

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Український математичний конгрес – 2009
Секція 2. Топологія і геометрія

Київ — 2011

Український математичний конгрес – 2009
Секція 2. Топологія і геометрія

Головний редактор: *А. М. Самойленко*

Редакційна рада: *Ю. А. Амінов, Ю. М. Березанський,
М. Л. Горбачук, А. А. Дороговцев, Ю. А. Дрозд,
Ю. Б. Зелінський, В. С. Королюк, А. Н. Кочубей,
І. О. Луковський, В. Л. Макаров, С. І. Максименко,
А. Г. Нікітін, В. В. Новицький, М. В. Працьовитий,
О. А. Ребенко, А. С. Романюк, Ю. С. Самойленко,
С. Г. Солодкий, П. М. Тамразов, В. В. Шарко,
О. М. Шарковський*

Український
математичний конгрес
2009

Секція 2. Топологія і геометрія

Український математичний конгрес – 2009.
Секція 2. Топологія і геометрія / Відп. ред.: В. В. Шарко.
Київ: Ін-т математики НАН України. – 2011. – 192 с.

Збірник містить вибрані праці учасників секції 2 “Топологія і геометрія” Українського математичного конгресу – 2009, присвяченого до 100-річчю з дня народження М. М. Боголюбова. Конгрес проходив 27–29 серпня 2009 р. в Інституті математики НАН України, м. Київ.

Представлені роботи будуть цікаві та корисні фахівцям з топології, геометрії та динамічних систем.

Видавнича група збірника:

член-кореспондент НАН України В. В. Шарко (відп. ред.),
кандидат фіз.-мат. наук С. І. Максименко (відп. за випуск).

Рецензенти:

доктор фіз.-мат. наук В. В. Кириченко,
доктор фіз.-мат. наук Ю. Б. Зелінський

УДК 517.5

Fahreddin Abdullayev, Mehmet Küçükaslan

*Mersin University, Faculty of Literature and Science,
Department of Mathematics, 33342 Mersin, Turkey
E-mail: fabdul@mersin.edu.tr, mkucukaslan@mersin.edu.tr*

Алексей Альфредович Довгошей

*Институт прикладной математики и механики НАН
Украины, ул. Р. Люксембург 74, Донецк, 83114, Украина
E-mail: aleksdov@mail.ru*

Касательные пространства к метрическим пространствам. Секвенциальный подход

В работе исследуются свойства касательных пространств к общим метрическим пространствам. Представлены некоторые критерии конечности, компактности и ограниченности таких касательных пространств. Анализируется связь между касательными пространствами, полученными при помощи секвенциального подхода и при помощи ультрасходимости.

In this paper we study the properties of the tangent spaces to general metric spaces. Some criteria related to the boundedness, the compactness and the finiteness of such tangent spaces are presented. The connections between tangent spaces which obtained with the help of the sequential approach and with the ultraconvergence are analyzed.

© Ф. Абдуллаев, А. А. Довгошей, М. Кучукаслан

1. ВВЕДЕНИЕ

Наблюдающееся в последние десятилетия бурное развитие анализа на метрических пространствах тесно связано с некоторыми обобщениями дифференцирования. Концепции «верхнего» или «слабого» градиентов [11, 14], предложенное Чигером (Cheeger) понятие дифференцируемости для исследования аналогов теоремы Радемахера в метрических пространствах с мерой [6], метрическая производная в исследованиях функций ограниченной вариации, принимающих значения в метрических пространствах [24, 26], изложенный в [12] подход к дифференцированию на основе теории липшицевых функций — интересные и важные примеры таких обобщений. Индуцирование линейной структуры, а следовательно, и дифференцирования, на сепарабельных метрических пространствах путем их вложения в двойственные к сепарабельным пространствам Банаха было использовано в [2] для изучения спрямляемых множеств в метрических пространствах. Как правило, перечисленные методы дают нетривиальные результаты только в случае, если пространство содержит «достаточно много» спрямляемых кривых.

Другим «естественным» путем определения «метрического дифференциала» в данной точке является построение инфинитезимального метрического пространства в этой точке с последующим заданием дифференциала как отображения, определенного на таком инфинитезимальном пространстве. Такого рода построения могут быть проделаны внутренним образом, без вложения в объемлющее линейное пространство. И хотя возникающие инфинитезимальные пространства лишены линейной структуры, основной для классических касательных пространств дифференциальной геометрии, однако по аналогии с классическим случаем будем называть такие пространства касательными (в данной точке к данному метрическому пространству). Такое название отчасти оправдано хорошими

функториальными свойствами дифференцирования на инфинитезимальных пространствах и примерами показывающими, что в простейших случаях такие пространства «совпадают» с обычными касательными прямыми и плоскостями.

В настоящее время в качестве пространства, касательного к метрическому пространству (X, d) в точке $a \in X$, часто принимают ультрапроизведение последовательности раздутий

$$\left(X, \frac{1}{r_i}d, a\right)_{i \in \mathbb{N}}, \quad r_i \downarrow 0$$

(см., например, [4, 13]). Еще одним «естественным» претендентом на роль касательного пространства к метрическому пространству является предел по Громову–Хаусдорфу [5], но такой подход представляется не слишком удобным для построения теории «метрических дифференциалов», замечания по этому поводу можно найти в [13].

В 2008 году в работе [10] был предложен новый, так называемый *секвенциальный* подход к построению касательных пространств к произвольным метрическим пространствам, тесно связанный с указанным выше способом задания касательных через ультрапроизведение последовательности раздутий исходного метрического пространства. С точки зрения авторов секвенциальный подход есть не что иное как необходимое дополнение к использованию ультрапределов, и более конструктивен по сравнению с последним. При секвенциальном подходе касательные пространства к метрическому пространству X в отмеченной точке $a \in X$ задаются как фактор-пространства некоторых семейств последовательностей точек из X , сходящихся к точке a .

В настоящей работе даются критерии конечности, компактности и ограниченной компактности секвенциальных касательных пространств к общим метрическим пространствам. Рассматриваются примеры секвенциальных касательных пространств и обсуждается их взаимосвязь с касательными пространствами, построенными при помощи ультрапроизведений.

2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть (X, d) есть метрическое пространство с отмеченной точкой a . Зафиксируем последовательность \tilde{r} положительных, стремящихся к нулю чисел r_n , которую будем в дальнейшем называть *нормирующей*. Обозначим через \tilde{X} совокупность всех последовательностей точек из X . Будем говорить, что последовательности $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$, $\tilde{x} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ и $\tilde{y} = \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, *взаимно стабильны* (относительно нормирующей последовательности \tilde{r}), если существует конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(x_n, y_n)}{r_n} := \tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{x}, \tilde{y}), \quad (2.1)$$

и что семейство $\tilde{F} \subseteq \tilde{X}$ *самостабильно* (относительно \tilde{r}), если любые $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{F}$ являются взаимно стабильными. Стандартное применение леммы Цорна показывает, что для любой нормирующей \tilde{r} существует максимальное (по включению) самостабильное семейство $\tilde{X}_a = \tilde{X}_{a, \tilde{r}}$ такое, что постоянная последовательность $\tilde{a} = \{a, a, \dots\} \in \tilde{X}_a$.

Функция $\tilde{d}_{\tilde{r}} : \tilde{X}_a \times \tilde{X}_a \rightarrow \mathbb{R}$, значение которой на паре $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \tilde{X}_a \times \tilde{X}_a$ определяется формулой (2.1), является псевдометрикой на множестве \tilde{X}_a , а бинарное отношение $\tilde{x} \approx \tilde{y}$ тогда и только тогда, когда $\tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$, есть отношение эквивалентности на этом множестве. Обозначим через

$$\Omega_a = \Omega_{a, \tilde{r}} = \Omega_{a, \tilde{r}}^X$$

множество классов эквивалентности, на которые \approx разбивает $\tilde{X}_{a, \tilde{r}}$. Определим функцию $\rho : \Omega_a \times \Omega_a \rightarrow \mathbb{R}$ по правилу $\rho(\alpha, \beta) = \tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{x}, \tilde{y})$, где $\tilde{x} \in \alpha$, $\tilde{y} \in \beta$. Тогда ρ — корректно определенная метрика на Ω_a .

Определение 1. *Метрическое пространство $(\Omega_{a, \tilde{r}}, \rho)$ называется предкасательным пространством к метрическому пространству (X, d) в точке $a \in X$ (относительно нормирующей последовательности \tilde{r}).*

Для заданных $a \in X$ и \tilde{r} может существовать несколько неизометричных предкасательных пространств $\Omega_{a,\tilde{r}}$ в зависимости от выбора $\tilde{X}_{a,\tilde{r}}$.

Пусть $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ есть бесконечная, строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Для нормирующей последовательности \tilde{r} положим $\tilde{r}' := \{r_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ и пусть

$$\tilde{x}' := \{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$$

при $\tilde{x} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \tilde{X}$.

Определение 2. Предкасательное пространство $\Omega_{a,\tilde{r}}$ назовем касательным (к X в точке a), если для любой последовательности $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ семейство $\{\tilde{x}' : \tilde{x} \in \tilde{X}_{a,\tilde{r}}\}$ будет максимальным самостабильным относительно \tilde{r}' .

Пусть X и Y — метрические пространства с отмеченными точками $a \in X$ и $b \in Y$, \tilde{r} и \tilde{t} — нормирующие последовательности, $\tilde{X}_{a,\tilde{r}} \subseteq \tilde{X}$ и $\tilde{Y}_{b,\tilde{t}} \subseteq \tilde{Y}$ — максимальные самостабильные семейства с соответствующими предкасательными пространствами $\Omega_{a,\tilde{r}}^X$ и $\Omega_{b,\tilde{t}}^Y$. Для функций $f : X \rightarrow Y$ определим отображения $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ как $\tilde{f}(\tilde{x}) := \{f(x_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$, если $\tilde{x} = \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in \tilde{X}$.

Определение 3. Скажем, что функция $f : X \rightarrow Y$ — μ -дифференцируема в точке a относительно пары

$$(\tilde{X}_{a,\tilde{r}}, \tilde{Y}_{b,\tilde{t}}),$$

если выполнены условия:

- (i) $\tilde{f}(\tilde{x}) \in \tilde{Y}_{b,\tilde{t}}$ для всех $\tilde{x} \in \tilde{X}_{a,\tilde{r}}$;
- (ii) $(\tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0) \Rightarrow (\tilde{d}_{\tilde{t}}(\tilde{f}(\tilde{x}), \tilde{f}(\tilde{y})) = 0)$ для всех $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}_{a,\tilde{r}}$.

Отметим, что (i) влечет равенство $f(a) = b$, а если для любого $\tilde{X}_{a,\tilde{r}}$ найдется $\tilde{Y}_{b,\tilde{t}}$, для которого (i) выполнено, то f непрерывна в точке a .

Обозначим через $p_{\tilde{r}}$ и $p_{\tilde{t}}$ естественные проекции $\tilde{X}_{a,\tilde{r}}$ и $\tilde{Y}_{b,\tilde{t}}$ на $\Omega_{a,\tilde{r}}^X$ и, соответственно, на $\Omega_{b,\tilde{t}}^Y$.

Определение 4. Пусть $f : X \rightarrow Y$ — μ -дифференцируема в точке a относительно пары $(\tilde{X}_{a,\tilde{r}}, \tilde{Y}_{b,\tilde{t}})$. Назовем отображение

$$D_f^* : \Omega_{a,\tilde{r}}^X \rightarrow \Omega_{b,\tilde{t}}^Y$$

метрическим дифференциалом функции f (в точке a относительно $(\tilde{X}_{a,\tilde{r}}, \tilde{Y}_{b,\tilde{t}})$), если

$$D_f^*(p_{\tilde{r}}(\tilde{x})) = p_{\tilde{t}}(f(\tilde{x}))$$

для всех $\tilde{x} \in \tilde{X}_{a,\tilde{r}}$.

Определенный таким образом метрический дифференциал существует и единственен для любой f , μ -дифференцируемой относительно $(\tilde{X}_{a,\tilde{r}}, \tilde{Y}_{b,\tilde{t}})$. Кроме того, если f — μ -дифференцируема относительно $(\tilde{X}_{a,\tilde{r}}, \tilde{Y}_{b,\tilde{t}})$, Z — метрическое пространство, а $g : Y \rightarrow Z$ — функция, μ -дифференцируемая относительно $(\tilde{Y}_{b,\tilde{t}}, \tilde{Z}_{c,\tilde{k}})$, то их суперпозиция $\psi = g \circ f$ — μ -дифференцируема относительно $(\tilde{X}_{a,\tilde{r}}, \tilde{Z}_{c,\tilde{k}})$ и имеет место цепное правило $D_\psi^* = D_g^* \circ D_f^*$.

3. КОНЕЧНОСТЬ, КОМПАКТНОСТЬ, ОГРАНИЧЕННОСТЬ

Пусть (X, d) — метрическое пространство с отмеченной точкой $a \in X$. Для каждого натурального $n \geq 2$ на декартовом произведении X^n определим функцию F_n по правилу

$$F_n(a, \dots, a) := 0$$

и

$$F_n(x_1, \dots, x_n) := \frac{\left(\prod_{1 \leq k < l \leq n} d(x_k, x_l) \right) \left(\min_{1 \leq k \leq n} d(x_k, a) \right)}{\left(\max_{1 \leq k \leq n} d(x_k, a) \right)^{\frac{n(n-1)}{2} + 1}},$$

если $(x_1, \dots, x_n) \neq (a, \dots, a)$.

Теорема 1. *Неравенство $\text{card}(\Omega_{a,\tilde{r}}) \leq n$ выполняется для любого $\tilde{X}_{a,\tilde{r}}$ тогда и только тогда, когда F_n непрерывна в точке (a, \dots, a) .*

Отметим, что неравенство $\text{card}(\Omega_{a,\tilde{r}}^X) \leq 1$ равносильно равенству $\text{card}(\Omega_{a,\tilde{r}}^X) = 1$, которое имеет место для всех $\Omega_{a,\tilde{r}}^X$, если и только если a является изолированной точкой в X .

Для любого $A \subseteq \mathbb{R}$ и точки $t \in A$ положим

$$p(A, t) := \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{l(t, h, A)}{h},$$

где $l(t, h, A)$ есть длина наибольшего интервала в

$$[t, t + h] \setminus A.$$

Величину $p(A, t)$ иногда называют *правосторонней пористостью* множества A в точке t .

Теорема 2. *Следующие утверждения эквивалентны.*

- (i) *Существует нормирующая последовательность \tilde{r} , для которой некоторое $\Omega_{a,\tilde{r}}^X$ является касательным и одноточечным.*
- (ii) *Существует нормирующая последовательность \tilde{r} , для которой все $\Omega_{a,\tilde{r}}^X$ будут касательными и компактными.*
- (iii) *Существует нормирующая последовательность \tilde{r} такая, что для любой ее подпоследовательности \tilde{r}' все предкасательные пространства $\Omega_{a,\tilde{r}'}^X$ ограничены.*
- (iv) *Правосторонняя пористость множества*

$$\{d(x, a) : x \in X\}$$

равна единице в нуле.

Пусть (Y, ρ) — метрическое пространство и пусть $\varepsilon > 0$. Обозначим через $\mathcal{N}_\varepsilon(Y, \rho)$ наименьшую из мощностей множеств $W \subseteq Y$, образующих ε -сеть для Y . Если

$$\mathbf{Y} = \{(Y_i, \rho_i) : i \in I\}$$

— семейство метрических пространств, то будем говорить, что \mathbf{Y} *равномерно предкомпактно*, если

$$\sup_{i \in I} \mathcal{N}_\varepsilon(Y_i, \rho_i) < \infty$$

для любого $\varepsilon > 0$. Напомним, что метрическое пространство называется *ограниченно компактным*, если любое его замкнутое ограниченное подмножество будет компактным.

Пусть (X, d) — метрическое пространство с отмеченной точкой a , а $\tilde{r} = \{r_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ — нормирующая последовательность. При $t > 0$ для каждого $i \in \mathbb{N}$ положим $d_i := \frac{1}{r_i}d$ и

$$B_i(t) := \{x \in X : d(x, a) < tr_i\},$$

т.е. $B_i(t)$ — открытый шар радиуса t с центром в точке a в пространстве (X, d_i) . Рассмотрим семейство пространств

$$\mathbf{O}(t, \tilde{r}, X, a) := \{(B_i(t), d_i) : i \in \mathbb{N}\}.$$

Теорема 3. Пусть $\Omega_{a, \tilde{r}}$ — касательное пространство к ограниченно компактному метрическому пространству X в точке a . Тогда $\Omega_{a, \tilde{r}}$ будет ограниченно компактным, если и только если семейство

$$\mathbf{O}(t, \tilde{r}, X, a)$$

равномерно предкомпактно при каждом $t > 0$.

Напомним, что метрическое пространство X удовлетворяет *условию удвоения* [11, с. 81], если существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что при любом $r > 0$ для каждого шара $B(x, r)$ найдутся шары $B(x_i, \frac{r}{2})$, $i = 1, \dots, N$, покрывающие $B(x, r)$,

$$B(x, r) \subseteq \bigcup_{i=1}^N B\left(x_i, \frac{r}{2}\right).$$

Следствие 1. Пусть X — метрическое пространство, удовлетворяющее условию удвоения. Тогда каждое касательное пространство к X будет ограниченно компактным.

