obtained shows us that v_k has different signs on α_- and α_+ . So, v_k is strictly monotone on α_0 .

Now, repeating argument from case 1 we find such $\varepsilon_k > 0$ and $\delta_k > 0$ that the set

$$\hat{W}_k = [0, \delta_k) \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

meets the relations

$$(2) \quad \begin{aligned} F \circ T \circ \varphi_k(\hat{W}_k) &\supseteq [0, \delta_k) \times (-\varepsilon_k, \varepsilon_k), & \text{if } k = 2m, \\ F \circ T \circ \varphi_k(\hat{W}_k) &\supseteq (-\delta_k, 0] \times (-\varepsilon_k, \varepsilon_k), & \text{if } k = 2m + 1. \end{aligned}$$

Let us denote $W_k = \varphi_k(\hat{W}_k)$,

$$W = \bigcup_{k=0}^{2n-1} W_k, \quad \delta = \min_{k=0, \dots, 2n-1} \delta_k > 0, \quad \varepsilon = \min_{k=0, \dots, 2n-1} \varepsilon_k > 0.$$

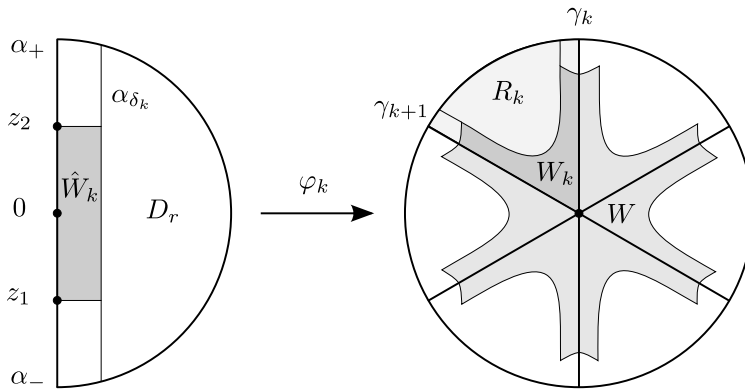


FIGURE 14

It is easy to show that W is an open neighbourhood of 0 in D . From (2) and from our initial assumptions it follows that

$$F(Q) \supseteq F(N) \supseteq F \circ T(W) \supseteq (-\delta, \delta) \times (-\varepsilon, \varepsilon).$$

So, we have proved that for an arbitrary point $p \in M^2$ and its open neighbourhood Q a set $F(Q)$ contains a neighbourhood of $F(p)$. Hence the mapping $F : M^2 \rightarrow \mathbb{C}$ is open.

At the same time we have shown that an arbitrary $p \in M^2$ is an isolated point of its level set $F^{-1}(F(p))$. It is easy to see now that any level set $F^{-1}(F(p))$ can not contain a nondegenerate continuum.

Consequently, the map F is interior. \square

Proof of Theorem 1. Necessity. Let $U, V : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ be conjugate pseudoharmonic functions on M^2 (see Definitions 3 and 4).

Obviously, V is continuous on M^2 . Suppose that contrary to the statement of Theorem there exists such $c \in \mathbb{R}$ that V is not open on the level set $\Gamma_c = U^{-1}(c) \subset M^2$, i. e. a map $V_c = V|_{\Gamma_c} : \Gamma_c \rightarrow \mathbb{R}$ is not open on Γ_c in the topology induced from M^2 .

Let us verify that V_c has a local extremum in some $p \in \Gamma_c$.

Note that the space Γ_c is locally arcwise connected, i. e. for every point $a \in \Gamma_c$ and its open neighbourhood Q there exists a neighbourhood $\hat{Q} \subseteq Q$ of a such that every two points $b_1, b_2 \in \hat{Q}$ can be connected by a continuous curve in Q . This is a straightforward corollary of the remark subsequent to Definition 1.

Since the map V_c is not open by our supposition, then there exists an open subset O of Γ_c such that its image $R = V_c(O)$ is not open in \mathbb{R} . Therefore there is a point $d \in R \setminus \text{Int } R$. Fix $p \in V_c^{-1}(d) \cap O$.

Let us show that p is a point of local extremum of V_c . Fix a neighbourhood $\hat{O} \subseteq O$ of p such that every two points $b_1, b_2 \in \hat{O}$ can be connected by a continuous curve $\beta_{b_1, b_2} : I \rightarrow \Gamma_c$ which meets relations $\beta(0) = b_1, \beta(1) = b_2$ and $\beta(I) \subseteq O$. It is clear that an image of a path-connected set under a continuous mapping is

path-connected, therefore following inclusions are valid

$$\begin{aligned} (V_c(b_1), V_c(b_2)) &\subset V_c(I) \quad \text{if } V_c(b_1) < V_c(b_2), \\ (V_c(b_2), V_c(b_1)) &\subset V_c(I) \quad \text{if } V_c(b_2) > V_c(b_1). \end{aligned}$$

Evidently, p is not an interior point of $V_c(\hat{O})$ since it is not the interior point of $V_c(O)$ by construction and $V_c(\hat{O}) \subseteq V_c(O)$. Then there does not exist a pair of points $b_1, b_2 \in \hat{O}$ such that

$$V_c(b_1) < V_c(p) < V_c(b_2)$$

and either $V(b) \leq V(p)$ for all $b \in \hat{O}$ or $V(b) \geq V(p)$ for all $b \in \hat{O}$, i. e. p is the point of local extremum of V_c .

Now, since V is the conjugate pseudo-harmonic function of U in the point p (see Definition 3), we can take by definition a neighbourhood N of p in M^2 and a homeomorphism $T : D \rightarrow N$ such that a map $f : D \rightarrow \mathbb{C}$

$$f(z) = u(z) + iv(z), \quad z \in D$$

is holomorphic on D . Here

$$u = U \circ T : D \rightarrow \mathbb{R}$$

and

$$v = V \circ T : D \rightarrow \mathbb{R}.$$

It is clear that without loss of generality we can choose N so small that either $V(b) = V_c(b) \leq V_c(p) = V(p)$ for every $b \in N \cap \Gamma_c$ or $V(b) \geq V(p)$ for all $b \in N \cap \Gamma_c$.

Let for definiteness p is the local maximum of V_c and

$$V(b) \leq V(p)$$

for every $b \in N \cap \Gamma_c$. The case when p is the local minimum of V_c is considered similarly.

On one hand it follows from what we said above that

$$(\{U(p)\} \times (V(p), +\infty)) \cap f(D) = \emptyset$$

since $u^{-1}(U(p)) = T^{-1}(\Gamma_c \cap N)$ and $v(z) = V(T(z)) \leq V(p)$ for all $z \in T^{-1}(\Gamma_c \cap N)$ by construction. Therefore a point

$$U(p) + iV(p) = f(T^{-1}(p))$$

is not the interior point of a set $f(D)$.

On the other hand it is known that the holomorphic map f is open, so the point $f(T^{-1}(p))$ must be the interior point of the domain $f(D)$.

The contradiction obtained shows that our initial assumption is false and V is open on level sets of U .

Sufficiency. Let U be a pseudo-harmonic function on M^2 and a continuous function $V : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ be open on level sets of U .

From Lemma 1 it follows that the mapping $F : M^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $F(p) = U(p) + iV(p)$, $p \in M^2$ is interior.

Let $p \in M^2$ and N is a simple neighbourhood of p in M^2 . Then there exists a homeomorphism $T : D \rightarrow N$. It is straightforward that for the open set N a mapping $F_N = F|_N : N \rightarrow \mathbb{C}$ is interior and its composition $F_N \circ T = F \circ T : D \rightarrow \mathbb{C}$ with the homeomorphism T is also an interior mapping.

Now from Stoilov theorem it follows that there exists a complex structure on D such that the mapping $F \circ T$ is holomorphic in this complex structure (see [3]). But from the uniformization theorem (see [4]) it follows that a simple-connected domain has a unique complex structure. So the mapping $F \circ T$ is holomorphic on D in the standard complex structure. Thus the functions

$$u = \operatorname{Re}(F \circ T) = U \circ T$$

and

$$v = \operatorname{Im}(F \circ T) = V \circ T$$

are conjugate harmonic functions on D . Consequently, V is a conjugate pseudo-harmonic function of U in the point p .

From arbitrariness in the choice of $p \in M^2$ it follows that V is a conjugate pseudo-harmonic function of U on M^2 . \square

Corollary 1. *Let $U, V : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ be conjugate pseudoharmonic functions on M^2 .*

Then there exists a complex structure on M^2 with respect to which U and V are conjugate harmonic functions on M^2 .

Proof. This statement follows from Theorem 1, Lemma 1 and the Stoilov theorem which says that there exists a complex structure on M^2 such that the interior mapping $F(p) = U(p) + iV(p)$, $p \in M^2$ is holomorphic in this complex structure (see [3]). \square

REFERENCES

- [1] Tôki Y., A topological characterization of pseudo-harmonic functions, Osaka Math. Journ. — 1951 — V.3, N 1. — P. 101–122.
- [2] Morse M., Topological methods in the theory of functions of a complex variable. — Princeton, 1947.
- [3] С. Стоилов, Лекции о топологических принципах теории аналитических функций. — М.: Наука, 1964. — 228 с.
- [4] Forster O., Lectures on Riemann Surfaces. // Springer Graduate Texts in Math. — 1981. — V. 81.