Отсюда, в частности, вытекает следствие.

Следствие 2. Пусть метрическое пространство X изометрично вкладывается в конечномерное линейное нормированное пространство. Тогда любое касательное пространство к X будет ограничено компактным.

Используя теоремы 2 и 3 можно получить необходимые и достаточные условия компактности касательного пространства для данной нормирующей последовательности [8, теорема 6].

Доказательство теоремы 3 опирается на следующий полезный факт.

Теорема 4 ([10]). Пусть (X, d) — метрическое пространство с отмеченной точкой a , а \tilde{r} — нормирующая последовательность. Тогда любое касательное $\Omega_{a, \tilde{r}}$ является полным.

4. ПРИМЕРЫ КАСАТЕЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ. КАСАТЕЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА К ПОДПРОСТРАНСТВАМ

Пусть X совпадает с \mathbb{R}, \mathbb{R}^2 или $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$, которые рассматриваются как метрические пространства с обычной метрикой $d(x, y) = |x - y|$ и отмеченной точкой 0.

Теорема 5. Для любой нормирующей последовательности \tilde{r} и любого $\tilde{X}_{0, \tilde{r}}$ каждое предкасательное пространство $\Omega_{0, \tilde{r}}$ изометрично X и является касательным.

Сформулированная теорема дает простейшие «модельные» примеры касательных пространств. Для того, чтобы найти касательные пространства в менее тривиальных, с точки зрения геометрии, ситуациях введем необходимые отношения эквивалентности.

Пусть (X, d) — метрическое пространство с отмеченной точкой a и Y, Z — такие подпространства X , что $a \in Y \cap Z$.

Определение 5. Назовем подпространства Y и Z касательно эквивалентными в точке a относительно нормирующей последовательности $\tilde{r} = \{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, если для любых

$$\tilde{y}_1 = \{y_n^{(1)}\}_{n \in \mathbb{N}} \in \tilde{Y}, \quad \tilde{z}_1 = \{z_n^{(1)}\}_{n \in \mathbb{N}} \in \tilde{Z}$$

с конечными пределами

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(y_n^{(1)}, a)}{r_n} \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(z_n^{(1)}, a)}{r_n}$$

существуют $\tilde{y}_2 = \{y_n^{(1)}\}_{n \in \mathbb{N}} \in \tilde{Y}$ и $\tilde{z}_2 = \{z_n^{(2)}\}_{n \in \mathbb{N}} \in \tilde{Z}$, для которых

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(y_n^{(1)}, z_n^{(2)})}{r_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(y_n^{(2)}, z_n^{(1)})}{r_n} = 0.$$

Подпространства Y и Z сильно касательно эквивалентны в точке a , если они касательно эквивалентны в a для любой нормирующей последовательности.

Пусть Y — подпространство метрического пространства (X, d) . Для $a \in Y$ и $t > 0$ обозначим через

$$S^Y(a, t) := \{y \in Y : d(a, t) = t\}$$

сферу радиуса t с центром в a . Аналогично,

$$S^Z(a, t) := \{z \in Z : d(a, t) = t\}$$

для $a \in Z \subseteq X$ и $t > 0$. Пусть

$$\varepsilon_a(t, Z, Y) := \sup_{z \in S^Z(a, t)} \left(\inf_{y \in Y} d(z, y) \right)$$

и

$$\varepsilon_a(t) := \max\{\varepsilon_a(t, Z, Y), \varepsilon_a(t, Y, Z)\}.$$

Теорема 6 ([7]). Пусть Y и Z — подпространства метрического пространства X и $a \in Y \cap Z$. Тогда Y и Z сильно касательно эквивалентны в точке a , если и только если

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_a(t)}{t} = 0.$$

Следствие 3. Пусть Y — плотное подмножество метрического пространства X . Тогда X и Y сильно касательно эквивалентны в любой точке $a \in Y$.

Можно показать, что если Z и Y сильно касательно эквивалентны в точке $a \in Z \cap Y$, то для любого предкасательного пространства $\Omega_{a, \tilde{r}}^Z$ к Z найдется предкасательное пространство $\Omega_{a, \tilde{r}}^Y$ к Y , изометрически изоморфное $\Omega_{a, \tilde{r}}^Z$, причем, если $\Omega_{a, \tilde{r}}^Z$ является касательным, то $\Omega_{a, \tilde{r}}^Y$ тоже будет касательным.

Используя теоремы 5 и 6, можно построить дальнейшие примеры касательных пространств.

Пример 1. Пусть Y_1, \dots, Y_n , $n \geq 1$, — конечное число гладких двумерных поверхностей в евклидовом пространстве, проходящих через точку a , невырожденных в этой точке и имеющих в ней общую касательную плоскость, тогда для любой нормирующей последовательности \tilde{r} любое предкасательное пространство $\Omega_{a, \tilde{r}}^Y$ к пространству $Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_n$ изометрично \mathbb{R}^2 .

Пример 1 показывает, в частности, что для гладких поверхностей обычные касательные плоскости и рассматриваемые нами касательные пространства к метрическим пространствам «совпадают».

Пример 2. Пусть такие функции $f, g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, что

$$f(0) = g(0) = b, \quad f'(0) = g'(0).$$

Обозначим через X подмножество плоскости \mathbb{R}^2 , состоящее из точек $x + iy$, для которых $x \in [-1, 1]$ и

$$\min(f(x), g(x)) \leq y \leq \max(f(x), g(x)),$$

т.е. точек, лежащих между графиками функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$. Наделим X метрикой, индуцированной из \mathbb{R}^2 . Тогда в точке $a = (0, b)$ для любой \tilde{r} любое предкасательное пространство $\Omega_{a, \tilde{r}}^X$ изометрично \mathbb{R} и является касательным.

Пример 3. Пусть Y — подпространство евклидова пространства \mathbb{R}^3 , образованное вращением рога

$$\{(x, y) : x^{1+\alpha} \leq y \leq x^{1+\beta}, \quad 0 \leq x \leq 1\}, \quad \alpha \geq \beta > 0,$$

вокруг оси Ox . Тогда любое предкасательное пространство к Y в точке $0 = (0, 0, 0)$ будет касательным и изометрично \mathbb{R}^+ .

Большой интерес представляют касательные пространства к фрактальным подмножествам \mathbb{R}^2 . В этом случае, как показывает теорема 2, касательные пространства не будут ограниченными, а тем более компактными, но можно рассчитывать, что при подходящем выборе нормирующей последовательности свойство самоподобия будет сохранено.

Простейший пример — касательное пространство к множеству Кантора — можно найти в [9].

Не все предкасательные пространства являются касательными. Например, если X — замкнутое, выпуклое подмножество плоскости, $\text{Int}(X) \neq \emptyset$ и $a \in \text{Fr}(X)$, то для любой \tilde{r} найдется максимальное самостабильное $\tilde{X}_{a, \tilde{r}}$, для которого соответствующее предкасательное пространство $\Omega_{a, \tilde{r}}$ не является касательным. Отметим, что касательные $\Omega_{a, \tilde{r}}$ в этом случае изометричны наименьшему (по включению) замкнутому выпуклому конусу с вершиной в точке a , включающему X .

5. УЛЬТРАПРОИЗВЕДЕНИЯ И ПРЕДКАСАТЕЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Пусть (X, d) — метрическое пространство с отмеченной точкой a , $\tilde{r} = \{r_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ — нормирующая последовательность, ω — нетривиальный ультрафильтр на \mathbb{N} . Обозначим через $\tilde{X}^{\omega, a, \tilde{r}}$ множество всех таких последовательностей

$$\tilde{x} = \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in \tilde{X},$$

для которых

$$\sup \left\{ \frac{1}{r_i} d(x_i, a) : i \in \mathbb{N} \right\} < \infty.$$

Для любых $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}^{\omega, a, \tilde{r}}$ существует конечный ультрапредел

$$d^{\omega, \tilde{r}}(\tilde{x}, \tilde{y}) := \lim_{\omega} \frac{d(x_i, r_i)}{r_i},$$

являющийся псевдометрикой на $\tilde{X}^{\omega, a, \tilde{r}}$. Метрическую идентификацию псевдометрического пространства $(\tilde{X}^{\omega, a, \tilde{r}}, d^{\omega, \tilde{r}})$ назовем ультрапроизведением пространств

$$(X, \frac{1}{r_i}d, a), \quad i \in \mathbb{N},$$

и обозначим через $\Omega^{\omega, a, \tilde{r}}$. Очевидно, что

$$\tilde{X}_{a, \tilde{r}} \subseteq \tilde{X}^{\omega, a, \tilde{r}} \quad \text{и} \quad \tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{x}, \tilde{y}) = d^{\omega, \tilde{r}}(\tilde{x}, \tilde{y})$$

для любого максимального самостабильного $\tilde{X}_{a, \tilde{r}}$ и любых $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}_{a, \tilde{r}}$. Обозначим $is_{\tilde{r}}$ то изометрическое вложение предкасательного пространства $\Omega_{a, \tilde{r}}$ в ультрапроизведение $\Omega^{\omega, a, \tilde{r}}$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}_{a, \tilde{r}} & \xrightarrow{id} & \tilde{X}^{\omega, a, \tilde{r}} \\ p_{\tilde{r}} \downarrow & & \downarrow p^{\omega, \tilde{r}} \\ \Omega_{a, \tilde{r}} & \xrightarrow{is_{\tilde{r}}} & \Omega^{\omega, a, \tilde{r}} \end{array}$$

где $id(\tilde{x}) = \tilde{x}$ для всех $\tilde{x} \in \tilde{X}_{a, \tilde{r}}$, а $p_{\tilde{r}}$ и $p^{\omega, \tilde{r}}$ — соответствующие метрические проекции.

Пусть теперь A — подмножество \mathbb{N} , принадлежащее ω . Обозначим через $\omega' = \omega|_A$ след ультрафильтра ω на A ,

$$\omega' := \{B \cap A : B \in \omega\}$$

и пусть $\tilde{r}' = \tilde{r}|_A = \{r_i\}_{i \in A}$ — соответствующая подпоследовательность последовательности \tilde{r} . Тогда ω' — нетривиальный ультрафильтр на A и, заменяя ω на ω' и \tilde{r} на \tilde{r}' , можно определить пространства $\tilde{X}^{\omega', a, \tilde{r}'}$, $\Omega^{\omega', a, \tilde{r}'}$ и отображения $p^{\omega', \tilde{r}'}$, $is_{\tilde{r}'}$ аналогично тому, как это было сделано выше. Отметим, что

пространства $\Omega^{\omega', a, \tilde{r}'}$ и $\Omega^{\omega, a, \tilde{r}}$ изометричны. Точнее говоря, существует изометрия $Is_{\omega'}$, для которой коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}^{a, \tilde{r}} & \xrightarrow{em_{\tilde{r}}} & \tilde{X}^{a, \tilde{r}'} \\ p^{\omega, \tilde{r}} \downarrow & & \downarrow p^{\omega', \tilde{r}'} \\ \Omega^{\omega, a, \tilde{r}} & \xleftarrow{Is_{\omega'}} & \Omega^{\omega', a, \tilde{r}'} \end{array}$$

где $em_{\tilde{r}'}(\tilde{X}) = \tilde{X}|_A = \{x_i\}_{i \in A}$ для всех $\tilde{x} \in \tilde{X}^{a, \tilde{r}}$.

Следующее утверждение показывает, что метрическое пространство $\Omega^{\omega, a, \tilde{r}}$ является финальной структурой относительно семейства отображений

$$\Omega_{a, \tilde{r}'} \xrightarrow{is_{\tilde{r}'}} \Omega^{\omega', a, \tilde{r}'} \xrightarrow{Is_{\omega'}} \Omega^{\omega, a, \tilde{r}},$$

$\omega' = \omega|_A$, $\tilde{r}' = \tilde{r}|_A$, если A пробегает какую-нибудь базу фильтра ω . Обозначим $Is_{\omega', \tilde{r}'} := Is_{\omega'} \circ is_{\tilde{r}'}$.

Теорема 7. Пусть \mathcal{A} — база фильтра ω . Тогда для любого метрического пространства Z и любого отображения

$$f : \Omega^{\omega, a, \tilde{r}} \rightarrow Z$$

следующие утверждения эквивалентны:

- (i) f является изометричным (непрерывным),
- (ii) отображения

$$\Omega_{a, \tilde{r}'} \xrightarrow{Is_{\omega', \tilde{r}'}} \Omega^{\omega, a, \tilde{r}} \xrightarrow{f} Z,$$

$\omega' = \omega|_A$, $\tilde{r}' = \tilde{r}|_A$ изометричны (непрерывны) для всех предкасательных $\Omega_{a, \tilde{r}'}$, $A \in \mathcal{A}$.

Эта теорема верна для любого метрического пространства X . Потребовав от X выполнения условия удвоения, можно «построить» индуктивный спектр

$$\{\Omega_{a, \tilde{r}'}^n, \varphi_{\tilde{r}', \tilde{r}''} : \tilde{r}' = \tilde{r}|_A, \tilde{r}'' = \tilde{r}|_B, A, B \in \omega, A \preceq B\},$$

прямым пределом которого является метрическое пространство $\Omega^{\omega, a, \tilde{r}}$.

Для этого определим предпорядок \preceq на ω таким образом:

$$(A \preceq B) \Leftrightarrow (B \setminus A \text{ конечно}).$$

Тогда в (ω, \preceq) найдется конфинальное множество $\mathcal{A} \subseteq \omega$ вполне упорядоченное отношением \preceq .

Теорема 8. Пусть X удовлетворяет условию удвоения и пусть \mathcal{A} — вполне упорядоченное конфинальное подмножество (ω, \preceq) . Тогда имеет место теорема 7. Кроме того, для любых $A \preceq B$ из \mathcal{A} найдется изометрическое вложение

$$\varphi_{\tilde{r}', \tilde{r}''} : \Omega_{a, \tilde{r}'} \rightarrow \Omega_{a, \tilde{r}''}, \quad \tilde{r}' = \tilde{r}|_A, \quad \tilde{r}'' = \tilde{r}|_B$$

такое, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{a, \tilde{r}'} & \xrightarrow{Is_{\omega', \tilde{r}'}} & \Omega^{\omega, a, \tilde{r}} \\ \varphi_{\tilde{r}', \tilde{r}''} \downarrow & \nearrow Is_{\omega'', \tilde{r}''} & \\ \Omega_{a, \tilde{r}''} & & \end{array}$$

и для любого $C \succ B$, $C \in \mathcal{A}$, выполнены условия согласования $\varphi_{\tilde{r}', \tilde{r}'''} = \varphi_{\tilde{r}'', \tilde{r}'''} \circ \varphi_{\tilde{r}', \tilde{r}''}$, где $\tilde{r}''' = \tilde{r}|_C$.

В частности, теорема 8 показывает, что любое касательное пространство к метрическому пространству X , удовлетворяющему условию удвоения, является ультрапроизведением раздутий X . Заметим также, что условие удвоения в теореме 8 можно заменить сепарабельностью $\Omega^{\omega, a, \tilde{r}}$ или единственностью $\tilde{X}_{a, \tilde{r}}$ для любого данного \tilde{r} .

Благодарности. Многие результаты представленные в настоящей работе были получены во время визитов второго из авторов в университет г. Мерсин (Турция) и университет г. Хельсинки (Финляндия). Авторы благодарят за поддержку этих визитов TUBITAK и Академию Финляндии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ambrosio L. *Metric space valued functions of bounded variation* // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4). — 1990. — V. 17, № 3. — P. 439–478.
- [2] Ambrosio L., Kirchheim B. *Rectifiable sets in metric and Banach spaces* // Math. Ann. — 2000. — V. 318, № 3. — P. 527–555.
- [3] Ambrosio L., Tilli P. *Topics on analysis in metric spaces*. — Cambridge: Cambridge University Press, 2004. — P. 133.
- [4] Bridson M., Haefliger A. *Metric spaces of non-positive curvature*. — Berlin: Springer-Verlag, 1999.
- [5] Burago D., Burago Y., Ivanov A. *A course in metric geometry*. — American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2001.
- [6] Cheeger R. *Differentiability of Lipschitz functions on metric measure spaces* // Geom. Func. Anal. — 1999. — V. 9. — P. 428–517.
- [7] Dovgoshey O. *Tangent spaces to metric spaces and to their subspaces* // Український математичний вісник. — 2008. — Т. 5, № 4. — С. 470–487.
- [8] Dovgoshey O., Abdullayev F., Küçüaslan M. *Compactness and boundedness of tangent spaces to metric spaces* // to appear in Beiträge zur Algebra und Geometrie.
- [9] Dovgoshey O., Abdullayev F., Küçüaslan M. *Metric spaces with unique pretangent spaces* // arXiv: 0903.4676v2, 27 Mar. 2009.
- [10] Dovgoshey O., Martio O. *Tangent spaces to metric spaces* // Reports in Math., Helsinki Univ. — 2008. — V. 480. — P. 20.
- [11] Heinonen J. *Lectures on analysis on metric spaces*. — Springer-Verlag, New York, 2001. — P. 140.
- [12] Hajlasz P. *Sobolev spaces on an arbitrary metric spaces* // Potential Anal. — 1996. — V. 5. — P. 403–415.
- [13] Lytchak A. *Differentiation in metric spaces* // Алгебра и анализ. — 2004. — Т. 16. — С. 128–161.
- [14] Shanmugalingam N. *Newtonian space: an extension of Sobolev spaces to metric measure spaces* // Rev. Mat. Iberoamericana. — 2000. — V. 16. — P. 243–279.