V. V. Sharko

*Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Tereshchenkivs'ka
st. 3, Kyiv, 01601 Ukraine*

E-mail: sharko@imath.kiev.ua

Morse-Bott functions on manifolds with semi-free circle action

Let W^{2n} be a closed manifold of dimension ≥ 6 with semi-free circle having finitely many fixed points. We study S^1 -invariant Morse-Bott functions on W^{2n} . The aim of this paper is to obtain exact values of minimal numbers of singular circles of some indexes of S^1 -invariant Morse-Bott functions on W^{2n} .

Keywords: *Semi-free circle action, manifold, Morse-Bott function, Morse number.*

1. S^1 -INVARIANT MORSE-BOTT FUNCTIONS

Let W^{2n} be a closed smooth manifold. Suppose that W^{2n} admits a smooth semi-free circle action with finitely many fixed points. It is known that every isolated fixed point p of a semi-free S^1 -action has the following important property: near such a point the action is equivalent to a certain linear $S^1 = SO(2)$ -action on \mathbb{R}^{2n} . More precisely, for every isolated fixed point p there exist an open invariant neighborhood U of p and a diffeomorphism h from U to an open unit disk D in \mathbb{C}^n centered at origin such that h conjugates the given S^1 -action on U to the S^1 -action on \mathbb{C}^n with weight $(1, \dots, 1)$. We will use both complex, (z_1, \dots, z_n) , and real coordinates $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ on $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ with $z_i = x_i + \sqrt{-1}y_i$. The pair (U, h) will be called a **standard chart** at the point p . Let $f : W^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ be a smooth S^1 -invariant function on the manifold W^{2n} . Denote by Σ_f the set of singular points of the function

f . It is clear that the set of isolated singular points $\Sigma_f(p_i) \subset \Sigma_f$ of f coincides with the set of fixed points W^{S^1} .

A point $p \in W^{S^1}$ is **nondegenerate** if the Hessian of the function f at p is nondegenerate. For a nondegenerate fixed point p there exist a standard chart (U, h) such that on U the function f is given by the following formula:

$$f = f(p) - |z_1|^2 - \dots - |z_\lambda|^2 + |z_{\lambda+1}|^2 + \dots + |z_n|^2.$$

Notice that the index of nondegenerate fixed point p is always even.

Denote by $\Sigma_f(S^1)$ the set singular points of the function f that are disconnected union of circles. These circles will be called **singular**.

A circle $s \in \Sigma_f(S^1)$ is called **nondegenerate** if there is an S^1 -invariant neighborhood U of s on which S^1 acts freely and such that the point $\pi(s)$ is nondegenerate for the function

$$\pi_*(f) : U/S^1 \rightarrow \mathbb{R},$$

induced on U/S^1 by the natural map $\pi : U \rightarrow U/S^1$. An invariant version of Morse lemma says that there exist an S^1 -invariant neighborhood U of the circle s and coordinates (x_1, \dots, x_{2n-1}) on U/S^1 such that the function $\pi_*(f)$ has the following presentation:

$$\pi_*(f) = \pi_*(f(\pi(s))) - |x_1|^2 - \dots - |x_\nu|^2 + |x_{\nu+1}|^2 + \dots + |x_{2n-1}|^2.$$

By definition ν is the **index** of singular circle s .

Definition 1. A smooth S^1 -invariant function $f : W^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ on a manifold W^{2n} with a semi-free circle action which has isolated fixed points is called an S^1 -invariant Morse-Bott function if each connected component of the singular set Σ_f is either a nondegenerate fixed point or a nondegenerate critical circle, [3].

Definition 2. Assume that W^{2n} is the closed manifold with a smooth semi-free circle action which has isolated fixed points p_1, \dots, p_k . For any fixed point p_i there exists a standard chart (U_i, h_i) such that each U_i is diffeomorphic to the unit disk D^{2n} in

\mathbb{C}^n and that U_i are pairwise disjoint. Take any **arbitrary integer** $\lambda_i = 0, 1, \dots, n$ and define the following function on $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$ by

$$f_i = f_i(p_i) - |z_1|^2 - \dots - |z_{\lambda_i}|^2 + |z_{\lambda_i+1}|^2 + \dots + |z_n|^2.$$

Theorem 1. *Every smooth semi-free circle action on a closed manifold with isolated fixed points p_1, \dots, p_k has an S^1 -invariant Morse-Bott function f such that $f = f_i$ on U_i .*

Proof. From results of paper [2] it follows that functions f_i can be extended from U_i to $W^{2n} \setminus \bigcup U_i$. \square

Theorem 2. *The number of fixed points of any smooth semi-free circle action on W^{2n} with isolated fixed points is always even and equal to the Euler characteristic, $\chi(W^{2n})$, of the manifold W^{2n} .*

Proof. By Theorem 1 we construct on U_1 the function

$$f_1 = f_1(p_1) + |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2,$$

on U_j , ($j \geq 2$) the function

$$f_j = f_j(p_i) - |z_1|^2 - \dots - |z_n|^2$$

and extend such functions to S^1 -invariant Morse-Bott function f on $W^{2n} \setminus \bigcup U_i$. Since the manifold CP^n is non-cobordant to zero it follows that the number of fixed points of any smooth semi-free circle action on W^{2n} with isolated fixed points is equal to the Euler characteristic $\chi(W^{2n}) = 2k$ of W^{2n} . \square

Definition 3. *Let f be an S^1 -invariant Morse-Bott function for smooth semi-free circle action with isolated fixed points p_1, \dots, p_{2k} on a closed manifold W^{2n} . Suppose that the index of a critical point p_i of f is λ_i . **The state of f** is the collection of numbers $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2k}$, which we will be denoted by $St_f(\lambda_i)$.*

Remark 1. *From Theorem 1 it follows that for every smooth semi-free circle action on a closed manifold W^{2n} with isolated fixed points p_1, \dots, p_{2k} and any collection numbers $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2k}$, such that $0 \leq \lambda_i \leq 2n$ there exists an S^1 -invariant Morse-Bott functions*

f on W^{2n} with state $St_f(\lambda_i)$. Such a collection of numbers will be denoted by $St(\lambda_i)$ and called a **state**.

Definition 4. Let W^{2n} be a closed smooth manifold with smooth semi-free circle action which has finitely many fixed points. The S^1 -equivariant Morse number $\mathcal{M}_{S^1}^\nu(W^{2n}, St(\lambda_i))$ of index ν of a state $St(\lambda_i)$ of W^{2n} is the minimum number of singular circles of index ν taken over all S^1 -invariant Morse-Bott functions on W^{2n} with state $St(\lambda_i)$.

The S^1 -equivariant Morse number $\mathcal{M}_{S^1}^\nu(W^{2n})$ of index ν of W^{2n} is the minimum number of $\mathcal{M}_{S^1}^\nu(W^{2n}, St(\lambda_i))$ taken over all states.

The S^1 -equivariant Morse number $\mathcal{M}_{S^1}(W^{2n}, St(\lambda_i))$ of a state $St(\lambda_i)$ is the minimum number of singular circles of all indices taken over all S^1 -invariant Morse-Bott functions on W^{2n} with state $St(\lambda_i)$.

The S^1 -equivariant Morse number $\mathcal{M}_{S^1}(W^{2n})$ of W^{2n} is the minimum number of $\mathcal{M}_{S^1}(W^{2n}, St(\lambda_i))$ taken over all states.

There is an unsolved problem: for a manifold W^{2n} with a semi-free circle action which has finitely many fixed points **find exact values of the numbers** $\mathcal{M}_{S^1}^\nu(W^{2n}, St(\lambda_i))$, $\mathcal{M}_{S^1}^\nu(W^{2n})$, $\mathcal{M}_{S^1}(W^{2n}, St(\lambda_i))$, and $\mathcal{M}_{S^1}(W^{2n})$.

Definition 5. An S^1 -invariant Morse-Bott function f on the manifold W^{2n} with semi-free circle action which has finitely many fixed points is

minimal for index ν of a state $St(\lambda_i)$ if the number of singular circles of f of index ν is equal to $\mathcal{M}_{S^1}^\nu(W^{2n}, St(\lambda_i))$;

minimal for index ν if the number of singular circles of f of index ν is equal to $\mathcal{M}_{S^1}^\nu(W^{2n})$;

minimal for state $St(\lambda_i)$ if the number of all singular circles of f is equal to $\mathcal{M}_{S^1}(W^{2n}, St(\lambda_i))$;

minimal if the number of all singular circles of f is equal to $\mathcal{M}_{S^1}(W^{2n})$.

Theorem 3. Let W^{2n} ($2n > 5$) be a closed smooth simply-connected manifold admits a smooth semi-free circle action with isolated fixed points p_1, \dots, p_{2k} . Then on the manifold W^{2n} for the state $St(\underbrace{0, \dots, 0}_l, \underbrace{2n, \dots, 2n}_{2k-l})$ there exists a minimal (minimal for

index ν) S^1 -invariant Morse-Bott function g for the state

$$St(\underbrace{0, \dots, 0}_l, \underbrace{2n, \dots, 2n}_{2k-l})$$

and

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{S^1}(W^{2n}, St(\underbrace{0, \dots, 0}_l, \underbrace{2n, \dots, 2n}_{2k-l})) &= \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \mu(H_i((W^{2n}/S^1) \setminus (p_{l+1} \cup \dots \cup p_{2k}), p_1, \dots, p_l, \mathbb{Z})) + \\ &+ \sum_{i=2}^{n-2} \mu(Tors(H_i((W^{2n}/S^1) \setminus (p_{l+1} \cup \dots \cup p_{2k}), p_1, \dots, p_l, \mathbb{Z})), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{M}_{S^1}^\nu(W^{2n}, St(\underbrace{0, \dots, 0}_l, \underbrace{2n, \dots, 2n}_{2k-l}))) &= \\ &= \mu(H_\nu((W^{2n}/S^1) \setminus (p_{l+1} \cup \dots \cup p_{2k}), p_1, \dots, p_l, \mathbb{Z})) + \\ &+ \mu(Tors(H_{\nu-1}((W^{2n}/S^1) \setminus (p_{l+1} \cup \dots \cup p_{2k}), p_1, \dots, p_l, \mathbb{Z}))), \end{aligned}$$

where $0 \leq l \leq 2k$ ($\mu(H)$ – minimal number of generators of group H).

Proof. Choose an invariant neighborhood U_i of the point p_i diffeomorphic to the unit disc $D^{2n} \subset \mathbb{C}^n$ and set $U = \bigcup_i U_i$. Consider the manifold $V^{2n} = (W^{2n} \setminus U)/S^1$. It is clear that its boundary is a disconnected union of complex projective spaces

$$\partial V^{2n} = \mathbb{C}P_1^{2n-2} \cup \dots \cup \mathbb{C}P_k^{2n-2}.$$

The set W^{2n}/S^1 is simply-connected. It is easy to see using van Kampen theorem that $(W^{2n} \setminus U)/S^1$ is simply-connected as well. From S. Smale's theorem [4] it follows that on $(W^{2n} \setminus U)/S^1$ there exists a minimal Morse function which we used to construct an S^1 -invariant Morse-Bott function g for state

$$St(\underbrace{0, \dots, 0}_1, \underbrace{2n, \dots, 2n}_{2k-l})$$

on the manifold W^{2n} . The values of

$$\mathcal{M}_{S^1}(W^{2n}, St(\underbrace{0, \dots, 0}_1, \underbrace{2n, \dots, 2n}_{2k-l}))$$

and

$$\mathcal{M}_{S^1}^\nu(W^{2n}, St(\underbrace{0, \dots, 0}_1, \underbrace{2n, \dots, 2n}_{2k-l}))$$

follow from S. Smale's theorem and simple homology calculation. \square

Remark 2. *Using diagrams technique, [1], one can give estimates for equivariant Morse number for other states. This will be made in forthcoming paper.*

REFERENCES

- [1] V. V. Sharko. Functions on Manifolds: Algebraic and topological aspects, Translations of Mathematical Monographs, 131, American Mathematical Society, 1993.
- [2] A. Jankowski, R. Rubinsztein. Functions with non-degenerate critical points on manifolds with boundary // Comment. Math. Prace Mat. – 1972. – V. 16. – PP. 99–112.
- [3] M. Kogan. Existence of perfect Morse functions on spaces with semi-free circle action // Journal of Symplectic Geometry. – 2003. – V. 1. – PP. 829–850.
- [4] S. Smale. On the structure of manifolds // Amer. Journal of Math. – 1962. – V. 84. – PP. 387–399.

S. G. Solodky

*Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of
Ukraine*

E-mail: solodky@imath.kiev.ua

E. A. Volynets

*Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of
Ukraine*

On the efficient method of solving ill-posed problems by adaptive discretization

To solve ill-posed problems $Ax = f$ is used the Fakeev-Lardy regularization, using an adaptive discretization strategy. It is shown that for some classes of finitely smoothing operators proposed algorithm achieves the optimal order of accuracy and is more economical in the sense of amount of discrete information then standard methods.

Keywords: *optimal approximations, order of accuracy, ill-posed problems, Fakeev-Lardy method, discrepancy principle*

1. INTRODUCTION. STATEMENT OF THE PROBLEM

In a Hilbert space X with inner product (\cdot, \cdot) and norm

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}$$

we consider the operator equation of the first kind

$$(1) \quad Ax = f,$$

where A is a compact linear operator in X and $f \in \text{Range}(A)$. Suppose that instead of the exact right-hand side of (1) some its perturbation $f_\delta : \|f - f_\delta\| \leq \delta, \delta > 0$ is available only.

We will construct approximations to minimal-norm solution x^\dagger of (1) that satisfies the Holder-type source condition, i.e.

$$(2) \quad x^\dagger \in M_{\nu,\rho}(A) = \{u : u = |A|^\nu v, \|v\| \leq \rho\},$$

$$|A| = (A^*A)^{1/2}, \quad \rho \geq 1,$$

where A^* is the adjoint of A and the parameter $\nu > 0$ is unknown.

Consider a class \mathcal{H}^r , $r = 1, 2, \dots$, of compact linear operators A , $\|A\| \leq 1$, such that for any $m = 1, 2, \dots$ the conditions

$$(3) \quad \|(I - P_m)A\| \leq m^{-r}, \quad \|A(I - P_m)\| \leq m^{-r}$$

are satisfied, where P_m is the orthoprojector onto linear span of the first m elements of some orthonormal basis $E = \{e_i\}_{i=1}^\infty$ in space X .

As an example of equation (1) with operator $A \in \mathcal{H}^r$ in the space $X = L_2(0, 1)$ one can take Fredholm integral equation of the first kind

$$Ax(t) \equiv \int_0^1 k(t, \tau)x(\tau)d\tau = f(t),$$

where $\max_{0 \leq t, \tau \leq 1} |k(t, \tau)| \leq 1$, operators A and A^* act from $L_2(0, 1)$ into the Sobolev space $W_2^r[0, 1]$ and as basis E is selected the orthonormal system of Legendre polynomials or (if $r = 1$) the orthonormal system of Haar functions.

It is known (see [11, p. 14]) that the best accuracy of recovering minimal-norm solutions of (1) that fill up set $M_{\nu,\rho}(A)$ can be lower estimated by

$$\rho^{1/(\nu+1)} \delta^{\nu/(\nu+1)}.$$

This is because every method guaranteeing approximation accuracy $O(\delta^{\nu/(\nu+1)})$ on the set of solutions (2) is referred to as order-optimal approximate method for solving (1).

In this paper we investigate projection methods of solving (1) that using Galerkin information as discrete information about (1).

Remind that by Galerkin information about equation (1) one usually mean a set of inner products

$$(4) \quad (Ae_j, e_i), \quad (f_\delta, e_i).$$

The volume of inner products (4) used to approximate solve (1) characterizes economical properties of corresponding projection methods.

Obviously that to construct economical projection method special attention must be put to effective choice of set Ω of indices (i, j) for inner products (Ae_j, e_i) which form discrete operator A_Ω .

In the first time the problem of constructing economical projection methods for solving (1) was studied in [3] in the framework of traditional Galerkin discretization scheme with $\Omega = [1, m] \times [1, n]$. From [3] it is follows that to guarantee the optimal order of accuracy we need to choose $n \asymp m \asymp O(\delta^{-1/r})$, i.e. to compute at least $O(\delta^{-2/r})$ inner products (4).

Statement of the problem. Our aim is to construct an algorithm of solving (1) on class of operators \mathcal{H}^r such that, firstly, guarantees the optimal order of accuracy for solutions x^\dagger of the form (2) and, secondly, is more economical in the sense of using Galerkin information compare with methods considered in [3].

To construct such algorithm we will use an adaptive approach to discretization that earlier was studied in [1]. To reduce the volume of Galerkin information for this approach it will apply so-called hyperbolic cross (see Section 4) as the area Ω and the discretization level will be selected during computations as following

$$(5) \quad \|A^*A - A_\Omega^*A_\Omega\| = O(\sqrt{\alpha}\delta),$$

where α is a regularization parameter.

For the first time such adaptive discretization scheme was studied in [1] for the standard Tikhonov method. In [6], [8] it was investigated the optimality of the adaptive approach for the stationary iterated Tikhonov method, in [4] for the nonstationary iterated Tikhonov method, in [10] for the generalized Tikhonov

method, in [8], [9] for the Landweber method and in [7] for the method of asymptotical regularization.

It turns out that discretization strategy (1.5) allows to solve the problem formulated for all mentioned above regularization methods. Let us continue these investigations and verify efficiency of adaptive discretization for the Fakeev-Lardy regularizer.

In conclusion we want mention one more adaptive discretization scheme proposed in [2]. In the framework of this scheme the discretization level is chosen as $\|A - A_\Omega\| = O(\sqrt{\alpha}\sqrt{\delta})$, and as area Ω is selected rectangle. It turns out that such approach is not order-optimal and is less economical with compare both nonadaptive scheme in [3] and adaptive scheme in the present paper.

2. FAKEEV-LARDY METHOD

The Fakeev-Lardy method is an iterative procedure of the following type:

$$(6) \quad x_0 = 0; \quad \mu x_l + A^* A x_l = \mu x_{l-1} + A^* f_\delta, \\ l = 1, 2, \dots, \mu = \text{const} > 2/\rho.$$

For generating function of this method

$$g_l(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \left(1 - \left(\frac{\mu}{\mu + \lambda} \right)^l \right) = \sum_{j=0}^{l-1} \frac{\mu^j}{(\mu + \lambda)^{j+1}}, \quad \lambda \neq 0,$$

the following estimates (see [11, p. 22])

$$(7) \quad \sup_{0 \leq \lambda < \infty} g_l(\lambda) = l/\mu; \quad \sup_{0 \leq \lambda < \infty} \lambda g_l(\lambda) \leq 1; \\ \sup_{0 \leq \lambda < \infty} \lambda^{1/2} g_l(\lambda) = (l/\mu)^{1/2}; \quad \sup_{0 \leq \lambda < \infty} \lambda^p (1 - \lambda g_l(\lambda)) \leq \kappa_p l^{-p}; \\ 0 \leq p \leq l, \quad \kappa_0 = 1, \quad \kappa_p = (\mu p)^p, \quad p > 0.$$

are true.