Атаманюк О.Б., Атаманюк Б.В.

Прикарпатський національний університет

ім. В. Стефаника, м. Івано-Франківськ

E-mail: bogdanatamaniuk@ukr.net

Збереження геометричних властивостей динамічних систем при топологічному спряженні

In this article we investigated the preserving some geometrical properties of dynamical systems under the action of topological conjugations.

За теоремою Мардешеча [1] будь-який метричний зв'язний компакт (континуум) можна подати як границю деякого зворотного спектра (чи зворотної системи, коли множиною індексів є N). Тому дослідження геометричних властивостей зворотних систем проливає світло на геометричні властивості самих метричних компактів. З одного боку, цей підхід належить до топологічної динаміки. З іншого боку, динамічні системи бувають неперервні (коли індекс $\alpha \in A$) та дискретні (коли множина індексів дорівнює N). Якщо розглядати тільки дискретні динамічні системи, які ще й зворотні, то вони точно співпадають із зворотними спектрами з топологічної динаміки. Динамічні системи бувають автономні — коли між різними об'єктами діє одна і та сама проекція, та неавтономні, коли проекції різні.

Ми досліджуємо дискретні неавтономні системи, коли проекції різні, а тому наш об'єкт досліджень знаходиться на стику топологічної динаміки і теорії динамічних систем. Далі, якщо в теорії зворотних спектрів елементами границі зворотного спектру є нитки, які задовольняють умову транзитивності $\forall i \leq$

$j \leq k$, $p_{ji} \circ p_{kj} = p_{ki}$, то в теорії дискретних зворотних неавтономних динамічних систем ці самі нитки як траєкторії точки вздовж послідовності відображень з тією ж самою умовою транзитивності називаються орбітами.

Постановка задач виглядає так:

1) будь-яка орбіта складається з проєкцій, що пов'язані між собою умовою транзитивності;

2) розглядаються дві динамічні системи

$$\{X_i, p_{ij}\}, \quad \{Y_j, q_{ij}\},$$

які пов'язані між собою або умовою топологічної спряженості (якщо існує гомеоморфізм $h = \{h_i\}$), коли відповідні діаграми для проєкцій на всіх рівнях комутативні, тобто $h_i \circ p_i = q_i \circ h_{i+1}$, або умовою напівспряженості (якщо комутативність усіх таких діаграм залишається, але замість гомеоморфізмів h_i беруться сюр'єктивні відображення

$$\varphi_i : X_i \rightarrow Y_i,$$

які ще називаються фактор-відображеннями).

Досліджуємо, які геометричні властивості проєкцій p_{ij} зберігаються при переході за допомогою вказаного топологічного спряження від першої динамічної системи до другої, тобто чи буде проєкція q_i мати таку саму геометричну властивість, яку мала проєкція p_i . Перевіряються різні геометричні властивості проєкцій динамічних систем, наприклад, різні види м'якості проєкцій.

Теорема 1. *При топологічному спряженні зберігається апроксимативна м'якість проєкцій.*

Доведення. Нагадаємо означення: нехай $T : X_{i+1} \rightarrow X_i$ проєкція зворотної системи $\{X_i, p_{ij}\}$, тут ми позначаємо $p_{i,j} = T$ для зручності запису. Тоді апроксимативна м'якість T означає, що для будь-якого покриття $\omega \in \text{Cov}(X_i)$, для будь-якого замкнутого $A \subset B$, та для будь-яких двох відображень

$$g : A \rightarrow X_{i+1}, \quad h : B \rightarrow X_i$$

з умови $T \circ g = h \circ i$ випливає, що існує відображення $\psi : B \rightarrow X_{i+1}$ таке, що

- 1) $\psi \circ i = g$,
- 2) $(T \circ \psi, h) < \omega$,

тобто відображення ψ ділить діаграму на два комутативні трикутники, один з яких строго комутативний, а інший - квазікомутативний.

Нехай тепер $S : Y_{i+1} \rightarrow Y_i$ — проекція іншої зворотної системи $\{Y_i, q_{ij}\}$, тут ми для зручності перепозначимо проекцію $q_{ij} = S$, такої системи, яка топологічно спряжена з поперечною системою $\{X_i, p_{ij}\}$, тобто існує гомеоморфізм $\pi = \{\pi_{1,2}\}$ між системами такий, що $\pi_1 : X_i \rightarrow Y_i$, $\pi_2 : X_{i+1} \rightarrow Y_{i+1}$ — обидва гомеоморфізми і виконується рівність

$$S \circ \pi_2 = \pi_1 \circ T. \quad (*)$$

Треба довести апроксимативну м'якість проекцій S . Для цього строго за означенням зафіксуємо довільне відкрите покриття $U \in Cov(Y_i)$ та будь-яку замкнену підмножину $A \subset B$ і два довільні відображення

$$G : A \rightarrow Y_{i+1}, \quad H : B \rightarrow Y_i,$$

для яких виконується умова $S \circ G = H \circ i$.

Доведемо, що тоді існує відображення $\Psi : B \rightarrow Y_{i+1}$ таке, що виконуються такі рівності:

- 1) $\Psi \circ i = G$,
- 2) $(S \circ \Psi, H) < U$,

тобто Ψ повинне ділити велику діаграму на два комутативні трикутники — один строго комутативний, а інший — квазікомутативний.

Будуємо Ψ в такий спосіб. Нехай $\omega = \pi_1^{-1}(U)$ — покриття простору X_i , яке одержане з відповідного покриття U простору Y_i шляхом застосування оберненого гомеоморфізму π_1^{-1} . Далі, задаємо відображення

$$g = \pi_2^{-1} \circ G, \quad h = \pi_1^{-1} \circ H,$$

тоді $T \circ g = T \circ \pi_2^{-1} \circ G$. Застосувавши рівність (*) отримуємо

$$\pi_2^{-1} \circ S \circ G = \pi_1^{-1} \circ H \circ i = h \circ i,$$

отже, $T \circ g = h \circ i$. Далі, оскільки має місце комутативність великої діаграми, застосовуємо апроксимативну м'якість проєкції T , яка дана за умовою. Зокрема, для $\omega = \pi_1^{-1}(U)$ з умови $T \circ g = h \circ i$ випливає, що існує відображення $\psi : B \rightarrow X_{i+1}$, для якого виконуються рівності:

- 1) $\psi \circ i = g$,
- 2) $(T \circ \psi, h) < \omega$.

Застосуємо топологічну спряженість (*): $S \circ \pi_2 = \pi_1 \circ T$, — тоді $\pi_1(\omega) = \pi_1(\pi_1^{-1}(U)) = U$, тому що π_1 — гомеоморфізм. Задаємо Ψ формулою: $\Psi = \pi_2(\psi)$. За побудовою g та h маємо: $\pi_2(g) = G$ та $\pi_2(h) = H$. Залишилося перевірити, що побудована діагональ Ψ ділить велику діаграму на два комутативні трикутники. Для цього застосуємо π_2 та π_1 до двох трикутників:

- (1) комутативного $\psi \circ i = g$,
- (2) квазікомутативного трикутника $(T \circ \psi, h) < \omega$.

Одержимо $\pi_2(\psi \circ i) = \pi_2(g)$. Звідси випливає, що $\Psi \circ i = G$, а також

$$\begin{aligned} \pi_1(T \circ \psi, h) &< \pi(\omega), \\ (\pi_1 \circ T \circ \psi, \pi_1(h)) &< \pi_1(\pi_1^{-1}(U)). \end{aligned}$$

Далі застосовуємо рівність (*) $(S \circ \Psi, H) < U$. Ці дві умови — (1) $\Psi \circ i = G$ та (2) $(S \circ \Psi, H) < U$ — дають нам строгу комутативність одного та квазікомутативність іншого трикутника, а це означає, що S — апроксимативно м'яке відображення. \square

Теорема 2. *Якщо $f : X \rightarrow Y$ та $g : Y \rightarrow Z$ — апроксимативно м'які відображення, то їх композиція $g \circ f : X \rightarrow Z$ теж буде апроксимативно м'яким відображенням.*

Доведення. Нехай $\omega \in Cov(Z)$, $\gamma^* \succ \omega$ — зірчато вписане, $\gamma \in Cov(Z)$. Нехай A — замкнута підмножина B . Виберемо два довільні відображення $h : A \rightarrow X$ та $\varkappa : B \rightarrow Z$, які замикають до комутативності діаграму $\varkappa \circ i = g \circ f \circ h$. Потрібно довести,

що існує відображення $\varphi : B \rightarrow X$ таке, що виконуються дві умови:

- 1) $\varphi \circ i = h$,
- 2) $(g \circ f \circ \varphi, \varkappa) < \omega$.

Розглянемо відображення $\delta = f \circ h$. Тоді, за побудовою, маємо комутативність діаграми: $g \circ \delta = \varkappa \circ i$. Тому з умови апроксимативної м'якості $g : Y \rightarrow Z$ випливає, що існує відображення $\psi : B \rightarrow Y$, яке ділить дану діаграму на два комутативні трикутники:

- 1) $\psi \circ i = \delta$,
- 2) $(g \circ \psi, \varkappa) < \gamma$.

Першу комутативність можна записати ширше:

$$\psi \circ i = f \circ h.$$

Далі, використовуємо апроксимативну м'якість відображення

$$f : X \rightarrow Y,$$

за якою існує відображення $\varphi : B \rightarrow X$ таке, що $\varphi \circ i = h$ та $(f \circ \varphi, \psi) < \alpha$, де $\alpha = g^{-1}(\gamma) \in Cov(Y)$. Застосовуємо до останньої нерівності відображення g і отримуємо

$$(g \circ f \circ \varphi, g \circ \psi) < g(\alpha) = \gamma.$$

З іншого боку у нас була нерівність $(g \circ \psi, \varkappa) < \gamma$, а також за побудовою γ була зірчаста вписаність $\gamma^* \succ \omega$. Тому, об'єднуючи дані дві нерівності, ми одержимо

$$(g \circ f \circ \varphi, \varkappa) < (g \circ f \circ \varphi, g \circ \psi) + (g \circ \psi, \varkappa) < \gamma + \gamma < \omega.$$

Справді, оскільки існує $W_1 \in \gamma$, яке містить

$$\{g \circ f \circ \varphi(b), g \circ \psi(b)\}$$

, та $W_2 \in \gamma$, яке містить

$$\{g \circ \psi(b), \varkappa(b)\},$$

то із зірчастої вписаності $\gamma^* \succ \omega$ випливає, що існує окіл W , який містить $W_1 \cup W_2$, отже, W містить обидва образи $g \circ f \circ \varphi(b)$ та $\varkappa(b)$, це і дає нам близькість

$$(g \circ f \circ \varphi, \varkappa) < \omega.$$

Цим самим теорему про композицію апроксимативно м'яких відображень доведено. \square

Теорема 3. *Якщо дві динамічні системи (X, T) та (Y, S) напівспряжені нерозтягуючим фактор-відображенням π , то з умови $T \in \text{Helder}(\alpha)$ випливає $S \in \text{Helder}(\alpha)$.*

Доведення. Нагадаємо означення:

(1) *Степенем неперервності* відображення $f : X \rightarrow X$ називається

$$\omega_f(t) = \sup\{d(f(x), f(y)) : (x, y) \in X \text{ та } d(x, y) \leq t\}.$$

(2) Якщо $\omega_f(t) \leq Ct^\alpha$ для деякого $\alpha > 0$, то f називається *відображенням Гольдера* і позначається $f \in \text{Helder}(\alpha)$. При $\alpha = 1$ маємо відображення Ліпшиця.

Нехай $T \in \text{Helder}(\alpha)$. Звідси випливає, що $\omega_T(t) \leq Ct^\alpha$ для деякого $\alpha > 0$ та $C > 0$.

За означенням напівспряженості динамічних систем існує відображення $\pi : X \rightarrow Y$ таке, що $S \circ \pi = \pi \circ T$, де π – нерозтягуюче фактор-відображення. Тоді

$$\omega_S(t) = \sup\{d(S(u), S(v)) : (u, v) \in Y, d(u, v) \leq t\}.$$

Нехай $u = \pi(x)$, $v = \pi(y)$. Тоді

$$S(u) = S(\pi(x)) = \pi \circ T(x), \quad S(v) = S(\pi(y)) = \pi \circ T(y),$$

а тому

$$d(S(u), S(v)) = d(\pi \circ T(x), \pi \circ T(y)) \leq d(T(x), T(y)) \leq \omega_T(t).$$

Звідси випливає, що

$$\omega_S(t) = \sup\{d(S(u), S(v)) \leq \omega_T(t) \leq Ct^\alpha\}.$$

Отже, $\omega_S(t) \leq Ct^\alpha$, а значить $S \in \text{Helder}(\alpha)$. Теорема доведена. \square

Теорема 4. *Властивість SCU зберігається при топологічно-спряженні дискретних неавтономних динамічних систем.*

Доведення. Нехай дано дві топологічно спряжені динамічні системи (X, T) та (Y, S) . Нагадаємо, що відображення $T : X \rightarrow X'$ задовольняє умову SCU, якщо для будь-якого покриття $\omega \in \text{Cov}(X')$, для будь-якого замкнутого $A \subset B$, для будь-якого Z -вкладення $g : A \subset Y$, для будь-якого відображення $h : B \rightarrow X'$ з комутативності великої діаграми $T \circ g = h \circ i$ випливає, що існує Z -вкладення $\varphi : B \rightarrow X$ таке, що

- (1) $\varphi \circ i = g$,
- (2) $(T \circ \varphi, h) < \omega$.

Треба довести, що $S : Y \rightarrow Y'$ задовольняє умову SCU.

Зафіксуємо будь-яке покриття $U \in \text{Cov}(Y')$. Вкладення $A \subset B$ уже вибрано. Зафіксуємо будь-яке Z -вкладення $G : A \subset Y$ та будь-яке відображення $H : B \rightarrow Y'$. Нехай велика квадратна діаграма комутативна: $S \circ G = H \circ i$. Треба побудувати відображення $\Phi : B \rightarrow Y$, яке б задовольняло три такі умови:

- 1) $\Phi \circ i = G$,
- 2) $(S \circ \Phi, H) < U$,
- 3) Φ має бути Z -вкладенням.

Задаємо відображення $g : A \rightarrow B$ за формулою $g = \pi_2^{-1}(G)$. Звідси випливає, що $G = \pi_2(g)$, ми одержимо, що g також Z -вкладення, оскільки π_2 — гомеоморфізм, а при гомеоморфізмі властивість Z зберігається. Так само задаємо відображення $h = \pi_1^{-1}(H) \iff H = \pi_1(h)$, оскільки π_1 — гомеоморфізм.

Нехай $\omega = \pi_1^{-1}(U)$. Доведемо, що права квадратна діаграма комутативна: $T \circ g = h \circ i$. Справді,

$$T \circ g = T \circ \pi_2^{-1}(G) = \pi_1^{-1} \circ S(G) = \pi_1^{-1} \circ H \circ i = h \circ i.$$

За умовою, T задовольняє умову SCU. З комутативності правого квадрата $T \circ g = h \circ i$ випливає, що існує Z -вкладення

$\varphi : B \rightarrow X$, яке ділить квадратну діаграму на два комутативні трикутники: $\varphi \circ i = g$ (строга комутативність) та $(T \circ \varphi, h) < \omega$, де ω вибрано за побудовою так: $\omega = \pi_1^{-1}(U)$ тоді і тільки тоді, коли $U = \pi_1(\omega)$. Задаємо відображення $\Phi = \pi_2(\varphi)$. Оскільки $\varphi - Z$ -вкладення, а $\pi -$ гомеоморфізм, то Φ також Z -вкладення.

Доведемо, що Φ ділить комутативний квадрат

$$S \circ G = H \circ i$$

на два комутативні трикутники: $\Phi \circ i = G$ та $(S \circ \Phi, H) < U$. Справді, $\Phi \circ i = \pi_2(\varphi) \circ i = \pi_2(g) = G$. Далі, квазікомутативність $(S \circ \Phi, H) < U$ отримуємо із квазікомутативності $(T \circ \varphi, h) < \omega$ шляхом застосування до обох частин відображення π_1 . Одержимо

$$\begin{aligned} (\pi_1(T) \circ \varphi, \pi_1(h)) &= (S \circ \pi_2(\varphi), H) = \\ &= (S \circ \Phi, H) < \pi_1(\omega) = U \in \text{Cov}(Y'). \end{aligned}$$

Отже, проєкція S також задовольняє умову SCU. Теорема доведена. \square

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Александров П.С., Пасынков Б.А. *Введение в теорию размерности*. — М.: Наука, 1973. — с. 576.

УДК 517.548

И. Ю. Власенко*Институт Математики НАН Украины, Киев**E-mail: vlasenko@imath.kiev.ua*

Фактор-гомеоморфизм внутреннего эпиморфизма.