Let λ_k are singular values of operator A and ϕ_k, ψ_k are corresponding singular elements. Then operator A can be written

as

$$A = \sum_k \lambda_k \phi_k(\cdot, \psi_k)$$

and following relations

$$(8) \quad \begin{aligned} x^\dagger &= |A|^\nu v = (A^* A)^{\nu/2} v = \sum_k |\lambda_k|^\nu \psi_k(\psi_k, v), \\ f := Ax^\dagger &= A|A|^\nu v = \sum_k \lambda_k |\lambda_k|^\nu \phi_k(\psi_k, v). \end{aligned}$$

hold.

Then the elements x_l and Ax_l can be written as

$$\begin{aligned} x_l &= g_l(A^* A)|A|^{\nu+2} v = g_l(A^* A) \sum_k |\lambda_k|^{\nu+2} \psi_k(\psi_k, v) = \\ &= \sum_k g_l(|\lambda_k|^2) |\lambda_k|^{\nu+2} \psi_k(\psi_k, v), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ax_l &= \sum_k \lambda_k \phi_k \left(\psi_k, \sum_m g_l(|\lambda_m|^2) |\lambda_m|^{\nu+2} \psi_m(\psi_m, v) \right) = \\ &= \sum_k \lambda_k \phi_k \sum_m |\lambda_m|^{\nu+2} (\psi_m, v) g_l(|\lambda_m|^2) (\psi_k, \psi_m) = \\ &= \sum_k \lambda_k |\lambda_k|^{\nu+2} g_l(|\lambda_k|^2) \phi_k(\psi_k, v). \end{aligned}$$

As it follows from (5) in our approximate method discretized operator can be changed in every step of iterations. Denote as A_l , $l = 1, 2, \dots$, discretized operator corresponding l -th step of iterative process. More detailed this discretization scheme will be considered in Section 4.

Thus a finite-dimensional version of the method (6) has the form

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 &= (\mu I + A_1^* A_1)^{-1} A_1^* f_\delta, \\ \hat{x}_2 &= (\mu I + A_2^* A_2)^{-1} (\mu(\mu I + A_1^* A_1)^{-1} A_1^* + A_2^*) f_\delta, \\ &\dots \\ \hat{x}_l &= \sum_{k=0}^{l-1} \mu^k \left[\prod_{j=0}^k (\mu I + A_{l-j}^* A_{l-j})^{-1} \right] A_{l-k}^* f_\delta. \end{aligned}$$

To prove the optimality of the method we have to estimate error of approximation of minimal-norm solution x^\dagger by elements \hat{x}_l . So in l -th step of iterative process it's holds

$$\begin{aligned} x^\dagger - \hat{x}_l &= g_l(A^* A) A^* (f - f_\delta) + \\ &\quad + (x^\dagger - g_l(A^* A) A^* f) + (g_l(A^* A) A^* f_\delta - \hat{x}_l) \end{aligned}$$

and hence the error can be upper estimated:

$$(9) \quad \|x^\dagger - \hat{x}_l\| \leq \|g_l(A^* A) A^* (f - f_\delta)\| + \|x^\dagger - x_l\| + \|g_l(A^* A) A^* f_\delta - \hat{x}_l\|.$$

Let us estimate now the right-hand side of (9) term by term. Due to conditions (7) on generating function it is immediately follows that for the first term

$$(10) \quad \|g_l(A^* A) A^* (f - f_\delta)\| \leq \|g_l(A^* A) A^*\| \|f - f_\delta\| \leq \delta \sup_{\lambda} \lambda^{1/2} g_l(\lambda) \leq \delta \left(\frac{l}{\mu}\right)^{1/2}.$$

The second term can be represented by (8) as

$$(11) \quad x^\dagger - x_l = (I - g_l(A^* A) A^* A) x^\dagger = \sum_k \left(\frac{\mu}{\mu + \lambda_k^2}\right)^l |\lambda_k|^\nu \psi_k(v, \psi_k).$$

Thus,

$$\|x^\dagger - x_l\|^2 = \sum_k \left(\frac{\mu}{\mu + \lambda_k^2} \right)^{2l} |\lambda_k|^{2\nu} (v, \psi_k)^2,$$

or

$$(12) \quad \|x^\dagger - x_l\|^2 = |c_{\nu,l}(v)|^2 l^{-\nu},$$

where $|c_{\nu,l}(v)|^2 := l^\nu \sum_k \left(\frac{\mu}{\mu + \lambda_k^2} \right)^{2l} |\lambda_k|^{2\nu} (v, \psi_k)^2$.

To estimate (11) we need to estimate $\|Ax_l - f\|$ too. Taking into account (8) and relation

$$1 - \lambda^2 g_l(\lambda^2) = \left(\frac{\mu}{\mu + \lambda^2} \right)^l,$$

we have

$$\|Ax_l - f\|^2 = \mu^{2l} \sum_k |\lambda_k|^{2(\nu+1)} \frac{(v, \psi_k)^2}{(\mu + \lambda_k^2)^{2l}}.$$

and hence

$$(13) \quad \|Ax_l - f\|^2 = |d_{\nu,l}(v)|^2 l^{-(\nu+1)}$$

with $|d_{\nu,l}(v)|^2 := \mu^{2l} \sum_k |\lambda_k|^{2(\nu+1)} \frac{(v, \psi_k)^2}{(\mu + \lambda_k^2)^{2l}} l^{\nu+1}$.

To estimate $\|x^\dagger - x_l\|$ we need the following auxiliary statement.

Lemma 1. For functions $c_{\nu,l}(v)$ and $d_{\nu,l}(v)$ the bounds

$$|c_{\nu,l}(v)| \leq \rho \kappa_{(\nu+1)/2}^{\nu/(\nu+1)}, \quad |d_{\nu,l}(v)| \leq \rho \kappa_{\frac{\nu+1}{2}}$$

hold.

Using Holder’s inequality we have

$$\begin{aligned}
 |c_{\nu,l}(v)|^2 &= \\
 \sum_k \left(\frac{l^{\nu+1} \mu^{2l} \lambda_k^{2(\nu+1)}}{(\mu + \lambda_k^2)^{2l}} (v, \psi_k)^2 \right)^{\frac{\nu}{\nu+1}} &\left(\frac{\mu^{2l}}{(\mu + \lambda_k^2)^{2l}} (v, \psi_k)^2 \right)^{\frac{1}{\nu+1}} \leq \\
 \leq \sum_k \left(\frac{l^{\nu+1} \mu^{2l} \lambda_k^{2(\nu+1)}}{(\mu + \lambda_k^2)^{2l}} (v, \psi_k)^2 \right)^{\frac{\nu}{\nu+1}} &\|v\|^{\frac{2}{\nu+1}} = \\
 &= |d_{\nu,l}(v)|^{\frac{2\nu}{\nu+1}} \rho^{\frac{2}{\nu+1}}.
 \end{aligned}$$

For the second inequality we obtain

$$\begin{aligned}
 |d_{\nu,l}(v)|^2 &\leq l^{\nu+1} \sup_{\lambda} \lambda^{2(\nu+1)} \left(\frac{\mu}{\mu + \lambda^2} \right)^{2l} \sum_k (v, \psi_k)^2 \leq \\
 &\leq \kappa_{(\nu+1)/2}^2 \|v\|^2 = \rho^2 \kappa_{(\nu+1)/2}^2.
 \end{aligned}$$

Substitution of this estimate into previous inequality completes the proof of Lemma.

Thus due to (12) and to the first estimate in Lemma 1 we have

$$(14) \quad \|x^\dagger - x_l\| \leq \rho \kappa_{(\nu+1)/2}^{\nu/(\nu+1)} l^{-\frac{\nu}{2}}.$$

To estimate the last term in (9) we consider the auxiliary operator

$$B_l = \sum_{k=0}^{l-1} \left(\mu^k (\mu I + A^* A)^{-(k+1)} A^* - G_{k,l} A_{l-k}^* \right)$$

with $G_{k,l} = \mu^k \prod_{j=0}^k (\mu I + A_{l-j}^* A_{l-j})^{-1}$.

Then for the third item in the right-hand side of (9) we obtain

$$(15) \quad g_l(A^* A) A^* f_\delta - \hat{x}_l = B_l f_\delta.$$

To estimate norm of the element $B_l f_\delta$ we write down B_l in more suitable form that will be shown in next statement.

Lemma 2. For any $l = 2, 3, \dots$ it holds

$$(16) \quad B_l = \sum_{k=0}^{l-1} \mu^k (\mu I + A^* A)^{-(k+1)} (A^* - A_{l-k}^*) - \sum_{k=1}^l F_k,$$

where

$$(17) \quad \begin{aligned} F_k &= \sum_{j=0}^{l-k} (\mu I + A^* A)^{-j} T_{j,k}, \quad k = 1, \dots, l; \\ T_{j,k} &= D_j \sum_{i=j+1}^l (\mu I + A^* A)^{-(i-j)} T_{i,k-1}, \\ & \qquad \qquad \qquad j = 0, \dots, l-k, \quad k \geq 2; \\ D_j &= (\mu I + A_{l-j}^* A_{l-j})^{-1} (A^* A - A_{l-j}^* A_{l-j}), \quad j = 0, \dots, l-1; \\ T_{j,1} &= D_j \sum_{i=j+1}^l \mu^{i-1} (\mu I + A^* A)^{-(i-j)} A_{l-i+1}^*, \quad j = 0, \dots, l-1. \end{aligned}$$

To reduce computation we introduce into consideration some denotations:

$$\begin{aligned} I_\mu &:= \mu I + A^* A; & J_\mu &:= I_\mu^{-1}; \\ U_j &:= A^* A - A_{l-j}^* A_{l-j}; & H_j &:= D_j J_\mu = (I_\mu - U_j)^{-1} U_j J_\mu. \end{aligned}$$

Quite easy to check that

$$(\mu I + A_{l-j}^* A_{l-j})^{-1} = J_\mu + H_j$$

and $I_\mu, J_\mu, U_j, H_j \in \mathcal{L}(X)$, where $\mathcal{L}(X)$ is the space of linear continuous operators in X .

Further we need to introduce a special operation of substituting operators. Thus suppose that we have sequence of operators

$\{\Phi_i\}, i = 1, 2, \dots, \Phi_i \in \mathcal{L}(X)$, and operator $\Psi \in \mathcal{L}(X)$. The operation of substitution we will note as

$$\Phi \bigoplus_N^M \Psi^{(p)},$$

where $M \geq N \geq 1, p \leq M - N + 1$. This operation affects on product of $M - N + 1$ operators $\Phi_N, \Phi_{N+1}, \dots, \Phi_M$. The main point of the operation consists in replacement of all possible combinations from p distinct operators Φ_i of initial product by the operator Ψ with preserved order of remained $(M - N - p + 1)$ multipliers Φ_i . Thus, as result of described operation we obtain a sum of $\frac{(M-N+1)!}{p!(M-N-p+1)!}$ (distinct!) replacement in such way operators, every of it is the product of p operators Ψ and $(M - N - p + 1)$ operators Φ_i .

The above operation has some properties that will be used in further reasoning. Namely,

$$\begin{aligned} \Phi \bigoplus_N^M \Psi^{(M-N+1)} &= \prod_{j=N}^M \Psi_j, \\ \Phi \bigoplus_N^M \Psi^{(M-N)} &= \sum_{q=0}^{M-N} \left(\prod_{i=0}^{q-1} \Psi_{i+N} \right) \Phi_{N+q} \left(\prod_{s=q+1}^{M-N} \Psi_{s+N} \right), \\ \Phi \bigoplus_N^M \Psi^{(p)} &= \sum_{q=0}^p \left(\prod_{i=0}^{q-1} \Psi_{i+N} \right) \Phi_{N+q} \left(\Phi \bigoplus_{N+q+1}^M \Psi^{(p-q)} \right), \\ & \qquad \qquad \qquad p < M - N. \end{aligned}$$

Let's note operator $G_{k,l}$ in new form with help of above operation:

$$G_{k,l} = \mu^k \prod_{j=0}^k (I_\mu - U_j)^{-1} = \mu^k \prod_{j=0}^k (H_j + J_\mu) =$$

$$\begin{aligned}
&= \mu^k \sum_{i=0}^{k+1} H \bigoplus_0^k J_\mu^{(k-i+1)} = \\
&= \mu^k \left(J_\mu^{k+1} + \sum_{i=1}^{k+1} H \bigoplus_0^k J_\mu^{k-i+1} \right) = \mu^k \left(J_\mu^{k+1} + \sum_{i=1}^{k+1} S_{k,i} \right)
\end{aligned}$$

with $S_{k,i} = H \bigoplus_0^k J_\mu^{(k-i+1)}$.

Then

$$\begin{aligned}
B_l &:= \sum_{k=0}^{l-1} \left(\mu^k J_\mu^{k+1} A^* - \mu^k (J_\mu^{k+1} + \sum_{i=1}^{k+1} S_{k,i}) A_{l-k}^* \right) = \\
&= \sum_{k=0}^{l-1} \mu^k J_\mu^{k+1} (A^* - A_{l-k}^*) - \sum_{k=0}^{l-1} \mu^k \left(\sum_{i=1}^{k+1} S_{k,i} \right) A_{l-k}^* = \\
&= \sum_{k=0}^{l-1} \mu^k J_\mu^{k+1} (A^* - A_{l-k}^*) - \sum_{j=1}^l \sum_{k=j-1}^{l-1} \mu^k S_{k,j} A_{l-k}^*.
\end{aligned}$$

Denote

$$\hat{F}_j := \sum_{j=1}^l \sum_{k=j-1}^{l-1} \mu^k S_{k,j} A_{l-k}^*$$

and establish that $F_j = \hat{F}_j$.

At first we consider the case $j = 1$

$$\hat{F}_1 = \sum_{k=0}^{l-1} (\mu^k S_{k,1}) A_{l-k}^* = \sum_{k=0}^{l-1} \mu^k \left(H \bigoplus_0^k J_\mu^{(k)} \right) A_{l-k}^* =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=0}^{l-1} \mu^k \left(\sum_{q=0}^k J_{\mu}^q H_q J_{\mu}^{k-q} \right) A_{l-k}^* = \sum_{q=0}^{l-1} J_{\mu}^q H_q \sum_{k=q}^{l-1} \mu^k J_{\mu}^{k-q} A_{l-k}^* = \\
 &= \sum_{j=0}^{l-1} J_{\mu}^j H_j \sum_{i=j+1}^l \mu^{i-1} J_{\mu}^{i-j-1} A_{l-i+1}^* = \\
 &= \sum_{j=0}^{l-1} J_{\mu}^j H_j J_{\mu}^{-1} \sum_{i=j+1}^l \mu^{i-1} J_{\mu}^{i-j} A_{l-i+1}^* = \sum_{j=0}^{l-1} J_{\mu}^j T_{j,1}.
 \end{aligned}$$

Let now $j \geq 2$. Then

$$\begin{aligned}
 \hat{F}_j &= \sum_{k=j-1}^{l-1} \mu^k S_{k,j} A_{l-k}^* = \sum_{p=0}^{l-j} \mu^{p+j-1} S_{p+j-1,j} A_{l-(p+j-1)}^* = \\
 &= \sum_{p=0}^{l-j} \mu^{p+j-1} \left(H \oplus_{\substack{p+j-1 \\ 0}} J_{\mu}^{(p)} \right) A_{l-(p+j-1)}^* = \\
 &= \sum_{p=0}^{l-j} \mu^{p+j-1} \left(\sum_{q=0}^p J_{\mu}^q H_q \left(H \oplus_{q+1}^{p+j-1} J_{\mu}^{(p-q)} \right) \right) A_{l-(p+j-1)}^* = \\
 &= \sum_{q=0}^{l-j} J_{\mu}^q H_q \sum_{p=q}^{l-j} \mu^{p+j-1} \left(H \oplus_{q+1}^{p+j-1} J_{\mu}^{(p-q)} \right) A_{l-(p+j-1)}^* = \\
 &= \sum_{k=0}^{l-j} J_{\mu}^k \hat{T}_{k,j},
 \end{aligned}$$

where $\hat{T}_{k,j} = H_k \sum_{p=k}^{l-j} \mu^{p+j-1} \left(H \oplus_{q+1}^{p+j-1} J_{\mu}^{(p-q)} \right) A_{l-p-j+1}^*$.

We need to prove that $T_{k,j} = \hat{T}_{k,j}$ if $j \geq 2$. For $j = 2, k = 0, \dots, l - 2$, it holds

$$\begin{aligned}
\hat{T}_{k,2} &= H_k \sum_{p=k}^{l-2} \mu^{p+1} \left(H \bigoplus_{k+1}^{p+1} J_{\mu}^{(p-k)} \right) A_{l-p-1}^* = \\
&= H_k \sum_{p=k}^{l-2} \mu^{p+1} \left(\sum_{q=0}^{p-k} J_{\mu}^q H_{k+q+1} J_{\mu}^{(p-q-k)} \right) A_{l-p-1}^* = \\
&= H_k \sum_{q=0}^{l-k-2} J_{\mu}^q H_{k+q+1} \left(\sum_{p=q+k}^{l-2} (\mu^{p+1} J_{\mu}^{p-q-k}) \right) A_{l-p-1}^* = \\
&= H_k \sum_{i=k+1}^{l-1} J_{\mu}^{i-(k+1)} H_i \sum_{p=i-1}^{l-2} (\mu^{p+1} J_{\mu}^{p-i+1}) A_{l-p-1}^* = \\
&= H_k J_{\mu}^{-1} \sum_{i=k+1}^{l-1} J_{\mu}^{i-k} H_i \sum_{m=i+1}^l \mu^{m-1} J_{\mu}^{m-i-1} A_{l-m-1}^* = \\
&= D_k \sum_{j=k+1}^{l-1} J_{\mu}^{j-k} T_{i,1}
\end{aligned}$$

Finally, for $j \geq 3$, $k = 0, \dots, l-j$, we have:

$$\begin{aligned}
\hat{T}_{k,j} &= H_k \sum_{p=k}^{l-j} \mu^{p+j-1} \left(H \bigoplus_{k+1}^{p+j-1} J_{\mu}^{(p-k)} \right) A_{l-p-j+1}^* = \\
&= H_k \sum_{p=k}^{l-j} \mu^{p+j-1} \sum_{q=0}^{p-k} J_{\mu}^q H_{k+q+1} \left(H \bigoplus_{k+1+q+1}^{p+j-1} J_{\mu}^{(p-k-q)} \right) A_{l-p-j+1}^* = \\
&= H_k \sum_{q=0}^{l-j-k} J_{\mu}^q H_{k+q+1} \sum_{p=k+q}^{l-j} \mu^{p+j-1} \left(H \bigoplus_{k+q+2}^{p+j-1} J_{\mu}^{(p-k-q)} \right) A_{l-p-j+1}^* = \\
&= H_k \sum_{i=k+1}^{l-j+1} J_{\mu}^{i-k} J_{\mu}^{-1} H_i \sum_{p=i-1}^{l-j} \mu^{p+j-1} \left(H \bigoplus_{i+1}^{p+j-1} J_{\mu}^{(p-i+1)} \right) A_{l-p-j+1}^* =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= H_k J_\mu^{-1} \sum_{i=k+1}^{l-j+1} J_\mu^{i-k} H_i \sum_{m=i}^{l-j+1} \mu^{m+j-2} \left(H \bigoplus_{i+1}^{m+j-2} J_\mu^{(m-i)} \right) A_{l-m-j+2}^* = \\
 &= D_k \sum_{i=k+1}^{l-(j-1)} J_\mu^{i-k} H_i \times \\
 &\quad \times \sum_{m=i}^{l-(j-1)} \mu^{m+(j-1)-1} \left(H \bigoplus_{i+1}^{m+(j-1)-1} J_\mu^{(m-i)} \right) A_{l-m-(j-1)+1}^* = \\
 &= D_k \sum_{i=k+1}^{l-j+1} J_\mu^{i-k} \hat{T}_{i,j-1}.
 \end{aligned}$$

The lemma is proved completely.