В роботі показано, що з кожним епіморфізмом, внутрішнім по Трохимчуку, природним чином асоціюється допоміжна динамічна система, яка індукує розбиття простору на замкнені множини, що не перетинаються. Це розбиття є інваріантним відносно внутрішнього відображення і є топологічним інваріантом відображення. На фактор-просторі відносно цього розбиття внутрішнє відображення індукує гомеоморфізм. Таким чином, динаміку внутрішнього відображення можна розкласти на дві складові: «нейтральну» динаміку і динаміку, що описується індукованим гомеоморфізмом.

В работе показано, что с каждым эпиморфизмом, внутренним по Трохимчуку, естественно ассоциируется вспомогательная динамическая система, индуцирующая разбиение пространства на замкнутые непересекающиеся множества. Это разбиение инвариантно относительно внутреннего отображения и является топологическим инвариантом отображения. На фактор-пространстве относительно этого разбиения внутреннее отображение индуцирует гомеоморфизм. Таким образом, динамику внутреннего отображения можно разложить на две составляющие: «нейтральную» динамику и динамику, которая описывается индуцированным гомеоморфизмом.

It is shown that an inner Trokhymchuk mapping allows a natural invariant splitting of its space onto closed mutually disjoint sets such that a dynamical system induced on a factor space is a homeomorphism.

Ключевые слова: *Внутренние отображения, нейтральные сечения, динамика внутренних отображений.*

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ.

Пусть M — компактное метрическое топологическое пространство и $f : M \rightarrow M$ — непрерывный эпиморфизм.

Определение 1. *Отображение f называется открытым, если образ любого открытого множества открыт.*

Определение 2. *Отображение f называется нульмерным, если прообраз любого нульмерного множества нульмерен.*

Определение 3. *Отображение f называется внутренним (inner) по Стоилову, если оно нульмерно и открыто.*

Обозначим через $O_f^+(x)$ положительную полутраекторию точки x , т. е. множество $\{f^n(x) \mid n \geq 0\}$.

Обозначим через $O_f^-(x)$ отрицательную полутраекторию точки x , т. е. множество $\{f^n(x) \mid n < 0\}$. Определение $O_f^-(x)$ корректно, так как мы предполагаем, что f — эпиморфизм.

Отметим, что по определению $O_f^+(x)$ состоит из точек, в то время как в общем случае уже $\{f^{-1}(x)\}$ представляет собой не что иное, как замкнутое множество. Однако, если f — нульмерное отображение, то в таком случае естественно воспринимать отрицательную полутраекторию точки x как набор различных точек.

Определение 4. *Полной траекторией $O_f(x)$ точки x назовем множество $\cup_{y \in O_f^+(x)} O_f^-(y)$.*

Определение 5. *Частной траекторией $o_f(x)$ точки x назовем произвольное множество вида*

$$\{x_i \mid f(x_i) = x_{i+1}, i \in \mathbb{Z}, x_0 = x\}.$$

Определение 6. *Отображение f называется изолированным, если прообраз точки состоит из изолированных точек.*

Замечание 1. *Изолированное отображение нульмерно.*

Определение 7. *Отображение f называется внутренним (inner) по Трехимчуку, если оно открыто и изолировано.*

Заметим, что на компактном множестве класс отображений, внутренних по Стоилову, совпадает с классом отображений, внутренних по Трехимчуку. Поэтому в данной работе мы говорим просто о внутренних отображениях.

Определим для каждой точки x ω -предельное множество $\omega(x)$ и α -предельное множество $\alpha(x)$:

$$\omega(x) = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(x)} \quad \alpha(x) = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(x)}$$

Заметим, что по определению эти множества замкнуты.

Определение 8. *Назовем точку x ω - (α -) рекуррентной, если $x \in \omega(x)$ (соответственно, $x \in \alpha(x)$).*

В случае гомеоморфизмов существует несколько эквивалентных определений понятия рекуррентных точек, которые, однако, для эпиморфизмов оказываются не эквивалентными. Дадим одно полезное альтернативное определение рекуррентных точек. Определим для точки x α -предельное множество ее траектории $\alpha^+(x)$:

$$\alpha^+(x) = \overline{\bigcup_{n=0}^{+\infty} \alpha(f^n(x))}$$

Заметим, что по определению это множество замкнуто.

Определение 9. *Назовем точку x α -слабо рекуррентной, если $x \in \alpha^+(x)$.*

1.1. Нейтральные сечения траектории. В отличие от гомеоморфизмов, для которых траектория точки в точности состоит из ее положительной и отрицательной полутраекторий, у внутренних отображений полная траектория точки имеет и

другие точки. Введем еще одно естественное подмножество полной траектории точки, которое не нигде не пересекается с ее положительной и отрицательной полутраекториями, кроме как в самой точке.

Определение 10. *Нейтральным сечением траектории точки x назовем множество $\{f^{-n}(f^n(x)) \mid n \geq 0\}$. Обозначим ее через $O_f^\perp(x)$.*

Как легко видеть из определения, если x — не ω -периодическая точка, а f имеет в точках орбиты больше одного прообраза, то полная траектория точки x распадается на бесконечное число нейтральных сечений, причем каждое нейтральное сечение состоит из бесконечного числа точек.

Заметим, что нейтральные сечения естественно упорядочены под действием f . Это может быть циклический порядок, если траектория точки x распадается на конечное число нейтральных сечений (только для ω -периодической траектории), либо линейный порядок. Таким образом, мы можем говорить о предыдущих либо последующих сечениях.

2. ДИНАМИКА НЕЙТРАЛЬНЫХ ПРЕДЕЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ.

Пусть x не является ω -периодической точкой, Рассмотрим ее нейтральное сечение — множество $O^\perp(x)$ (см. определение 10). Предположим также, что это нейтральное сечение состоит из бесконечного числа точек. Это так, например, когда сужение f^{-1} на точки полной орбиты является многозначным отображением. Тогда у нейтрального сечения будут предельные точки. Изучим некоторые свойства этих предельных точек.

Лемма 1. *Если $\overline{O^\perp(x)}$ содержит точки из $f^{-n}(O^\perp(x))$ для некоторого $n > 0$, то x — ω -рекуррентная траектория.*

Доказательство. Пусть в $\overline{O^\perp(x)}$ для некоторого $n > 0$ содержатся точки из $f^{-n}(O^\perp(x))$. Следовательно, для произвольной

окрестности некоторой точки из $f^{-n}(O^\perp(x))$ найдется сходящаяся последовательность точек из $O^\perp(x)$. В силу компактности (достаточно локальной компактности) X , отображения $f^{-k} \circ f^k$ переводят сходящуюся последовательность точек в одну или более сходящихся последовательностей. Поэтому в окрестности каждой точки из $O^\perp(f^{-n}(x))$ найдется сходящаяся последовательность точек из $O^\perp(x)$.

Применяя отображение f^n , получаем, что в окрестности каждой точки из $O^\perp(x)$ найдется сходящаяся последовательность точек из $f^n(O^\perp(x))$, в окрестности каждой точки из $f^n(O^\perp(x))$ найдется сходящаяся последовательность точек из $f^{2n}(O^\perp(x))$ и так далее. Отсюда и следует искомая ω -рекуррентность. \square

Полностью аналогично доказывается и следующее утверждение.

Лемма 2. *Если $\overline{O^\perp(x)}$ содержит точки из $f^n(O^\perp(x))$, $n > 0$, то $x - \alpha^+$ -рекуррентная траектория (см. определение 9).*

2.1. Предельное множество нейтрального сечения траектории. Определим для каждой точки x нейтральное предельное множество $\perp^0(x)$:

$$\perp^0(x) = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{N}^{+\infty} f^{-n} \circ f^n(x)}$$

По определению $\perp^0(x)$ — замкнутое множество. Непосредственно из определения следует, что нейтральное предельное множество $\perp^0(x)$ — одно и то же у всех точек нейтрального сечения $O^\perp(x)$. Также, поскольку все отображения $f^{-n} \circ f^n$ переводят сходящуюся последовательность точек в одну или несколько сходящихся последовательностей, $\perp^0(x)$ с каждой своей точкой содержит и соответствующее нейтральное сечение ее траектории.

2.2. Нейтральная компонента точки.

Определение 11. *Нейтральной компонентой точки x назовем пересечение прообразов $\varphi^{-1}(0)$ по всем непрерывным функциям $\varphi(p)$ таким, что $\varphi(x) = 0$ и $\varphi(x)$ на каждом нейтральном сечении принимает постоянные значения.*

Нейтральную компоненту точки x обозначим как $\mathbf{Z}^{\perp}(x)$.

Заметим, что по определению нейтральная компонента является замкнутым множеством и представляет собой объединение нейтральных сечений.

Лемма 3. *Нейтральная компонента не зависит от выбора точки x .*

Доказательство. Проведем доказательство от противного. Пусть найдутся точки x и y такие, что y принадлежит нейтральной компоненте точки x , но x не принадлежит нейтральной компоненте точки y . По определению, найдутся непрерывные функции $\phi_1(p)$ и $\phi_2(p)$ такие, что

$$\phi_1(x) = \phi_1(y) = \phi_2(y) = 0, \quad \phi_2(x) = c_2 \neq 0.$$

Рассмотрим функцию $\phi_3(p) = \phi_2(p) - c_2$. Это разность непрерывных функций, принимающих постоянные значения на каждом нейтральном сечении, следовательно, тоже непрерывная функция, принимающая постоянные значения на каждом нейтральном сечении. Но тогда, по определению, y не может принадлежать нейтральной компоненте точки x , поскольку $\phi_3(x) = 0$, но $\phi_3(y) = -c_2$. Получили противоречие. \square

Следствие 1. *Любые две нейтральные компоненты либо совпадают, либо не пересекаются.*

Лемма 4. *Образ и прообраз нейтральной компоненты тоже являются нейтральными компонентами.*

Доказательство. Покажем, что образ нейтральной компоненты является нейтральной компонентой. Сначала покажем, что

образ нейтральной компоненты лежит в нейтральной компоненте. Предположим от противного, что найдутся точки x и y , принадлежащие одной нейтральной компоненте, такие, что нейтральные компоненты $f(x)$ и $f(y)$ различны. Тогда найдется непрерывная постоянная на нейтральных сечениях функция ψ_1 такая, что

$$\psi_1(f(x)) = 0, \quad \psi_1(f(y)) = c_1 \neq 0.$$

Рассмотрим функцию $\psi_1 \circ f$. Имеем, что

$$\psi_1 \circ f(x) = 0, \quad \psi_1 \circ f(y) = c_1 \neq 0.$$

Получили противоречие, так как по предположению x и y принадлежат одной нейтральной компоненте.

Покажем теперь, что прообраз нейтральной компоненты лежит в нейтральной компоненте. Предположим от противного, что найдутся точки x и y , принадлежащие одной нейтральной компоненте, такие, что нейтральные компоненты $f^{-1}(x)$ и $f^{-1}(y)$ различны.

Заметим, что, поскольку нейтральная компонента состоит из нейтральных сечений, а для произвольной точки все точки ее прообраза принадлежат одному нейтральному сечению, то все точки ее прообраза задают одну и ту же нейтральную компоненту.

Согласно предположению, найдется непрерывная постоянная на нейтральных сечениях функция ψ_1 такая, что

$$\psi_1(f^{-1}(x)) = 0, \quad \psi_1(f^{-1}(y)) = c_1 \neq 0.$$

Рассмотрим функцию $\psi_1 \circ f^{-1}$. Несмотря на то, что f^{-1} — многозначное отображение, $\psi_1 \circ f^{-1}$ определена корректно, так как ψ_1 — функция, постоянная на нейтральных сечениях. Имеем, что

$$\psi_1 \circ f^{-1}(x) = 0, \quad \psi_1 \circ f^{-1}(y) = c_1 \neq 0.$$

Получили противоречие, так как по предположению x и y принадлежат одной нейтральной компоненте.

Это и доказывает лемму. \square

Следствие 2. *Внутреннее отображение $f: M \rightarrow M$ порождает разбиение M на замкнутые непересекающиеся множества — нейтральные компоненты.*

Следствие 3. *По построению, отображение f индуцирует гомеоморфизм на фактор-пространстве по разбиению на нейтральные компоненты.*

Пример 4. *Пример индуцированного гомеоморфизма на фактор-пространстве по разбиению на нейтральные компоненты.*

Построение. Рассмотрим аналитическую функцию

$$z^2: S^2 \rightarrow S^2.$$

У этой функции окружности с центром в 0 являются нейтральными компонентами. Фактор-пространство по разбиению на нейтральные компоненты гомеоморфно отрезку $[0, 8]$. У индуцированного гомеоморфизма точки 0 и 8 — неподвижные притягивающие, точка 1 — неподвижная отталкивающая. Оставшиеся точки блуждающие. \square

Пример 5. *Бассейн притяжения суперпритягивающей точки голоморфного отображения Римановой поверхности.*

Построение. Заметим, что бассейн притяжения суперпритягивающей точки обладает инвариантным слоением на эквипотенциальные кривые соответствующей функции Грина. Поэтому разбиение на нейтральные компоненты может быть только подразбиением этого расслоения. Но согласно теореме Бехтера в окрестности суперпритягивающей точки голоморфное отображение голоморфно сопряжено с функцией w^n , поэтому разбиение на нейтральные компоненты совпадает с разбиением на эквипотенциальные кривые соответствующей функции Грина, и соответствующее фактор-пространство представляет собой отрезок. \square

Таким образом, с каждым внутренним отображением можно связать нейтральное отображение и гомеоморфизм на фактор-пространстве нейтральных компонент.

Эти отображения дают декомпозицию динамики внутреннего отображения в том смысле, что нейтральное отображение индуцирует на фактор-пространстве тождественное отображение. По построению они являются топологическими инвариантами внутреннего отображения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Blokh A., Oversteegen L., Tymchatyn E. D. *On almost one-to-one maps* // Trans. Amer. Math. Soc. — 2006. — Vol. 358, № 11. — P. 5003–5014.
- [2] Kolyada S., Snoha L., Trofimchuk S.. *Proper minimal sets on compact connected 2-manifolds are nowhere dense* // Ergod. Th. & Dynam. Sys. — 2008. — Vol. 28, № 3. — P. 863–876.
- [3] Стоилов С. *О топологических принципах теории аналитических функций.* — М.:Мир, — 1964.
- [4] Грохимчук Ю. Ю. *Дифференцирование, внутренние отображения и критерии аналитичности* // Праці Інституту математики НАН України. Київ. — 2008. —Т.70. —540с.

MSC 2000: 52A38, 52A40

В. И. Дискант*Черкасский государственный технологический университет,
бул. Шевченко, 460, Черкассы, 18006, Украина**E-mail: diskant_vi@mail.ru*

Точность оценок ширины опорного слоя изопериметрика геометрии Минковского

Доведено необхідні та достатні умови, яким повинна задовольняти одинична куля B простору Мінковського M^n за Г. Буземаном, щоб оцінки

$$\begin{aligned}\Delta_B(Q_I(\bar{u})) &\geq \frac{4v_{n-1}}{nv_n}, \Delta_B(I) \geq \frac{4v_{n-1}}{nv_n}, \\ \Delta_B(Q_I(\bar{u})) &\leq \frac{4v_{n-1}}{v_n}, D_B(I) \leq \frac{4v_{n-1}}{v_n},\end{aligned}$$

перетворювалися в рівності. Для кожної із оцінок таке B існує, отже всі оцінки точні. В даних оцінках $\Delta_B(Q_I(\bar{u}))$ –ширина опорного шару, ортогонального вектору \bar{u} , изопериметрика I , $\Delta_B(I)$ –ширина I , $D_B(I)$ –діаметр I в M^n .

Доказаны необходимые и достаточные условия, каким должен удовлетворять единичный шар B пространства Минковского M^n по Г. Буземану, чтобы оценки

$$\begin{aligned}\Delta_B(Q_I(\bar{u})) &\geq \frac{4v_{n-1}}{nv_n}, \Delta_B(I) \geq \frac{4v_{n-1}}{nv_n}, \\ \Delta_B(Q_I(\bar{u})) &\leq \frac{4v_{n-1}}{v_n}, D_B(I) \leq \frac{4v_{n-1}}{v_n},\end{aligned}$$

обращались в равенства. Для каждой из оценок такое B существует, и значит, все оценки точны. В этих оценках $\Delta_B(Q_I(\bar{u}))$ –ширина опорного слоя, ортогонального вектору \bar{u} , изопериметрика I , $\Delta_B(I)$ –ширина I , $D_B(I)$ –диаметр I в M^n .

Proved necessary and sufficient condition, which must satisfy unit ball B of Minkowski space M^n by G. Busseman, in order estimations

$$\Delta_B(Q_I(\bar{u})) \geq \frac{4v_{n-1}}{nv_n}, \Delta_B(I) \geq \frac{4v_{n-1}}{nv_n},$$

$$\Delta_B(Q_I(\bar{u})) \leq \frac{4v_{n-1}}{v_n}, D_B(I) \leq \frac{4v_{n-1}}{v_n},$$

covert in equalities. For each of estimations such B exist, it means all estimations are exact. In these estimations $\Delta_B(Q_I(\bar{u}))$ -width of the support layer, perpendicular \bar{u} , of the isoperimetrix I , $\Delta_B(I)$ – width I , $D_B(I)$ – diameter I on M^n .