3. ERROR BOUND

Concrete representation of discrete operator A_l , $l = 1, 2, \dots$, will shown in (23). To prove further statements we restrict ourselves some additional conditions to A_l . Namely, we will consider discretization which satisfies the following conditions:

$$\begin{aligned}
 (18) \quad & \|A^* A - A_l^* A_l\| \leq \frac{\delta}{\rho\sqrt{l}}; \quad \|A - A_l\| \leq \left(\frac{\delta}{\sqrt{l}} \right)^{1/2}; \\
 & \|(A - A_l)A^*\| \leq \frac{\delta}{\rho\sqrt{l}}; \quad \|(A^* - A_l^*)A\| \leq \frac{\delta}{\rho\sqrt{l}}.
 \end{aligned}$$

It is not difficult to notice that first of inequalities (18) corresponds to requirement of adaptive discretization strategy (5) with $\alpha = 1/l$.

Without lost of generality we will consider that number L of steps of iterative process satisfies to the condition:

$$(19) \quad \delta\sqrt{L} \leq 1.$$

Remind that to estimate error $\|x^\dagger - \hat{x}_l\|$ we have to estimate the last term in (9). To do this we estimate right-hand side of

expansion (16) term by term. It's easy to see that for the first item

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{k=0}^{l-1} \mu^k (\mu I + A^* A)^{-(k+1)} (A^* - A_{l-k}^*) f_\delta \right\| = \\ & = \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{l-1} \left\| \mu^{k+1} (\mu I + A^* A)^{-(k+1)} \right\| \left\| (A^* - A_{l-k}^*) f_\delta \right\| \leq \\ & \leq \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{l-1} \frac{2\delta}{\sqrt{l-k}}. \end{aligned}$$

Next statement gives bound for second term in the right-hand side of (16).

Lemma 3. *For any $l = 1, 2, \dots, L$ there is a constant $c_1 < \infty$ such that*

$$\sum_{k=1}^l \|F_k f_\delta\| \leq c_1 \delta \sqrt{l}.$$

First of all by (18) we can write inequality

$$\begin{aligned} \left\| (A^* - A_l^*) f_\delta \right\| & \leq \left\| (A^* - A_l^*) A x^\dagger \right\| + \left\| (A^* - A_l^*) (f - f_\delta) \right\| \leq \\ & \leq \frac{\delta}{\sqrt{l}} + \frac{\delta^{3/2}}{l^{1/4}} \leq \frac{2\delta}{\sqrt{l}}. \end{aligned}$$

Due to (17) obviously equality

$$\sum_{k=1}^l \|F_k f_\delta\| = \sum_{k=1}^l \left\| \sum_{j=0}^{l-k} J_\mu^{-j} T_{j,k} f_\delta \right\|$$

is true. Now let us estimate norm of $T_{j,k}f_\delta$ and J_μ . Firstly we find a bound of element $T_{j,1}f_\delta$:

$$\begin{aligned} T_{j,1}f_\delta &:= D_j \sum_{i=j+1}^l \mu^{i-1} J_\mu^{i-j} A_{l-i+1}^* f_\delta = \\ &= D_j \sum_{i=j+1}^l \mu^{i-1} J_\mu^{i-j} A^* f_\delta - D_j \sum_{i=j+1}^l \mu^{i-1} J_\mu^{i-j} (A^* - A_{l-i+1}^*) f_\delta. \end{aligned}$$

Remind that

$$g_l(\lambda) = \sum_{i=0}^{l-1} \frac{\mu^i}{(\mu + \lambda)^{i+1}}.$$

Change order of summation in the last equality

$$\begin{aligned} g_{l-j}(A^* A) &= \sum_{i=0}^{l-j-1} \mu^i J_\mu^{i+1} = \\ &= \mu^0 J_\mu^1 + \dots + \mu^{l-j-1} J_\mu^{l-j} = \sum_{i=j+1}^l \mu^{l-i} J_\mu^{l-i+1}. \end{aligned}$$

Hence

$$\begin{aligned} \sum_{i=j+1}^l \mu^{i-1} J_\mu^{i-j} &= \mu^j J_\mu^1 + \mu^{j+1} J_\mu^2 + \dots + \mu^{l-1} J_\mu^{l-j} = \\ &= \sum_{i=j+1}^l \mu^{l+j-i} J_\mu^{l-i+1} = \mu^j \sum_{i=j+1}^l \mu^{l-i} J_\mu^{l-i+1} = \mu^j g_{l-j}(A^* A). \end{aligned}$$

By this relation $T_{j,1}f_\delta$ can be written as

$$\begin{aligned} T_{j,1}f_\delta &= \\ &= D_j \mu^j g_{l-j}(A^*A)A^*f_\delta - D_j \sum_{i=j+1}^l \mu^{i-1} J_\mu^{i-j}(A^* - A_{l-i+1}^*)f_\delta = \\ &D_j \mu^j g_{l-j}(A^*A)A^*Ax^\dagger - D_j \mu^j g_{l-j}(A^*A)A^*(f - f_\delta) - \\ &\quad - D_j \sum_{i=j+1}^l \mu^{i-1} J_\mu^{i-j}(A^* - A_{l-i+1}^*)f_\delta. \end{aligned}$$

Taking into account estimations (cf. (7))

$$(20) \quad \begin{aligned} \|g_{l-j}(A^*A)A^*A\| &\leq 1, & \|g_{l-j}(A^*A)A^*\| &\leq \sqrt{\frac{l-j}{\mu}}, \\ \|\mu^{i-1} J_\mu^{i-j}\| &\leq \mu^{j-1}, \end{aligned}$$

we have

$$\begin{aligned} \|T_{j,1}f_\delta\| &\leq \|D_j\| \mu^j \left(\rho + \frac{\delta}{\sqrt{\mu}} \sqrt{l-j} \right) + \\ &\quad + \|D_j\| \mu^{j-1} 2\delta \sum_{i=j+1}^l \frac{1}{\sqrt{l-i+1}}. \end{aligned}$$

Using the last relation and estimation

$$\sum_{i=j+1}^l \frac{1}{\sqrt{l-i+1}} \leq \int_0^{l-j} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{l-j},$$

we find

$$\begin{aligned} \|T_{j,1}f_\delta\| &\leq \mu^{j-1}\|D_j\|(\mu\rho + \delta\sqrt{\mu}\sqrt{l-j} + 4\delta\sqrt{l-j}) \leq \\ &\leq \frac{\delta}{\mu\rho\sqrt{l-j}}\mu^{j-1}(\mu\rho + (4 + \sqrt{\mu})\delta\sqrt{l-j}) \leq \\ &\leq \frac{\delta}{\rho\sqrt{l-j}}\mu^{j-2}(4 + \sqrt{\mu} + \mu\rho) = \frac{c_2\delta}{\sqrt{l-j}}\mu^{j-1}, \end{aligned}$$

where $c_2 = \rho + 1/\sqrt{\mu} + 4/\mu$.

Now we have

$$\begin{aligned} \|T_{j,2}f_\delta\| &= \|D_j \sum_{i=j+1}^{l-1} (\mu I + A^*A)^{-(i-j)} T_{i,1}f_\delta\| \leq \\ &\leq \mu^{j-1}\|D_j\|c_2\delta \sum_{i=j+1}^{l-1} \frac{1}{\sqrt{l-i}} \leq \\ &\leq \mu^{j-1}\|D_j\|c_22\delta\sqrt{l-j-1} \leq \frac{2c_2}{\rho}\mu^{j-2}\frac{\delta}{\sqrt{l-j}}. \end{aligned}$$

In a like manner for every $k = 1, 2, \dots$ one can find

$$\|T_{j,k}f_\delta\| \leq \left(\frac{2}{\rho}\right)^{k-1} c_2\mu^{j-k}\frac{\delta}{\sqrt{l-j}}.$$

Thus we have

$$\begin{aligned} \|F_k f_\delta\| &= \left\| \sum_{j=0}^{l-k} (\mu I + A^*A)^{-j} T_{j,k} f_\delta \right\| \leq \left(\frac{2}{\rho}\right)^{k-1} \frac{2c_2}{\mu^k} \delta \sqrt{l}, \\ \sum_{k=1}^l \|F_k f_\delta\| &\leq \frac{2c_2\delta\sqrt{l}}{\mu} \sum_{k=1}^l \left(\frac{2}{\rho\mu}\right)^{k-1} \leq \frac{2c_2\delta\sqrt{l}}{\mu - 2/\rho}. \end{aligned}$$

We obtain assertion of Lemma for $c_1 = \frac{2c_2}{\mu - 2/\rho}$.

Next statement contains finally estimation of third item in the right-hand side of (9).

Lemma 4. For every $l \leq L$ it holds

$$(21) \quad \|B_l f_\delta\| \leq (4/\mu + c_1)\delta\sqrt{l}.$$

Taking into account Lemmas 2 and 3 we find

$$\begin{aligned} \|B_l f_\delta\| &\leq \left\| \sum_{k=0}^{l-1} \mu^k J_\mu^{k+1} (A^* - A_{l-k}^*) f_\delta - \sum_{k=1}^l F_k f_\delta \right\| \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{l-1} \|\mu^k J_\mu^{k+1} (A^* - A_{l-k}^*) f_\delta\| + \sum_{k=1}^l \|F_k f_\delta\| \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{l-1} \|\mu^k J_\mu^{k+1} (A^* - A_{l-k}^*) f_\delta\| + c_1 \delta \sqrt{l}. \end{aligned}$$

Using (18) and (20) we estimate first item:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{l-1} \|\mu^k J_\mu^{k+1}\| \| (A^* - A_{l-k}^*) f_\delta \| &= \\ = \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{l-1} \|\mu^{k+1} J_\mu^{k+1}\| \| (A^* - A_{l-k}^*) f_\delta \| &\leq \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{l-1} \frac{2\delta}{\sqrt{l-k}}. \end{aligned}$$

As a result we have:

$$\|B_l f_\delta\| \leq \frac{2\delta}{\mu} \sum_{k=0}^{l-1} \frac{1}{\sqrt{l-k}} + c_1 \delta \sqrt{l} \leq \left(\frac{4}{\mu} + c_1 \right) \delta \sqrt{l}.$$

The lemma is proved.

Final bound for method's accuracy (6) is contained in next statement.

Lemma 5. For every $l \leq L$ there exists a constant $c_3 > 0$ such that

$$(22) \quad \|x^\dagger - \hat{x}_l\| \leq \rho \kappa^{\frac{\nu}{\nu+1}} l^{-\nu/2} + c_3 \delta \sqrt{l}.$$

Taking into account (10), (14) and (21) from relation (9) we have

$$\begin{aligned} \|x^\dagger - \hat{x}_l\| &\leq \rho\kappa \frac{\nu}{\nu+1} l^{-\nu/2} + \delta \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{\mu}} + (4/\mu + c_1)\delta\sqrt{l} = \\ &= \rho\kappa \frac{\nu}{\nu+1} l^{-\nu/2} + c_3\delta\sqrt{l}. \end{aligned}$$

We obtain assertion of Lemma for $c_3 = 1/\sqrt{\mu} + 4/\mu + c_1$.

4. ALGORITHM OF SOLVING

First of all we describe adaptive discretization scheme used in this paper for solving (1) with operators $A \in \mathcal{H}^r$. Let the discretization level n depends on step of iteration process: $n = n(l)$.

Denote as Γ_n area

$$\Gamma_n := \cup_{k=1}^{2n(l)} (2^{k-1}, 2^k] \times [1, 2^{2n(l)-k}] \cup \{1\} \times [1, 2^{2n(l)}].$$

of coordinate plane corresponding to the basis E that appear in the definition of class \mathcal{H}^r .

Operators $A_l, l = 1, 2, \dots$, will be constructed in the following way:

$$(23) \quad A_{n(l)} = A_l = \sum_{k=1}^{2n(l)} (P_{2^k} - P_{2^{k-1}})AP_{2^{2n(l)-k}} + P_1AP_{2^{2n(l)}}.$$

Next statement characterizes some approximation properties of the operator $A_{n(l)}$.

Lemma 6. *If parameter $n = n(l)$ is chosen by relation*

$$(24) \quad c_4 n 2^{-2nr} = \frac{\delta}{\rho\sqrt{l}}, \quad c_4 = \max \left\{ 1 + 2^{r+3}; 3 * 2^r; 2^r + \frac{2^{r+1}}{\sqrt{2^r - 1}} \right\},$$

then for operator $A_{n(l)} = A_l$ (23) and any operator $A \in \mathcal{H}^r$ it holds estimates (18).

This lemma can be proved in the same way as Lemma 1 [1].

Denote

$$c_5 := 1 + \frac{1}{\sqrt{\mu}} + \frac{1}{\mu} \left(4 + \frac{1}{\rho} + 2\pi\kappa_{1/2} \right) + \frac{c_2(2 + (1 + \pi)\kappa_{1/2})}{\mu - 2/\rho}.$$

Now we describe algorithm that consists of Fakeev-Lardy regularization method and proposed adaptive discretization strategy.

- (1) Given data: $A \in \mathcal{H}^r$, f_δ , δ , ρ .
- (2) Initialization: $\hat{x}_0 = 0$, $b > c_5 + 2$.
- (3) Iteration by $l = 1, 2, \dots$

(a) choosing of discretization level $n = n(l, \delta)$:

$$(25) \quad c_4 n 2^{-2nr} = \frac{\delta}{\rho \sqrt{l}};$$

(b) computation of Galerkin functionals:

$$(26) \quad \begin{aligned} & (f_\delta, e_i), \quad i \in (2^{2n(l-1)}, 2^{2n(l)}] \\ & (Ae_j, e_i), \quad (i, j) \in \Gamma_{n(l)} \setminus \Gamma_{n(l-1)}; \end{aligned}$$

(c) solving equation

$$(27) \quad \mu \hat{x}_l + A_{n(l)}^* A_{n(l)} \hat{x}_l = \mu \hat{x}_{l-1} + A_{n(l)}^* f_\delta;$$

(d) stop rule by discrepancy principle

$$(28) \quad \begin{aligned} & \| A_{n(L)} \hat{x}_L - P_{2^{2n(L)}} f_\delta \| \leq b\delta, \\ & \| A_{n(l)} \hat{x}_l - P_{2^{2n(l)}} f_\delta \| > b\delta, \quad l < L. \end{aligned}$$

(4) Approximate solution: \hat{x}_L .

To establish optimality of the algorithm we need two assertions.

Lemma 7. For any $l \leq L$ the inequality

$$\| Ax_l - f \| \leq \| A_l \hat{x}_l - f \| + c_5 \delta$$

is true.

Denote expression $Ax_l - f$ as:

$$(29) \quad Ax_l - f := Ag_l(A^*A)A^*f - f = Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 + Z_5,$$

where

$$\begin{aligned} Z_1 &= Ag_l(A^*A)A^*(f - f_\delta); \\ Z_2 &= (A - A_l)A^*g_l(AA^*)f_\delta; \\ Z_3 &= -(A - A_l)(g_l(A^*A)A^*f_\delta - \hat{x}_l); \\ Z_4 &= A(g_l(A^*A)A^*f_\delta - \hat{x}_l); \\ Z_5 &= A_l\hat{x}_l - f. \end{aligned}$$

Let's estimate all elements $Z_1 - Z_4$. By (7) we obtain

$$\|Z_1\| \leq \|AA^*g_l(A^*A)\| \|f - f_\delta\| \leq \delta.$$

Taking into account (7) and (18) we find

$$\begin{aligned} \|Z_2\| &\leq \|(A - A_l)A^*\| (\|g_l(A^*A)Ax^\dagger\| + \|g_l(A^*A)\| \|f - f_\delta\|) \leq \\ &\leq \frac{\delta}{\rho\sqrt{l}} \left(\rho\sqrt{\frac{l}{\mu}} + \delta\frac{l}{\mu} \right) \leq \delta \left(\frac{1}{\sqrt{\mu}} + \frac{1}{\rho\mu} \right). \end{aligned}$$

Using Lemma 4 and (18) we have

$$\|Z_3\| \leq \left(\frac{\delta}{\sqrt{l}} \right)^{1/2} (4/\mu + c_1)\delta\sqrt{l} \leq (4/\mu + c_1)\delta.$$

To estimate Z_4 we use Lemma 2 and (17)

$$Z_4 = AB_l f_\delta = \sum_{k=0}^{l-1} A\mu^k J_\mu^{k+1}(A^* - A_{l-k}^*) - \sum_{k=1}^l AF_k f_\delta.$$

By inequality

$$\begin{aligned} \|\mu^k A(\mu I + A^*A)^{-(k+1)}\| &\leq \frac{1}{\mu} \sup_\lambda \lambda^{1/2} (1 - \lambda g_{k+1}(\lambda)) \leq \\ &\leq \frac{\kappa_{1/2}}{\mu} (k+1)^{-1/2}, \end{aligned}$$

we have

$$\|Z_4\| \leq \frac{2\delta\kappa_{1/2}}{\mu} \sum_{k=0}^{l-1} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(l-k)}} + \sum_{j=1}^l \|AF_j f_\delta\|.$$

We estimate both items in the right-hand side of last relation. So

$$\sum_{k=0}^{l-1} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(l-k)}} = \sum_{j=1}^N \frac{1}{\sqrt{j(N-j)}} \leq \int_0^N \frac{dx}{x(N-x)} = \pi.$$

Now

$$\begin{aligned} \|AF_j f_\delta\| &\leq \sum_{i=0}^{l-j} \|A(\mu I + A^* A)^{-i} T_{i,j} f_\delta\| \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{l-j} \mu^{-i} \|\mu^i A(\mu I + A^* A)^{-i}\| \|T_{i,j} f_\delta\| \leq \\ &\leq \left(1 + \sum_{i=1}^{l-j} \frac{\mu^{-i}}{\sqrt{i}} \frac{\mu^{i-j}}{\sqrt{l-j}}\right) \kappa_{1/2} c_2 \left(\frac{2}{\rho}\right)^{j-1} \delta = \\ &= \frac{\kappa_{1/2} c_2 \left(\frac{2}{\rho}\right)^{j-1} \delta}{\mu^j} \left(1 + \sum_{i=1}^{l-j} \frac{1}{\sqrt{i(l-i)}}\right) \leq c_6 \left(\frac{2}{\rho\mu}\right)^{j-1} \delta, \end{aligned}$$

where $c_6 = \frac{(1+\pi)c_2\kappa_{1/2}}{\mu}$.