Ключевые слова: *изопериметрикс, геометрия Минковского*

Под выпуклым телом в n -мерном аффинном пространстве ($n \geq 2$) будем понимать выпуклый компакт, имеющий внутренние точки.

Пусть B – центрально-симметричное выпуклое тело, точка o – центр симметрии B . Для точки $x \neq o$ пространства рассмотрим луч, выходящий из o и проходящий через x . Обозначим через x_0 точку пересечения этого луча с границей B .

Положим $g(\bar{x}) = \frac{\bar{x}}{\bar{x}_0}$, $g(\bar{o}) = 0$, где \bar{x} – радиус-вектор точки x относительно точки o . Функцию $g(\bar{x})$ называют дистанционной функцией Минковского [1, с. 26].

При помощи дистанционной функции $g(\bar{x})$ Г. Минковский ввел в расстояние $\rho_B(x, y)$ между точками x и y , положив

$$\rho_B(x, y) = g(\bar{y} - \bar{x}).$$

Г. Минковский доказал, что $\rho_B(x, y)$ является метрикой в [2, с. 114].

Аффинное пространство A^n , в котором при помощи тела B введена метрика Минковского ρ_B , называется n -мерным пространством Минковского M^n . Тело B называют нормирующим телом M^n [2, с. 114].

Так как для точек B и только для точек B расстояние от o не превосходит единицы, а расстояние от до точек границы B равно единице, то тело B называют также единичным шаром .

Рассмотрим систему координат, выбрав 0 за ее начало. Введем в M^n скалярное произведение при помощи некоторой положительно определенной симметричной билинейной формы. Если в M^n введено скалярное произведение, то будем говорить, что в M^n задана вспомогательная евклидова метрика.

Для выпуклого компакта A , лежащего в m -мерной плоскости M^m ($1 \leq m \leq n$), положим, следуя Г. Буземану [2, с. 278], его m -мерный объем $V_m^B(A)$ равным

$$V_m^B(A) = \frac{V_m(A)}{V_m(B \cap M_0^m)} v_m, \quad (1)$$

где V_m — m -мерная мера Лебега относительно вспомогательной евклидовой метрики, M_0^m — плоскость, параллельная M^m , проходящая через o , v_m — объем единичного шара m -мерного евклидова пространства R^m .

Из (1) следует, что $V_n^B(B) = v_n$. Если вспомогательная евклидова метрика в M^n нормирована так, что

$$V_n(B) = v_n, \quad (2)$$

то в этой метрике евклидов объем $V_n(A)$ равен объему $V_n^B(A)$ для любого выпуклого компакта A в M^n .

Для решения вопроса о величине площади поверхности $S^B(A)$ выпуклого компакта A в M^n Г. Буземан рассмотрел в M^n выпуклое тело I — изопериметрикс M^n . Г. Буземан задал I при помощи его опорной функции $h_I(\bar{u})$ во вспомогательной евклидовой метрике с условием (2), равной

$$h_I(\bar{u}) = \frac{v_{n-1}}{V_{n-1}(B \cap T_0(\bar{u}))}, \quad (3)$$

где $\bar{u} \in \Omega$, Ω — единичная сфера R^n с центром в точке o в этой метрике, $T_0(\bar{u})$ — гиперплоскость, проходящая через o перпендикулярно \bar{u} [2, с.280].

Г. Буземан показал [2, с.282], что из (1) при $m = n - 1$ для площади поверхности $S^B(A)$ выпуклого компакта A в M^n в любой вспомогательной евклидовой метрике с условием (2) имеет

место равенство

$$S(A) = nV_1(A, I) \quad (4)$$

в котором $V_1(A, I)$ — первый смешанный объем тел A и I во вспомогательной евклидовой метрике с условием (2). Отсюда следует, что решением изопериметрической задачи во множестве выпуклых тел M^n является тело, положительно гомотетичное изопериметриксу I [2, с.282]. Этот факт объясняет как само название изопериметрикса, так и интерес к изучению его геометрических характеристик. Тело, положительно гомотетичное единичному шару B , в общем случае не является решением изопериметрической задачи в M^n .

В [2, с.279] показано, что I зависит только от единичного шара B пространства M^n и не зависит от выбора вспомогательной евклидовой метрики с условием (2).

Пусть A — выпуклое тело в пространстве M^n , T_A — произвольная опорная гиперплоскость тела A , T'_A — параллельная T_A и отличная от T_A опорная гиперплоскость тела A . Опорным слоем, отвечающим T_A , назовем множество точек

$$Q(T_A) = \bar{T}_A \cap \bar{T}'_A$$

, где \bar{T}_A — замкнутое опорное полупространство тела A , ограниченное T_A . Шириной опорного слоя $Q(T_A)$ назовем величину

$$\Delta_B(Q(T_A)) = 2q(Q(T_A), B),$$

где $q(Q(T_A), B)$ — коэффициент вместимости тела B в слой $Q(T_A)$, т.е. наибольшее из чисел α таких, что тело αB параллельным сдвигом помещается в слой $Q(T_A)$. Если в M^n введена вспомогательная евклидова метрика, то опорный слой $Q(T_A)$ будем обозначать через $Q_A(\bar{u})$, где $\bar{u} \in \Omega$ — единичный вектор, ортогональный к опорным гиперплоскостям T_A и T'_A тела A .

В [3, с.390,391] были получены следующие утверждения:

Теорема 1. Если $\bar{u}, \bar{v} \in \Omega$ — единичный вектор в произвольной вспомогательной евклидовой метрике пространства M^n ,

то для ширины $\Delta_B(Q_A(\bar{u}))$ опорного слоя $Q_A(\bar{u})$ имеет место равенство

$$\Delta_B(Q_A(\bar{u})) = 2q(Q_A(\bar{u}), B) = 2 \frac{h_A(\bar{u}) + h_A(-\bar{u})}{h_B(\bar{u}) + h_B(-\bar{u})}, \quad (5)$$

где $h_A(\bar{u})$ — опорное число тела A , отвечающее \bar{u} в этой метрике.

Замечание 1. В [3, с.390] показано, что правая часть в (5) непрерывна и принимает на Ω максимальное и минимальное значения. Максимальное значение правой части (5) было названо диаметром $D_B(A)$ тела A в M^n , а минимальное — шириной $\Delta_B(A)$ тела A в M^n . В [4, с.220] было доказано, что $D_B(A)$ совпадает с максимумом расстояний между двумя точками тела A в M^n .

Замечание 2. Так как B и I — центрально-симметричные выпуклые тела в M^n , точка o — их общий центр симметрии, то из теоремы 1 следует, что в произвольной вспомогательной евклидовой метрике пространства M^n для ширины опорного слоя изопериметрика I справедливо равенство

$$\Delta_B(Q_I(\bar{u})) = 2 \frac{h_I(\bar{u})}{h_B(\bar{u})}.$$

Теорема 2. Для ширины $\Delta_B(Q_I(\bar{u}))$ опорного слоя изопериметрика I в M^n имеют место следующие оценки

$$\frac{4v_{n-1}}{nv_n} \leq 2 \frac{h_I(\bar{u})}{h_B(\bar{u})} \leq \frac{4v_{n-1}}{v_n}, \quad (6)$$

где $\bar{u} \in \Omega$ — единичный вектор в произвольной евклидовой метрике.

Теорема 3. Для ширины $\Delta_B(I)$ и диаметра $D_B(I)$ изопериметрика I в M^n имеют место оценки:

$$\frac{4v_{n-1}}{nv_n} \leq \Delta_B(I) \leq D_B(I) \leq \frac{4v_{n-1}}{v_n}. \quad (7)$$

В настоящей работе будут доказаны следующие утверждения.

Теорема 4. Пусть в M^n введена вспомогательная евклидова метрика с условием (2). В неравенстве

$$\frac{2v_{n-1}}{nv_n} \leq \frac{h_I(\bar{u})}{h_B(\bar{u})}, \quad (8)$$

знак равенства имеет место для такого единичного шара B и такого вектора $\bar{u}_0, \bar{u}_0 \in \Omega$, пространства M^n , тогда и только тогда результатом симметризации Шварца [2, с.224] единичного шара B относительно прямой, параллельной \bar{u}_0 , будет прямой шаровой биконус.

Теорема 5. Пусть в M^n введена вспомогательная евклидова метрика с условием (2). В неравенстве

$$\frac{4v_{n-1}}{nv_n} \leq \Delta_B(I) \quad (9)$$

знак равенства имеет место для единичного шара B пространства M^n , если и только если существует вектор $\bar{u}_0 \in \Omega$ в M^n такой, что результатом симметризации Шварца единичного шара B относительно прямой, параллельной \bar{u}_0 , будет прямой шаровой биконус.

Теорема 6. Пусть в M^n введена вспомогательная евклидова метрика с условием (2). В неравенстве

$$\frac{h_I(\bar{u})}{h_B(\bar{u})} \leq \frac{2v_{n-1}}{v_n}, \quad (10)$$

знак равенства имеет место для единичного шара B и вектора $\bar{u}_0 \in \Omega$ пространства M^n , тогда и только тогда, когда результатом симметрии Шварца единичного шара B относительно прямой, параллельной \bar{u}_0 , будет прямой шаровой цилиндр.

Теорема 7. Пусть в M^n введена вспомогательная евклидова метрика с условием (2). В неравенстве

$$D_B(I) \leq \frac{4v_{n-1}}{v_n} \quad (11)$$

знак равенства имеет место для единичного шара B пространства M^n , если и только если существует вектор $\bar{u}_0 \in \Omega$ в M^n такой, что результатом симметризации Шварца единичного шара B относительно прямой, параллельной \bar{u}_0 , будет прямой шаровой цилиндр.

Теорема 8. Пусть в M^n введена вспомогательная евклидова метрика с условием (2) и A — выпуклое тело в M^n . Тогда имеют место оценки

$$\frac{2v_{n-1}}{v_n} V_1(A, B) \leq S^B(A) \leq \frac{2nv_{n-1}}{v_n} V_1(A, B), \quad (12)$$

$$2v_{n-1} \leq S^B(B) \leq 2nv_{n-1}. \quad (13)$$

Доказательство теоремы 4. Введем в M^n вспомогательную евклидову метрику, удовлетворяющую условию (2). Перейдем от базиса этой метрики к ортонормированному базису. Пусть система координат x_1, \dots, x_n порождена ортонормированным базисом. Гиперплоскость $x_n = 0$ делит B на две части B_1 и B_2 , где

$$B_1 = B \cap (x_n \geq 0), \quad B_2 = B \cap (x_n \leq 0),$$

$$V(B_1) = V(B_2) = \frac{v_n}{2}.$$

Пусть отрезок $[-b, b]$, $b > 0$, является проекцией тела B на ось ox_n , тогда $h_B(\bar{u}) = h_{B_1}(\bar{u}) = b$, где $\bar{u} \in \Omega$ имеет направление оси ox_n .

Подвергнем B симметризации Шварца [2, с.224] относительно оси ox_n . Результат симметризации обозначим через \tilde{B} . Проекцией \tilde{B} на ось ox_n будет отрезок $[-b, b]$, а сечением $\tilde{B} \cap (x_n =$

c), $-b \leq c \leq b$, будет $(n-1)$ -мерный шар с центром в точке c на оси ox_n , $(n-1)$ -мерный объем которого

$$V_{n-1}(\tilde{B} \cap (x_n = c)) = V_{n-1}(B \cap (x_n = c)).$$

Тела

$$\tilde{B}_1 = \tilde{B} \cap (x_n \geq 0)$$

и

$$\tilde{B}_2 = \tilde{B} \cap (x_n \leq 0)$$

будут результатами симметризации тел B_1 и B_2 . При этом

$$V(\tilde{B}) = V(B) = v_n, \quad V(B_1) = V(\tilde{B}_1) = \frac{v_n}{2},$$

$$h_B(\vec{u}) = h_{B_1}(\vec{u}) = h_{\tilde{B}_1}(\vec{u}) = h_{\tilde{B}}(\vec{u}) = b.$$

В [3, с.392] было показано, что

$$\begin{aligned} V_{n-1}(B \cap (x_n = \alpha)) &= V_{n-1}(B \cap (x_n = -\alpha)) \leq \\ &\leq V_{n-1}(B \cap (x_n = 0)), \end{aligned}$$

$0 \leq \alpha \leq b$. Значит, \tilde{B} — симметрично относительно гиперплоскости $x_n = 0$.

Кроме тел B_1 и \tilde{B}_1 , рассмотрим тело K — прямой шаровой конус с основанием $\tilde{B}_1 \cap (x_n = 0)$, высотой которого является отрезок $[0, b]$ на оси ox_n .

Покажем справедливость равенства

$$\frac{h_I(\vec{u})}{h_B(\vec{u})} V(K) = \frac{v_{n-1}}{n}. \quad (14)$$

Воспользовавшись (3), выразим $V(K)$ через $\frac{h_I(\vec{u})}{h_B(\vec{u})}$.

Имеем

$$\begin{aligned} V(K) &= \frac{1}{n} b V_{n-1}(\tilde{B}_1 \cap (x_n = 0)) \\ &= \frac{h_B(\vec{u}) \cdot v_{n-1}}{\frac{nv_{n-1}}{V_{n-1}(B \cap (x_n = 0))}} = \frac{h_B(\vec{u}) v_{n-1}}{nh_I(\vec{u})}, \end{aligned}$$

откуда и следует (14).

Если теперь в (8) имеет место знак равенства при $\vec{u} = \vec{u}_0$, т. е. $\frac{h_I(\vec{u}_0)}{h_B(\vec{u}_0)} = \frac{2v_{n-1}}{nv_n}$, то из (14) следует $V(K) = \frac{v_n}{2}$. Отсюда $V(K) = V(\tilde{B}_1)$. Так как $K \subset \tilde{B}_1$ и тело K имеет внутренние точки, то $K = \tilde{B}_1$, т.е. \tilde{B} — прямой шаровой биконус.

Наоборот, если результатом симметризации Шварца шара B относительно прямой, параллельной вектору $\vec{u} = \vec{u}_0$, будет биконус, то $V(K) = \frac{v_n}{2}$, и из (14) вытекает обращение (8) в равенство при $\vec{u} = \vec{u}_0$.

Доказательство теоремы 5. Ширина $\Delta_B(I)$ изопериметрика I по определению равна

$$\Delta_B(I) = \min_{\vec{u} \in \Omega} 2 \frac{h_I(\vec{u})}{h_B(\vec{u})}.$$

Из замечания 1 следует, что $\frac{h_I(\vec{u})}{h_B(\vec{u})}$ определена и непрерывна на Ω . Значит, минимум этой функции на Ω достижим, например, в точке $\vec{u}_0 \in \Omega$. Тогда равенство

$$\frac{4v_{n-1}}{nv_n} = \Delta_B(I)$$

равносильно тому, что

$$\frac{2v_{n-1}}{nv_n} = \frac{h_I(\vec{u}_0)}{h_B(\vec{u}_0)}.$$

И значит, для пары B, \vec{u}_0 выполняются условия теоремы 4, а для теоремы 5 — условия равенства в неравенстве (8).

Доказательство теоремы 6. Кроме тел B_1 и \tilde{B}_1 , рассмотрим тело Π — прямой шаровой цилиндр с основанием $\tilde{B}_1 \cap (x_n = 0)$, высотой которого является отрезок $[0, b]$ оси ox_n . Так как Π и K имеют одинаковые высоты и основания, то $V(\Pi) = nV(K)$, и из (14) следует равенство

$$\frac{h_I(\vec{u})}{h_B(\vec{u})} V(\Pi) = v_{n-1}. \quad (15)$$

Если в (10) имеет место знак равенства при $\vec{u} = \vec{u}_0$, $\vec{u}_0 \in \Omega$, то есть

$$\frac{h_I(\vec{u}_0)}{h_B(\vec{u}_0)} = \frac{2v_{n-1}}{v_n},$$

то из (15) вытекает $V(\Pi) = \frac{v_n}{2}$. Отсюда, $V(\Pi) = V(\tilde{B}_1)$. Так как $\tilde{B}_1 \subset \Pi$ и \tilde{B}_1 имеет внутренние точки, то $\tilde{B}_1 = \Pi$, то есть \tilde{B}_1 , а значит и \tilde{B} — прямой шаровой цилиндр.

Наоборот, если \tilde{B}_1 — прямой шаровой цилиндр, то

$$V(\tilde{B}_1) = V(\Pi).$$

Тогда из $V(\tilde{B}_1) = V(\Pi) = \frac{v_n}{2}$ и (15) следует из того, что

$$\frac{h_I(\vec{u}_0)}{h_B(\vec{u}_0)} = \frac{2v_{n-1}}{v_n}$$

Доказательство теоремы 7 аналогично доказательству теоремы 5.