Then

$$\sum_{j=1}^l \|AF_j f_\delta\| \leq c_6 \delta \sum_{j=0}^{l-1} \left(\frac{2}{\rho\mu}\right)^j \leq \frac{(1+\pi)c_2\kappa_{1/2}}{\mu - 2/\rho} \delta.$$

Finally we obtain

$$\|Z_4\| \leq \kappa_{1/2} \left(\frac{2\pi}{\mu} + \frac{(1+\pi)c_2}{\mu - 2/\rho}\right) \delta.$$

By combining received estimates we obtain the statement of Lemma.

Lemma 8. *Let L satisfy to discrepancy principle (28), where $b > 2 + c_5$, $A \in \mathcal{H}^r$ and discretization parameter is chosen as (24).*

Then there are constants $b_1, b_2 > 0$ exist such that

$$b_1\delta \leq \|Ax_L - f\| \leq b_2\delta.$$

According to (24) for any $l \leq L$ it holds

$$\|(I - P_l)f\| \leq \delta.$$

Using (28) we have

$$\begin{aligned} \|A_L \hat{x}_L - f\| &\leq \|A_L \hat{x}_L - P_L f_\delta\| + \|P_L(f - f_\delta)\| + \|(I - P_L)f\| \leq \\ &\leq (b + 2)\delta. \end{aligned}$$

Then by Lemma 7 we find

$$\|(Ax_L - f)\| \leq b_2\delta$$

with $b_2 = b + c_5 + 2$. On the other hand, in $(L-1)$ -th step according to (28)

$$\|A_{L-1} \hat{x}_{L-1} - P_{L-1} f_\delta\| > b\delta.$$

Using triangle inequality and Lemma 7 we find from (29) with $l = L - 1$

$$\|Ax_{L-1} - f\| \geq \|A_{L-1} \hat{x}_{L-1} - P_{L-1} f_\delta\| - (c_5 + 2)\delta.$$

Let's estimate

$$\begin{aligned} \|Ax_L - f\|^2 &= \mu^{2L} \sum_k |\lambda_k|^{2(\nu+1)} \frac{(v, \psi_k)^2}{(\mu + \lambda_k^2)^{2L}} = \\ &= \mu^2 \left(\mu^{2(L-1)} \sum_k |\lambda_k|^{2(\nu+1)} \frac{(v, \psi_k)^2}{(\mu + \lambda_k^2)^{2(L-1)}} (\mu + \lambda_k^2)^{-2} \right) \geq \\ &\geq \left(\frac{\mu}{\mu + j^2} \right)^2 \left(\mu^{2(L-1)} \sum_k |\lambda_k|^{2(\nu+1)} \frac{(v, \psi_k)^2}{(\mu + \lambda_k^2)^{2(L-1)}} \right). \end{aligned}$$

Consequently

$$\|Ax_L - f\| \geq \frac{\mu}{\mu + 1} \|Ax_{L-1} - f\|.$$

Finally we have

$$\|Ax_L - f\| \geq b_1\delta,$$

where $b_1 = \frac{\mu}{\mu+1}(b-2-c_5)$. Thus Lemma is completely proved.

5. OPTIMALITY OF THE ALGORITHM. AMOUNT OF GALERKIN INFORMATION

In the following statement we will show that described algorithm (23)-(28) guarantees the optimal order of accuracy $O(\delta^{\frac{\nu}{\nu+1}})$ on the whole class of the considered equations.

Theorem 1. *Algorithm (23)-(28) achieves the optimal order of accuracy $O(\delta^{\frac{\nu}{\nu+1}})$ on the class of equations with operator $A \in \mathcal{H}^r$ and minimal-norm solutions $x^\dagger \in M_{\nu,\rho}(A)$, $\nu > 0$.*

From Lemmas 1, 8 and relation (13) it follows that

$$(30) \quad \delta\sqrt{L} = \delta \left(\frac{|d_{\nu,L}(v)|}{\|Ax_L - f\|} \right)^{\frac{1}{\nu+1}} \leq \delta \left(\frac{\rho\kappa(\nu+1)/2}{b_1\delta} \right)^{\frac{1}{\nu+1}} \leq \\ \leq \left(\frac{\rho}{b_1} \right)^{\frac{1}{\nu+1}} \sqrt{\frac{\mu(\nu+1)}{2}} \delta^{\frac{\nu}{\nu+1}},$$

$$|c_{\nu,L}(v)|L^{\frac{\nu}{2}} = |c_{\nu,L}(v)| \left(\frac{\|Ax_L - f\|}{|d_{\nu,L}(v)|} \right)^{\frac{\nu}{\nu+1}} \leq \rho^{\frac{1}{\nu+1}} (b_2\delta)^{\frac{\nu}{\nu+1}}.$$

Substituting the estimates into (22), we have

$$\|x^\dagger - \hat{x}_L\| \leq \xi \delta^{\frac{\nu}{\nu+1}},$$

$$\text{where } \xi = \rho^{\frac{1}{\nu+1}} \left(b_2^{\frac{\nu}{\nu+1}} + c_3 b_1^{-\frac{1}{\nu+1}} \sqrt{\frac{\mu(\nu+1)}{2}} \right).$$

The theorem is proved.

Corollary. *To achieve the optimal order of the accuracy on the considered class of equations in the framework of algorithm (23)-(28) it is enough to calculate*

$$(31) \quad O(\delta^{-\frac{\nu+2}{(\nu+1)r}} \log^{1+1/r} \delta^{-1})$$

of Galerkin functionals (26).

To proof this statement it is sufficiently to estimate volume of the inner products that is equivalent to square of figure Γ_n , which

is equal to $(n + 1)2^{2n}$. Using (24) and (30) in this expression we have estimate (31).

Remind (see Section 1) that to achieve the optimal order of accuracy in traditional Galerkin discretization scheme it is necessary to calculate $O(\delta^{-2/r})$ inner products (26). Thus for any $\nu > 0$ algorithm (23)-(28) is more economical than methods using in [3] with traditional Galerkin discretization scheme.

REFERENCES

- [1] *Maas P., Pereverzev S.V., Ramlau R., Solodky S.G.* An adaptive discretization for Tikhonov-Phillips regularization with a posteriori parameter selection // *Numer. Math.* — 2001. — V. 87, No 1. — P. 485-502.
- [2] *Maas P., Rieder A.* Wavelet-accelerated Tikhonov-regularization with applications // *Inverse Problems in Medical Imaging.* — Springer: Vienna, 1997. — P. 134-158.
- [3] *Plato R., Vainikko G.* On the Regularization of Projection Methods for solving Ill-posed Problems // *Numer. Math.* — 1990. — 57. — P. 63-79.
- [4] *Solodky S.G.* Economic discretization scheme for the nonstationary iterated Tikhonov method // *J. Optim. Theory Appl.* — 2007. — 132, No. 1. — P. 21-39.
- [5] *Solodky S.G.* An optimal approximations for solving linear ill-posed problems // *J.Complexity.* — 2001. — V.17, No. 1. — P. 98-116.
- [6] *Solodky S.G.* An optimal approximations for stationary iterated Tikhonov method // *East J. Approx.* — 2004. — V.10, No. 1-2. — P. 189-200.
- [7] *Solodky S.G.* On a quasi-optimal regularized projection method for solving operator equations of the first kind // *Inverse Problems.* — 2005. — V. 21, No. 4. — P. 1473-1485.
- [8] *Solodky S.G.* Adaptive discretization of ill-posed problems // *Doklady Ross. Akad. Nauk.* — 2002. — V. 382, No. 4. — P. 460-462.
- [9] *Solodky S.G.* An one scheme of discretization for Landweber method // *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* — 2004. — V. 44, No. 3. — P. 387-396.
- [10] *Solodky S.G.* An economic selection of discrete information in solving ill-posed problems // *Izvest. VUZ. Mat.* — 2005. — No. 12. — P. 56-62.
- [11] *Vainikko G.M., Veretennikov A.Y.* Iterative procedures in ill-posed problems // *Moskov: Nauka, 1986.*

Наукове видання

Збірник праць

Інституту математики НАН України

Т. 6 №2

**Геометрія, топологія та їх
застосування**

Комп'ютерна верстка та підготовка оригінал-макету
А. Г. Кушнер, С. І. Максименко, Є. О. Полулях

Редактор В. Е. Гонтковська

Підп. до друку 10.03.2009. Формат 60×84/16. Папір офс.
Офс. друк. Фіз. друк. арк. 34,3. Ум. друк. арк. 31,9. Зам. №95
Тираж 300 пр.

Ін-т математики НАН України
01601 Київ-4, МСП, вул. Терещенківська, 3