Доказательство теоремы 8. Перепишем неравенство (6) в виде

$$\frac{2v_{n-1}}{nv_n} h_B(\bar{u}) \leq h_I(\bar{u}) \leq \frac{2v_{n-1}}{v_n} h_B(\bar{u}).$$

Осюда и из свойств опорной функции [1, с.30]

$$\frac{2v_{n-1}}{nv_n} B \subset I \subset \frac{2v_{n-1}}{v_n} B. \quad (16)$$

Из однородности и монотонности смешанного объема по каждому из своих аргументов [1, с.49] и из (16) для выпуклого тела A в M^n получаем, что

$$\frac{2v_{n-1}}{nv_n} V_1(A, B) \leq V_1(A, I) \leq \frac{2v_{n-1}}{v_n} V_1(A, B). \quad (17)$$

Если в M^n введена вспомогательная евклидова метрика удовлетворяющая условию (2), то после умножения всех частей неравенства (17) на n и из (4) придем к неравенству (12).

Положим теперь в (12) $A = B$. Тогда (12) запишется в виде

$$\frac{2v_{n-1}}{v_n} V_1(B, B) \leq S^B(B) \leq \frac{2nv_{n-1}}{v_n} V_1(B, B), \quad (18)$$

где $S^B(B)$ — площадь поверхности единичного шара B в M^n , $V_1(B, B) = V(B) = v_n$. И значит, неравенства (18) равносильны известным оценкам (13)

$$2v_{n-1} \leq S^B(B) \leq 2nv_{n-1}$$

для $S^B(B)$, принадлежащих Буземану-Петти [5, с.242].

Правая из этих оценок обращается в равенство, тогда и только тогда, когда B — параллелотоп [5, с.242].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Боннезен Т., Фенхель В. *Теория выпуклых тел.* — М.: ФАЗИС, 2002. — 210 с.
- [2] Лейхтвейс К. *Выпуклые множества.* — М.: Наука, 1985. — 336 с.
- [3] Diskant V. I. *Estimates for Diameter and Width for the isoperimetrix in Minkowski geometry* // J. of Math. physics, analysis, geometry. — 2006. — Vol. 2, № 4. — P. 388–395.
- [4] Дискант В. И. *Уточнение изодиаметрального неравенства в геометрии Минковского* // Матем. физика, анализ, геометрия. — 1994. — Т. 1, № 2. — С. 216–226.
- [5] Thompson A. C. *Minkowski Geometry*, Encyclopedia of Mathematics and Applications. — V. 63. — Cambridge: Cambridge University Press, 1996. — P. 346.

УДК 514.7

Н. Г. Коновенко*Одесская национальная академия пищевых технологий,**Одесса**E-mail: konovenko@ukr.net*

Проективные структуры и уравнения Шредингера

В даній статті встановлено зв'язок між проективними структурами на прямій і рівняннями Шредингера. Використовуючи цей зв'язок, ми формулюємо критерій нееквівалентності проективної структури стандартній. Для всіх класів проективних геометричних величин описано алгебри їх диференціальних інваріантів.

В этой работе мы устанавливаем связь между проективными структурами на прямой и уравнениями Шредингера. Используя эту связь, мы формулируем критерий неэквивалентности проективной структуры стандартной. Для всех классов проективных геометрических величин найдены алгебры их дифференциальных инвариантов.

In this paper we describe a connection between projective structures on the line and the Schrödinger equations. Using this connection we find a condition when a projective structure is equivalent or nonequivalent to the standard one. For all projective structures algebras of differential invariants are found.

Ключевые слова: *Проективные структуры, дифференциальные инварианты.*

© Н. Г. Коновенко

1. ПРОЕКТИВНЫЕ СТРУКТУРЫ И $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ -ДЕЙСТВИЯ

Рассмотрим алгебру Ли инфинитезимальных проективных преобразований прямой. Эта алгебра изоморфна алгебре Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ и может быть реализована как алгебра Ли векторных полей на прямой $\mathfrak{g} = \langle \partial_x, x\partial_x, x^2\partial_x \rangle$.

Пусть диффеоморфизм $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ переводит алгебру Ли \mathfrak{g} в себя, то есть: $\varphi_*(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$. Тогда, как нетрудно видеть, этот диффеоморфизм является дробно-линейным преобразованием. И обратно, всякое дробно-линейное преобразование переводит (в области определения) алгебру Ли \mathfrak{g} в себя.

Напомним, что проективная структура на прямой задается атласом (U, t) , в котором локальные координаты t связаны дробно-линейными преобразованиями. Пусть теперь (U, t) — карта из этого атласа. Определим алгебру Ли \mathfrak{g}_U векторных полей на U — как алгебру, порожденную векторными полями $\partial_t, t\partial_t, t^2\partial_t$. Тогда в пересечении двух таких карт, скажем (U, t) и (V, s) , алгебры Ли \mathfrak{g}_U и \mathfrak{g}_V совпадают, так как переход от координаты t к координате s задается дробно-линейным преобразованием. Следовательно, семейство алгебр $\{\mathfrak{g}_U\}$ определяет алгебру Ли $\mathfrak{g} \subset D(\mathbb{R})$, которая является подалгеброй Ли в алгебре Ли $D(\mathbb{R})$ векторных полей на прямой, и ограничение которой на любую проективную карту (U, t) совпадает с \mathfrak{g}_U .

С другой стороны, если задана подалгебра Ли $\tilde{\mathfrak{g}} \subset D(\mathbb{R})$, изоморфная $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$, то для каждой точки $a \in \mathbb{R}$, согласно теореме Софуса Ли (см. [11, 10]), найдется такая карта (U, t) , в которой ограничения $\tilde{\mathfrak{g}}$ будут совпадать с \mathfrak{g}_U . Более того, две такие карты будут связаны дробно-линейным преобразованием. Таким образом, мы получаем следующий результат.

Теорема 1. *Задание проективной структуры на прямой эквивалентно заданию подалгебры Ли $\mathfrak{g} \subset D(\mathbb{R})$, изоморфной $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$.*

2. ЭФФЕКТИВНЫЕ ДЕЙСТВИЯ АЛГЕБРЫ ЛИ $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ НА ПРЯМОЙ

Задание подалгебры Ли $\mathfrak{g} \subset D(\mathbb{R})$, изоморфной алгебре Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$, можно представить как задание нетривиального гомоморфизма алгебр Ли

$$\rho : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \rightarrow D(\mathbb{R}).$$

Поскольку алгебра Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ проста, то для любого гомоморфизма ρ либо $\ker \rho = 0$, либо $\ker \rho = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$. Поэтому эффективность действия, то есть $\ker \rho = 0$, эквивалентна нетривиальности гомоморфизма ρ . Для таких гомоморфизмов алгебра Ли $\rho(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})) = \mathfrak{g}$ изоморфна $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$.

Таким образом, задание проективной структуры на прямой эквивалентно заданию нетривиального гомоморфизма алгебр Ли ρ , или, что тоже самое, эффективности действия алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ на прямой.

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

— базис Шевалле в алгебре Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$, удовлетворяющий следующим коммутационным соотношениям:

$$[H, A] = -2A, \quad [H, B] = 2B, \quad [A, B] = H.$$

Рассмотрим теперь нетривиальный гомоморфизм ρ . Чтобы не усложнять обозначения, образы векторов A, B, H в $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ при этом гомоморфизме мы будем обозначать через A, B, H . Итак, пусть

$$A = a(x)\partial_x, \quad B = b(x)\partial_x, \quad H = h(x)\partial_x$$

— представления векторных полей A, B, H , где x — аффинная координата на прямой.

Тогда коммутационные соотношения в алгебре Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$:

$$[H, A] = -2A, \quad [H, B] = 2B, \quad [A, B] = H$$

приводят к следующей системе дифференциальных уравнений на функции $a(x)$, $b(x)$, $h(x)$:

$$h = ab' - ba', \quad -2a = ha' - ah', \quad 2b = hb' - bh'. \quad (2.1)$$

Отсюда следует, что

$$h^2 = 4ab, \quad (2.2)$$

а также то, что функции a и b не обращаются в ноль одновременно.

Поэтому, функции a и b либо положительны, либо отрицательны на всей прямой. Если, например, $a > 0$ и $b > 0$, то, представив $a = f^2$, $b = g^2$, получаем, что $h = \pm 2fg$. Изменяя знак у функции f или g мы можем перейти к случаю, когда $h = 2fg$.

Случай, когда a и b отрицательны сводится к предыдущему заменой x на $-x$. Покажем теперь, что функции f и g в представлении

$$a = f^2, \quad b = g^2, \quad h = 2fg$$

являются гладкими.

Действительно, если в некоторой области $b > 0$, $a \geq 0$, то $b = g^2$, где g — гладкая функция. Из соотношения (2.2) получаем, что $a = \frac{h^2}{4g^2} = \left(\frac{h}{2g}\right)^2$, поэтому $f = \frac{h}{2g}$ также гладкая функция. Преобразовывая систему дифференциальных уравнений (2.1), приходим к единственному соотношению:

$$fg' - gf' = 1. \quad (2.3)$$

Дифференцируя это соотношение получаем $fg'' = gf''$.

Положим $W = \frac{f''}{f} = \frac{g''}{g}$. Поскольку функции f и g не обращаются в ноль одновременно, то функция W является гладкой. Учитывая (2.3) заключаем, что функции f и g являются фундаментальной системой решений уравнения типа Шредингера:

$$y'' - Wy = 0. \quad (2.4)$$

Отметим также, что функции f^2 , g^2 и fg дают фундаментальную систему решений для уравнения третьего порядка

$$y''' - 4Wy' - 2W'y = 0. \quad (2.5)$$

Это уравнение — симметрический квадрат уравнения Шредингера ([8, 10]). Суммируя сказанное, приходим к следующему результату:

Теорема 2. (1) Каждое нетривиальное представление алгебры Ли $\rho : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \rightarrow D(\mathbb{R})$ в алгебре векторных полей на прямой задается (с точностью до инволюции $x \mapsto -x$) фундаментальной системой решений уравнения Шредингера $y'' - Wy = 0$ и имеет вид

$$A = f^2\partial_x, \quad H = 2fg\partial_x, \quad B = g^2\partial_x, \quad (2.6)$$

где f и g образуют фундаментальную систему решений уравнения (2.4) с вронскианом, равным единице (2.3).

(2) Образ \mathfrak{g} гомоморфизма ρ состоит из всех векторных полей вида $z(x)\partial_x$, где $z(x)$ — решения дифференциального уравнения:

$$z''' - 4Wz' - 2W'z = 0.$$

Далее, обозначаем через $\rho_{f,g}^W$ представление (2.6), отвечающее данному выбору фундаментальной системы решений f и g , тогда, если \tilde{f}, \tilde{g} — другая такая же фундаментальная система решений, то $(f, g) = A(\tilde{f}, \tilde{g})$, где $A \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$. При этом

$$\rho_{\tilde{f}, \tilde{g}}^W = \rho_{f,g}^W \circ ad_A,$$

где $ad_A : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ — присоединенное действие группы Ли $\mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$ на алгебре Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$.

Обозначим теперь через $\mathfrak{g}^W \subset D(\mathbb{R})$ образ представления $\rho_{f,g}^W$, а через \mathfrak{P}^W — соответствующую проективную структуру. Тогда потенциал W уравнения Шредингера, отвечающий подалгебре Ли $\mathfrak{g}^W \subset D(\mathbb{R})$, связан с проективной структурой \mathfrak{P}^W и может быть найден следующим образом.

Пусть e_1, e_2, e_3 — произвольный базис в алгебре Ли \mathfrak{g}^W , и пусть $e_1 = f_1(x)\partial_x$, $e_2 = f_2(x)\partial_x$, $e_3 = f_3(x)\partial_x$, где x — аффинная координата на прямой.

Обозначим через $\langle f_1, \dots, f_r \rangle$ вронскиан функций

$$f_1, \dots, f_r$$

и пусть

$$w_1 = \langle f_1 \rangle, \quad w_2 = \langle f_1, f_2 \rangle, \quad w_3 = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle,$$

тогда

$$W = \frac{1}{4}[L, x](1), \quad (2.7)$$

где L — дифференциальный оператор 3-го порядка (см. [2, стр. 96]):

$$L = \frac{w_3}{w_2} \circ \partial_x \circ \frac{w_2^2}{w_3 w_1} \circ \partial_x \circ \frac{w_1^2}{w_2} \circ \partial_x \circ \frac{1}{w_1}.$$

Приведем несколько примеров использования этой теоремы.

Пример 6. *Стандартным дифференциальным уравнениям второго порядка отвечают следующие проективные структуры:*

1) $y'' = 0$:

$$A = \partial_x, \quad B = x^2 \partial_x, \quad H = 2x \partial_x.$$

2) $y'' + \omega^2 y = 0$:

$$A = \cos^2(\omega x) \partial_x, \quad B = \sin^2(\omega x) \partial_x, \quad H = \sin(2\omega x) \partial_x.$$

3) $y'' - k^2 y = 0$:

$$A = \operatorname{ch}^2(kx) \partial_x, \quad B = \operatorname{sh}^2(kx) \partial_x, \quad H = \operatorname{sh}(2kx) \partial_x.$$

4) $y'' + \frac{\lambda^2}{x^4} y = 0$:

$$A = \frac{x^2}{\lambda^2} \sin^2(\lambda/x) \partial_x, \quad B = x^2 \cos^2(\lambda/x) \partial_x,$$

$$H = \frac{x^2}{\lambda} \sin(2\lambda/x) \partial_x.$$

3. ДЕЙСТВИЕ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ НА ПРОЕКТИВНЫХ СТРУКТУРАХ

Пусть проективная структура определяется реализацией алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ как подалгебры $\mathfrak{g} \subset D(\mathbb{R})$ алгебры Ли векторных полей. Тогда дифференциал φ_* диффеоморфизма $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ определяет новую реализацию $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$:

$$\varphi_*(\mathfrak{g}) \subset D(\mathbb{R}),$$

и соответственно новую проективную структуру.

Дифференциал φ_* переводит векторное поле $V = a(x)\partial_x$ в векторное поле $\varphi_*(V) = \frac{a(\psi(x))}{\psi'(x)}\partial_x$, $\psi = \varphi^{-1}$. Предполагая, что диффеоморфизм φ сохраняет ориентацию, $\psi' > 0$, мы замечаем, что векторное поле $f^2(x)\partial_x$ переходит в поле вида $\tilde{f}^2(x)\partial_x$, где $\tilde{f}(x) = \frac{f(\psi(x))}{\sqrt{\psi'(x)}}$. Положим $\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{\psi'(x)}}$. Тогда

$$\partial_x \tilde{f} = \frac{f'(\psi(x))}{\nu(x)} + f(\psi(x))\nu'(x),$$

и соответственно,

$$\partial_x^2 \tilde{f} = f\nu'' + \frac{f''}{\nu^3}.$$

Поэтому, если функция f удовлетворяет уравнению Шредингера $f'' - Wf = 0$, то функция \tilde{f} также удовлетворяет аналогичному уравнению $\tilde{f}'' - \tilde{W}\tilde{f} = 0$, где

$$\tilde{W}(x) = \frac{\nu''(x)}{\nu(x)} + W(\psi(x)). \quad (3.1)$$

Последнее соотношение при заданных функциях W и \tilde{W} можно рассматривать как дифференциальное уравнение 3-го порядка относительно функции $\psi(x)$. В развернутом виде это уравнение выглядит следующим образом:

$$\frac{1}{2}\psi'(x)\psi^{(3)}(x) - \frac{1}{4}(\psi''(x))^2 = (\tilde{W}(x) - W(\psi(x)))(\psi'(x))^2.$$

Поэтому в окрестности любой точки $x = x_0$ это уравнение имеет локальное решение $\psi(x)$ с заданными начальными данными: $\psi(x_0), \psi'(x_0) > 0, \psi''(x_0)$. Окончательно получаем следующий результат:

Теорема 3. *Рассмотрим следующие действия группы сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов*

$$\varphi^! : f(x) \mapsto \psi^*(f)(x)\nu(x)$$

на решениях уравнений Шредингера, а также на их потенциалах:

$$\varphi^! : W(x) \mapsto \psi^*(W)(x) + \frac{\nu''(x)}{\nu(x)},$$

где $\psi = \varphi^{-1}$ и $\nu(x) = (\psi'(x))^{-\frac{1}{2}}$, тогда

1) любые два уравнения Шредингера

$$y'' = Wy, \quad y'' = \widetilde{W}y$$

локально эквивалентны относительно указанного действия.

2) два уравнения Шредингера с потенциалами W и \widetilde{W} эквивалентны на всей прямой, если уравнение (3.1) имеет решение $\psi(x)$ с положительной производной для всех значений аргумента x .

Пусть теперь проективные структуры \mathfrak{P}^W и $\mathfrak{P}^{\widetilde{W}}$ определены на интервалах U и V и пусть t и s суть ограничения аффинной координаты x на U и V , соответственно. Пусть далее $\varphi : U \rightarrow V$ — сохраняющий ориентацию диффеоморфизм, и $T = (\varphi^{-1})^*(t) \in C^\infty(V)$. Из предыдущей теоремы вытекает следующий результат.

Теорема 4. *Диффеоморфизм $\varphi : U \rightarrow V$ переводит проективную структуру \mathfrak{P}^W в $\mathfrak{P}^{\widetilde{W}}$, то есть $\mathfrak{g}^{\widetilde{W}} = \varphi_*(\mathfrak{g}^W)$, тогда*

и только тогда, когда функция $\nu(s) = (T'(s))^{-\frac{1}{2}}$ удовлетворяет уравнению

$$\widetilde{W} = \nu^{-4} \cdot (\varphi^{-1})^*(W) + \nu^{-1}\nu'', \quad (3.2)$$

на интервале V .

Эта теорема позволяет установить эквивалентность проективной структуры стандартной, а именно:

Теорема 5. Каждое решение $\nu(s)$ уравнения Шредингера $\nu'' - \widetilde{W} \cdot \nu = 0$, не обращающееся в нуль на интервале V , определяет эквивалентность между проективной структурой $\mathfrak{P}^{\widetilde{W}}$ и стандартной проективной структурой \mathfrak{P}^0 .

Следующие результаты получаем путём применения теории Штурма об осцилляции решений уравнений 2-го порядка к уравнению Шредингера (см, например, [2, стр 151], [7, 9]) и предыдущей теоремы.

Теорема 6. Если $W > 0$ на замкнутом интервале $[a, b]$, то проективная структура \mathfrak{P}^W эквивалентна стандартной на открытом интервале (a, b) .

Пример 7. Проективная структура

$$A = \operatorname{ch}^2(kx)\partial_x, \quad B = \operatorname{sh}^2(kx)\partial_x, \quad H = \operatorname{sh}(2kx)\partial_x,$$

с потенциалом $W = k^2$ эквивалентна стандартной.

Теорема 7. Если $W < -\left(\frac{\pi}{b-a}\right)^2$ на замкнутом интервале $[a, b]$, то проективная структура \mathfrak{P}^W не эквивалентна стандартной на открытом интервале (a, b) .

Пример 8. Проективная структура

$$A = \cos^2(\omega x)\partial_x, \quad B = \sin^2(\omega x)\partial_x, \quad H = \sin(2\omega x)\partial_x,$$

не эквивалентна стандартной на интервале (a, b) , если $(b - a) > \frac{\pi}{\omega}$.

Пример 9. Проективные структуры \mathfrak{P}^W , где

$$W = -\lambda x^{-4}, \quad \lambda > 0,$$

на любом как угодно малом интервале $(0, a)$ $a > 0$, не эквивалентны стандартной.

4. ПРОЕКТИВНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ

Выберем покрытие прямой картами двух видов (U, t) и (V, s) . В карте (U, t) мы предполагаем, что векторное поле

$$A = f^2 \partial_x$$

отлично от нуля, а координата t выбрана следующим образом: $t = \frac{g}{f}$. В этих координатах алгебра \mathfrak{g}^W принимает стандартный вид:

$$A = \partial_t, \quad H = 2t\partial_t, \quad B = t^2\partial_t.$$

В карте (V, s) предполагается, что векторное поле

$$B = g^2 \partial_x$$

отлично от нуля, а координата s выбрана следующим образом: $s = \frac{f}{g}$. В этих координатах алгебра \mathfrak{g}^W имеет вид:

$$A = -s^2 \partial_s, \quad H = -2s \partial_s, \quad B = -\partial_s,$$

в котором поля A, B, H по сравнению со стандартным представлением изменили знак, а поля A и B поменялись местами. В обоих случаях, координаты t и s дают реализацию алгебры Ли \mathfrak{g}^W как стандартной. Более того, в пересечении карт (U, t) и (V, s) координаты связаны дробно-линейным преобразованием: $t = \frac{1}{s}$.

Таким образом, атлас $\{(U, t), (V, s)\}$ задает проективную структуру \mathfrak{P}^W на прямой. Напомним [4], что проективные геометрические величины являются сечениями однородных \mathfrak{g}^W -расслоений. Описание таких π -расслоений

$$\pi : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$$

вместе с описанием поднятий $\bar{\mathfrak{g}}^W$ действий алгебры Ли \mathfrak{g}^W дается следующей теоремой.

Теорема 8. (1) Пусть размерность $\bar{\mathfrak{g}}^W$ -орбит равна трем, тогда поднятие \mathfrak{g}^W -действия локально имеет следующий вид:

$$\bar{A} = f^2 \partial_x, \quad \bar{H} = 2fg \partial_x - 2u \partial_u + \partial_v,$$

$$\bar{B} = g^2 \partial_x + \partial_u + \frac{g}{f} (\partial_v - 2u \partial_u)$$

в карте (U, t) и

$$\bar{A} = f^2 \partial_x - \frac{g}{f} (\partial_v - 2u \partial_u) + \partial_v,$$

$$\bar{H} = 2fg \partial_x - 2u \partial_u + \partial_v, \quad \bar{B} = g^2 \partial_x$$

в карте (V, s) .

(2) Пусть размерность $\bar{\mathfrak{g}}^W$ -орбит равна двум, тогда поднятие \mathfrak{g}^W -действия локально имеет следующий вид:

$$\bar{A} = f^2 \partial_x, \quad \bar{H} = 2fg \partial_x - 2u \partial_u,$$

$$\bar{B} = g^2 \partial_x + \partial_u + \left(1 - 2\frac{ug}{f}\right) \partial_u$$

в карте (U, t) и

$$\bar{A} = f^2 \partial_x + \left(2\frac{uf}{g} - 1\right) \partial_u,$$

$$\bar{H} = 2fg \partial_x - 2u \partial_u, \quad \bar{B} = g^2 \partial_x$$

в карте (V, s) .

(3) Пусть размерность $\bar{\mathfrak{g}}^W$ -орбит равна единице, тогда поднятие \mathfrak{g}^W -действия в картах (U, t) и (V, s) локально имеет следующий вид:

$$\bar{A} = f^2 \partial_x, \quad \bar{H} = 2fg \partial_x, \quad \bar{B} = g^2 \partial_x.$$

5. ПРОЕКТИВНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ

Напомним (см. [1]), что функция $f \in C^\infty(J^k \pi)$, заданная на пространстве k -струй расслоения проективных геометрических величин $\pi : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$, называется *проективным дифференциальным инвариантом*, если она инвариантна относительно k -го продолжения действия алгебры $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$, то есть

$$\overline{A}^{(k)}(f) = \overline{B}^{(k)}(f) = \overline{H}^{(k)}(f) = 0, \quad (5.1)$$

где \overline{A} , \overline{B} , \overline{H} принадлежат \mathfrak{g}^W -поднятиям, которые задаются классом геометрических величин.

Обозначим через \widehat{A} и \widehat{B} полные дифференцирования вдоль векторных полей A и B соответственно. Поскольку в картах (U, t) и (V, s) алгебра Ли \mathfrak{g}^W имеет вид стандартного $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ -представления векторными полями, то результаты работы [4] приводят к следующему описанию базисных дифференциальных инвариантов \mathfrak{g}^W -проективных структур:

(А) \mathfrak{g}^W -орбиты размерности 3.

Здесь базисные инварианты в карте (U, t) имеют вид:

0) инварианты нулевого порядка:

$$w^3, \dots, w^m;$$

1) инварианты первого порядка:

$$J_1(1) = \frac{\widehat{A}(u) + u^2}{v^2}, \quad J_1(2) = \frac{\widehat{A}(u) + 2uv}{v^2},$$

$$J_1(3) = \frac{\widehat{A}(w^3)}{v}, \quad \dots, \quad J_1(m) = \frac{\widehat{A}(w^m)}{v};$$

2) инварианты второго порядка:

$$\begin{aligned}
 J_2(1) &= \frac{\widehat{A}^2(u) + 2u\widehat{A}(u) + 4u^3}{v^3}, \\
 J_2(2) &= \frac{\widehat{A}^2(v) + 6u\widehat{A}(v) + 6u^2v}{v^3}, \\
 J_2(3) &= \frac{\widehat{A}^2(w^3) + 2u\widehat{A}(w^3)}{v^2}, \\
 &\dots\dots\dots \\
 J_2(m) &= \frac{\widehat{A}^2(w^m) + 2u\widehat{A}(w^m)}{v^2}.
 \end{aligned}$$

В карте (V, s) базисные дифференциальные инварианты имеют вид:

0) инварианты нулевого порядка:

$$w^3, \dots, w^m;$$

1) инварианты первого порядка:

$$\begin{aligned}
 J_1(1) &= \frac{-\widehat{B}(u) + u^2}{v}, \quad J_1(2) = \frac{-\widehat{B}(v) + 2uv}{v^2}, \\
 J_1(3) &= \frac{\widehat{B}(w^3)}{v}, \quad \dots, \quad J_1(m) = \frac{\widehat{B}(w^m)}{v};
 \end{aligned}$$

2) инварианты второго порядка:

$$\begin{aligned}
 J_2(1) &= \frac{\widehat{B}^2(u) - 2u\widehat{B}(u) + 4u^3}{v^3}, \\
 J_2(2) &= \frac{\widehat{B}^2(v) - 6u\widehat{B}(v) + 6u^2v}{v^3}, \\
 J_2(3) &= \frac{\widehat{B}^2(w^3) - 2u\widehat{B}(w^3)}{v^2}, \\
 &\dots\dots\dots \\
 J_2(m) &= \frac{\widehat{B}^2(w^m) - 2u\widehat{B}(w^m)}{v^2}.
 \end{aligned}$$

(В) \mathfrak{g}^W -орбиты размерности 2.

Базисные инварианты в карте (U, t) имеют вид:

0) инварианты нулевого порядка:

$$w^2, \dots, w^m;$$

1) инварианты первого порядка:

$$J_1(2) = \frac{\widehat{A}(w^2)}{\sqrt{u^2 + \widehat{A}(u)}}, \quad \dots, \quad J_1(m) = \frac{\widehat{A}(w^m)}{\sqrt{u^2 + \widehat{A}(u)}};$$

а также

$$J_2 = \frac{\widehat{A}^2(u) + 6u\widehat{A}(u) + 4u^3}{(\widehat{A}(u) + u^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$J_3 = \frac{\widehat{A}^3(u) + 12u\widehat{A}^2(u) + 36u^2\widehat{A}(u) + 18u^4}{(\widehat{A}(u) + u^2)^2}.$$

Соответственно, в карте (V, s) базисные инварианты имеют вид:

0) инварианты нулевого порядка:

$$w^2, \dots, w^m;$$

1) инварианты первого порядка:

$$J_1(2) = \frac{\widehat{B}(w^2)}{\sqrt{u^2 - \widehat{B}(u)}}, \quad \dots, \quad J_1(m) = \frac{\widehat{B}(w^m)}{\sqrt{u^2 - \widehat{B}(u)}};$$

а также инварианты второго и третьего порядков:

$$J_2 = \frac{\widehat{B}^2(u) - 6u\widehat{B}(u) + 4u^3}{(u^2 - \widehat{B}(u))^{\frac{3}{2}}},$$

$$J_3 = \frac{-\widehat{B}^3(u) + 12u\widehat{B}^2(u) - 36u^2\widehat{B}(u) + 18u^4}{(u^2 - \widehat{B}(u))^2}.$$

(С) \mathfrak{g}^W -орбиты размерности 1.

В этом случае в карте (U, t) базисные дифференциальные инварианты имеют вид:

0) инварианты нулевого порядка:

$$w^1, \dots, w^m;$$

1) инварианты первого порядка:

$$J_1(2) = \frac{\widehat{A}(w^2)}{\widehat{A}(w^1)}, \quad \dots, \quad J_1(m) = \frac{\widehat{A}(w^m)}{\widehat{A}(w^1)};$$

2) инварианты второго порядка:

$$J_2(a, b) = \frac{\widehat{A}^2(w^a)\widehat{A}(w^b) - \widehat{A}^2(w^b)\widehat{A}(w^a)}{(\widehat{A}(w^a))^3},$$

а также

$$J_3 = \frac{2\widehat{A}^3(u)\widehat{A}(u) - 3(\widehat{A}^2(u))}{(\widehat{A}(u))^4}.$$

Соответственно, в карте (V, s) базисные инварианты имеют вид:

0) инварианты нулевого порядка:

$$w^1, \dots, w^m;$$

1) инварианты первого порядка:

$$J_1(2) = \frac{\widehat{B}(w^2)}{\widehat{B}(w^1)}, \quad \dots, \quad J_1(m) = \frac{\widehat{B}(w^m)}{\widehat{B}(w^1)};$$

2) инварианты второго порядка:

$$J_2(a, b) = \frac{\widehat{B}^2(w^a)\widehat{B}(w^b) - \widehat{B}^2(w^b)\widehat{B}(w^a)}{(\widehat{B}(w^a))^3},$$

а также

$$J_3 = \frac{2\widehat{B}^3(u)\widehat{B}(u) - 3(\widehat{B}^2(u))}{(\widehat{B}(u))^4}.$$

Отметим, что инвариант J_3 является обобщением производной Шварца на случай \mathfrak{g}^W проективных геометрических величин.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Алексеевский Д. В., Виноградов А. М., Лычагин В. В. *Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления* // Геометрия-1. — 1988. — Т. 28. — 297 с.
- [2] Камке Э. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям* // Москва: Наука, 1976. — 589 с.
- [3] Коновенко Н. Г., Лычагин В. В. *Дифференциальные инварианты нестандартных проективных структур* // Доповіді НАН України. — 2008. — Т. 11. — С. 10–13.
- [4] Коновенко Н. Г. *Алгебри диференціальних інваріантів геометричних величин на проективній прямій* // Геометрія, топологія та їх застосування. Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2009. — Т. 6, № 2. — С. 10–34.
- [5] Коновенко Н. Г. *Уравнения Шредингера и нестандартные проективные структуры* // Тезисы докладов Международной конференции “Геометрия в Одессе — 2008” (Одесса, 19-24 мая 2008г). — 2008. — С. 83–87.
- [6] Красильщик И. С., Лычагин В. В., Виноградов А. В. *Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений*. — Москва: Наука, 1986. — 336 с.
- [7] Хартман Ф. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. — Изд. Мир, 1970. — 720 с.
- [8] Jensen C. V. *Linear ODEs and D-modules, solving and decomposing equations using symmetry methods* // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2005. — Vol. 17. — P. 147–210.
- [9] Hill E. *Ordinary differential equations in complex domain*. — John Wiley, New York: 1976. — P. 484.
- [10] Kushner A., Lychagin V., Roubtsov V. *Contact geometry and non-linear differential equations* // Cambridge University Press. — 2007. — P. 516.
- [11] Lie S. *Klassifikation und Integration von gewöhnlichen x, y , die eine Gruppe von Transformationen gestatten I, II* // Math. Ann. — 1888. — Vol. 32. — P. 213–281.

М. П. Хоменко

Інститут математики НАН України, Київ

Т. М. Виврот

ЦДПІН ім. Г.М.Доброва НАН України, Київ

Структура графів окремих класів довільної k -класифікації графів

Запропонована в 1972-73 рр. М. П. Хоменком сім'я класифікацій всіх простих скінченних графів (k -класифікації графів, $0 \leq k \leq n$, n — порядок графа), з погляду існування чи неіснування 1-фактора в самому графі чи в слушних його підграфах [1–3], зіграла важливу роль при дослідженні властивостей та структури простих скінченних графів.

S_0 -графи (графи без 1-факторів, примітивні графи) складають один з класів 0-класифікації графів згаданої сім'ї класифікацій всіх простих скінченних графів, другий клас цієї ж класифікації графів складають K_0 -графи (непримітивні графи, графи з 1-факторами).

Ідея авторів цієї роботи дослідження структури S_0 -графів бере початок з топологічних питань побудови М. П. Хоменком загальної теорії укладуваностей та укладень графів в орієнтовні 2-багатовиди його методом φ -перетворень топологічних просторів. Ще в 1971 р. автори помітили, що якщо граф не містить жодного 1-фактора, то його доповнюючий граф не може бути графом інциденцій φ -гомеоморфних 2-кліток кліткового вкладення твірного графа представлення в орієнтовний 2-многовид [4]. Згадана ідея була провідною, коли автори тоді вперше побудували мінімальне вкладення повного графа порядку 13 в орієнтовний 2-багатовид роду 8 [5] та вперше дослідили структуру S_0 -графів [4].

© М. П. Хоменко, Т. М. Виврот

Тут досліджуються властивості та структура простих скінченних графів $G = (G^0, G^1)$, що містять S - k -тки, створеним авторами цієї роботи методом локалізованих переміжних ланцюгів, основи якого закладено ними ще в роботах [6, 7].

Через $G \setminus (\{a_t\}_{t=1}^k)$ позначатимемо граф, одержаний видаленням з заданого графа G , k його вершин a_t , $t = 1(1)k$, різних, якщо $k > 1$, тобто k -тки, разом з інцидентними їм в G ребрами. k -тку $\{a_t\}_{t=1}^k$, $0 \leq k \leq n$, $n = |G^0|$, графа G називатимемо S - k -ткою графа G , якщо граф $G \setminus (\{a_t\}_{t=1}^k) \in S_0$ -графом, в протилежному випадку — K - k -ткою графа G . Вважаємо, що $G^0 \in K$ - n -кою.

В цих дослідженнях плідним виявилось виділення спеціальних підкласів графів, властивості яких вигідно використали для дослідження властивостей та структури всіх графів розглядуваних класів.

Дуже цікавим і корисним виявився введений авторами цієї роботи клас так званих N -графів $N_{n,k,\infty}(\{n_r\}_{r=1}^{k+\infty})$ порядку n з k , $0 \leq k \leq n-1$, центральними вершинами порядку зірчастості $k + \infty$, підкласом якого є введений цими ж авторами клас так званих складних зірок $St_{n-k}(\{a_i\}_1^k)$ з k центрами a_i , $i = 1(1)k$, $1 \leq k \leq n-1$, порядку зірчастості $n-k$ [4,2,8]. N -графи відіграли істотну роль в дослідженні властивостей та структури всіх графів кожного класу довільної k -класифікації всіх простих скінченних графів — адже всі NX_k -графи — максимальні елементи частково впорядкованої за включенням множини графів кожного класу X_k довільної k -класифікації, $0 \leq k \leq n$, як довели автори цієї роботи, є N -графами.

Спочатку розглянемо клас графів з S - k -тками, що містять і K - k -тки. В класі таких графів розглядаємо підклас графів G , кожен з яких містить хоч би одну пару несуміжних вершин a_1, a_2 таку, що при приєднанні до графа G ребра (a_1, a_2) одержимо граф $G + (a_1, a_2)$ з усіма K - k -тками. Властивості цих графів використовуємо для дослідження властивостей та структури всіх графів, що містять і S - k -тки і K - k -тки.

Означення 1. Ребро (a_{l_1}, a_{l_2}) графа G називаємо k -факторизуючим ребром, а множину $\{a_{l_t}\}_{t=1}^2$ його вершин — k -початком графа G .

Очевидно, що порядок n графа G задовольняє умови:

$$n - k \equiv 0 \pmod{2}$$

і $n \geq k + 2$. Максимально насичений ребрами граф з S - k -тками і K - k -тками є розглядуваним графом G , бо кожне ребро доповнюючого графа G є k -факторизуючим ребром заданого графа G .

Нехай $\{a_{l_\tau}\}_{\tau=1}^k$ — довільна S - k -тка графа G . Тоді цю множину k вершин графа G позначатимемо через $A_{k,2}^*$, k -початок $\{a_{l_t}\}_{t=1}^2$ графа G — через $B_{k,2}^*$, а 1-фактор

$$f_{[1]}(G \setminus A_{k,2}^* + B_{k,2}^*)$$

— через $f_{k,2}$. Слід відмітити, що

$$f_{[1]}((G + (a_{l_1}, a_{l_2})) \setminus A_{k,2}^*) = f_{k,2} + (a_{l_1}, a_{l_2}).$$

Граф G містить незалежну множину вершин потужності ≥ 2 і

$$A_{k,2}^* \cap B_{k,2}^* = \emptyset.$$

Твердження 1. Кожна k -тка графа G з k -початком $B_{k,2}^*$, що містить вершину a_{l_t} , $a_{l_t} \in B_{k,2}^*$ є K - k -ткою графа G .

Наслідок 1. Граф G порядку n , $n \geq k + 2$, містить принаймні дві K - k -тки.

Наслідок 2. Якщо G — максимально насичений ребрами граф з S - k -тками і K - k -тками порядку n , $a_j \in G^0$ і $\rho(a_j, G) \leq n - 2$, де $\rho(a_j, G)$ — степінь вершини a_j в графі G , то k -тка графа G , що містить вершину a_j , є його K - k -ткою.

Наслідок 3. В графі G лише одна k -тка вершин графа G $[A_{k,2}^* \cap B_{k,2}^*]$ є S - k -ткою графа G .

З наслідку 2 твердження 1 впливає справедливість наступного твердження.

Твердження 2. Якщо G — максимально насичений ребрами граф з S - k -тками і K - k -тками порядку n і $a_{l_\tau} \in A_{k,2}^*$, $\tau \in N_k$, то $\rho(a_{l_\tau}, G) = n - 1$.

Наслідок. Максимально насичений ребрами граф з S - k -тками і K - k -тками зв'язний.

Переміжним ланцюгом графа G називаємо простий його ланцюг $c_{p,q} = c(a_p, a_q; G)$ між вершинами a_p, a_q графа, всі ребра якого складають два класи ребер і розташовані так, що жодне ребро одного класу не суміжне на $c_{p,q}$ з іншим ребром того ж класу. Переміжний ланцюг $c_{p,q}$ графа G називатимемо 1-переміжним відносно 1-фактора F і позначатимемо через $c'_{p,q} = c'(a_p, a_q; G, F)$, якщо ребра одного з класів ребер, які визначають його переміжність, є ребрами 1-фактора F самого графа G , або деякого його підграфа. Переміжний ланцюг $c_{p,q}$ графа G називатимемо 2-переміжним відносно 1-факторів F_1, F_2 і позначатимемо через $c''_{p,q} = c''(a_p, a_q; G, F_1, F_2)$, якщо визначаючими його переміжність класами ребер є ребра двох 1-факторів F_1 і F_2 самого графа G чи слухних його підграфів. 1-переміжний відносно 1-фактора $f_{k,2}$ ланцюг $c'_{p,q} = c'(a_p, a_q; G, f_{k,2})$ називатимемо *локалізованим*, якщо кінцями його є елементи множини $B_{k,2}^*$; *напівлокалізованим*, якщо лише один його кінець є елементом множини $B_{k,2}^*$. Про такі ланцюги йшлося вже, зокрема, в роботах [6, 9-11]. З твердження 1 випливає справедливність такого твердження.

Твердження 3. В графі G з k -початком $B_{k,2}^*$ і S - k -ткою $A_{k,2}^*$ існують напівлокалізовані 1-переміжні відносно 1-фактора $f_{k,2}$ ланцюги непарної довжини, кожен з яких з'єднує вершину множини $B_{k,2}^*$ з вершиною множини $A_{k,2}^*$.

Лема 1. В графі G з k -початком $B_{k,2}^*$ не існує локалізованого 1-переміжного відносно 1-фактора $f_{k,2}$ ланцюга $c'_{l_1, l_2} = c'(a_{l_1}, a_{l_2}; G, f_{k,2})$, $B_{k,2}^* = \{a_{l_t}\}_{t=1}^2$.

Справді, якби в графі G з k -початком $B_{k,2}^*$ і S - k -ткою $A_{k,2}^*$ існував локалізований 1-переміжний відносно 1-фактора $f_{k,2}$

ланцюг $c'_{l_1, l_2} = c'(a_{l_1}, a_{l_2}; G, f_{k,2})$, $B_{k,2}^* = \{a_{l_t}\}_{t=1}^2$, то існував би і 1-фактор

$$f_{[1]}(G \setminus (A_{k,2}^*)) = f_{[1]}(G \setminus (\{c_{l_1, l_2}^0\} + A_{k,2}^*)) + f_{[1]}(c'_{l_1, l_2}),$$

що суперечить умові.

Звідси, як наслідки, випливають такі два твердження.

Твердження 4. *Якщо в графі G з k -початком $B_{k,2}^*$ існують мимобіжні напівлокалізовані 1-переміжні відносно 1-фактора $f_{k,2}$ ланцюги парної довжини (допускаються ланцюги нульової довжини)*

$$c'_{l_t, l_{\zeta_t}} = c'(a_{l_t}, a_{l_{\zeta_t}}; G, f_{k,2}),$$

$a_{l_t} \in B_{k,2}^*$, $|c'_{l_t, l_{\zeta_t}}| \geq 0$, $t = 1, 2$, то $(a_{l_{\zeta_1}}, a_{l_{\zeta_2}}) \in \hat{G}^1$.

Твердження 5. *Якщо в графі G порядку n , $n \geq k + 4$, з k -початком $B_{k,2}^*$ існує напівлокалізований 1-переміжний відносно 1-фактора $f_{k,2}$ ланцюг $c'_{l_t, l_{\zeta_t}} = c'(a_{l_t}, a_{l_{\zeta_t}}; G, f_{k,2})$, $a_{l_t} \in B_{k,2}^*$, то $\rho(a_{l_{\zeta_t}}, G) \leq n - 2$.*

Далі переконаємося в справедливості наступного твердження.

Твердження 6. *Якщо в графі G з k -початком $B_{k,2}^*$ і S -к-ткою $A_{k,2}^*$ існують мимобіжні напівлокалізовані 1-переміжні відносно 1-фактора $f_{k,2}$ ланцюги парної довжини*

$$c'_{l_t, l_{\zeta_t}} = c'(a_{l_t}, a_{l_{\zeta_t}}; G, f_{k,2}),$$

$a_{l_t} \in B_{k,2}^*$, $|c'_{l_t, l_{\zeta_t}}| \geq 0$, $t = 1, 2$, то k -тка $A_{k,2}^*$ є K - k -ткою графа $G + (a_{l_{\zeta_1}}, a_{l_{\zeta_2}})$.

Справді, при виконанні умов твердження існує 1-фактор

$$\begin{aligned} f_{[1]}((G + (a_{l_{\zeta_1}}, a_{l_{\zeta_2}})) \setminus A_{k,2}^*) &= \\ &= f_{[1]}(G \setminus (\{c_{l_t, l_{\zeta_t}}^0\}_{t=1}^2 + A_{k,2}^*)) + f_{[1]}(c'_{l_1, l_2}), \end{aligned}$$

$$c'_{l_1, l_2} = c'_{l_1, \zeta_1} + (a_{l_{\zeta_1}} a_{l_{\zeta_2}}) + c'_{l_{\zeta_2}, l_2}.$$

Це означає, що k -тка $A_{k,2}^*$ є K - k -ткою графа $G + (a_{l_{\zeta_1}}, a_{l_{\zeta_2}})$.

З цього випливає справедливість наступного твердження.

Твердження 7. Якщо в графі G з k -початком $B_{k,2}^*$ існують мимобіжні напівлокалізовані 1-переміжні відносно 1-фактора $f_{k,2}$ ланцюги парної довжини

$$c'_{l_t, l_{\zeta_t}} = c'(a_{l_t}, a_{l_{\zeta_t}}; G, f_{k,2}),$$

$a_{l_t} \in B_{k,2}^*$, $|c'_{l_t, l_{\zeta_t}}| \geq 0$, $t = 1, 2$, то $(a_{l_{\zeta_1}} a_{l_{\zeta_2}})$ — k -факторизуюче ребро графа G .

З цього твердження і твердження 1 випливає справедливність наступних двох тверджень.

Твердження 8. Якщо в графі G з k -початком $B_{k,2}^*$ існують мимобіжні напівлокалізовані 1-переміжні відносно 1-фактора $f_{k,2}$ ланцюги парної довжини

$$c'_{l_t, l_{\zeta_t}} = c'(a_{l_t}, a_{l_{\zeta_t}}; G, f_{k,2}),$$

$a_{l_t} \in B_{k,2}^*$, $|c'_{l_t, l_{\zeta_t}}| \geq 0$, $t = 1, 2$, то $\{a_{l_{\zeta_t}}\}_{t=1}^2$ — також є k -початком графа G .

Твердження 9. Якщо в графі G з k -початком $B_{k,2}^*$ існує напівлокалізований 1-переміжний відносно 1-фактора $f_{k,2}$ ланцюг парної довжини $c'_{l_t, l_{\zeta_t}} = c'(a_{l_t}, a_{l_{\zeta_t}}; G, f_{k,2})$, $a_{l_t} \in B_{k,2}^*$, $|c'_{l_t, l_{\zeta_t}}| \geq 0$, $t \in N_2$, то кожна k -тка графа G , що містить вершину $a_{l_{\zeta_t}}$, є K - k -ткою графа G .

Нехай в графі G порядку n , $n \geq k+4$, з k -факторизуючим ребром $(a_{l_1} a_{l_2})$ і S - k -ткою $A_{k,2}^*$ існує також k -факторизуюче ребро $(a_{l_r} a_{l_s})$ графа G . Введемо позначення:

$$B_{k,2}' = \{a_{l_r}, a_{l_s}\},$$

$$f'_{k,2} = f_{[1]}(G \setminus (A_{k,2}^* + B_{k,2}')),$$

$$\Pi_{k,2} = B_{k,2}^* \cap B_{k,2}', \quad |\Pi_{k,2}| = p.$$

Далі, неважко переконатися в тому, що в графі G існує $2-p$, $2-p = q$, неперетинних ненульової довжини напівлокалізованих 1-переміжних відносно 1-фактора $f_{k,2}$ ланцюгів парної довжини

$$c'_{l_t, l_\theta} = c'(a_{l_t}, a_{l_\theta}; G, f_{k,2}),$$

$$\{a_{l_t}\}_{t=1}^q = B_{k,2}^* \setminus \Pi_{k,2}, \quad \{a_{l_\theta}\}_{\theta=1}^q = B_{k,2}^{*'} \setminus \Pi_{k,2}$$

і p таких ланцюгів нульової довжини. Очевидно, що для згаданих ланцюгів парної довжини має місце рівність

$$c'_{l_t, l_\theta} = c'_{l_\theta, l_t} = c'(a_{l_\theta}, a_{l_t}; G, f'_{k,2}),$$

$t = 1, 2$. Це означає, що ланцюги, які розглядаються, є 2-переміжними відносно 1-факторів $f_{k,2}$ і $f'_{k,2}$.

Наведені міркування є доведенням необхідності наступного твердження, достатність якого випливає з твердження 7.

Лема 2. Ребро $(a_{l_{\zeta_1}} a_{l_{\zeta_2}})$, $(a_{l_{\zeta_1}} a_{l_{\zeta_2}}) \in \hat{G}^1$, є k -факторизуючим ребром графа G з k -початком $B_{k,2}^* = \{a_{l_1}, a_{l_2}\}$ тоді і лише тоді, коли в графі G існують мимобіжні напівлокалізовані 1-переміжні відносно 1-фактора $f_{k,2}$ ланцюги парної довжини

$$c'_{l_t, l_{\zeta_t}} = c'(a_{l_t}, a_{l_{\zeta_t}}; G, f_{k,2}),$$

$a_{l_t} \in B_{k,2}^*$, $|c'_{l_t, l_{\zeta_t}}| \geq 0$, $t = 1, 2$.

Зауваження. Кінці довільних двох k -факторизуючих ребер графа G з'єднані мимобіжними напівлокалізованими 2-переміжними ланцюгами парної довжини.

З леми 2 випливає така лема.

Лема 3. Множина $\{a_{l_{\zeta_t}}\}_{t=1}^2$, $(a_{l_{\zeta_1}} a_{l_{\zeta_2}}) \in \hat{G}^1$, вершин графа G з k -початком $\{a_{l_t}\}_{t=1}^2$ є також його k -початком тоді і лише тоді, коли в графі G існують мимобіжні напівлокалізовані 1-переміжні відносно 1-фактора $f_{k,2}$ ланцюги парної довжини

$$c'_{l_t, l_{\zeta_t}} = c'(a_{l_t}, a_{l_{\zeta_t}}; G, f_{k,2}), \quad |c'_{l_t, l_{\zeta_t}}| \geq 0, \quad t = 1, 2.$$

З викладеного вище випливає справедливість наступного твердження.

Твердження 10. k -тка графа G з k -початком $B_{k,2}^*$ є його K - k -ткою тоді і лише тоді, коли вона містить вершину $a_{l_{\zeta_t}} \in G^o$, для якої в графі G існує напівлокалізований 1-переміжний відносно 1-фактора $f_{k,2}$ ланцюг парної довжини

$$c'_{l_t, l_{\zeta_t}} = c'(a_{l_t}, a_{l_{\zeta_t}}; G, f_{k,2}), \quad a_{l_t} \in B_{k,2}^*, \quad t \in N_2.$$

Рівносильним твердженню 10 є твердження 11.

Твердження 11. Вершина a_{ν_i} графа G з k -початком $B_{k,2}^*$ не належить до жодної його K - k -тки тоді і лише тоді, коли a_{ν_i} знаходиться на довільному напівлокалізованому 1-переміжному відносно 1-фактора $f_{k,2}$ ланцюгу непарної довжини

$$c'_{l_t, \nu_i} = c'(a_{l_t}, a_{\nu_i}; G, f_{k,2}), \quad a_{l_t} \in B_{k,2}^*.$$

Лема 4. Якщо в графі G з k -початком $B_{k,2}^*$ існують такі два напівлокалізовані 1-переміжні відносно 1-фактора $f_{k,2}$ ланцюги

$$c'_{l_t, \nu_i} = c'(a_{l_t}, a_{\nu_i}; G, f_{k,2}), \quad a_{l_t} \in B_{k,2}^*, \quad t = 1, 2,$$

що $c'_{l_1, \nu_i} \cap c'_{l_2, \nu_i} = a_{\nu_i}$, $a_{\nu_i} \in f_{k,2}^0$, то вершина a_{ν_i} знаходиться на довільному напівлокалізованому 1-переміжному відносно 1-фактора $f_{k,2}$ ланцюгу непарної довжини

$$c'_{l_\tau, \nu_i} = c'(a_{l_\tau}, a_{\nu_i}; G, f_{k,2}), \quad a_{l_\tau} \in B_{k,2}^*.$$

Справді, якби на одному з напівлокалізованих 1-переміжних відносно 1-фактора $f_{k,2}$ ланцюгів c'_{l_t, ν_i} , $t = 1, 2$, що розглядаються в умові леми, вершина a_{ν_i} знаходилась на непарній віддалі від k -початку $B_{k,2}^*$ графа G , а на другому — на парній віддалі, то мали б протиріччя з лемою 1; наявність в графі G двох напівлокалізованих 1-переміжних відносно 1-фактора $f_{k,2}$ ланцюгів c'_{l_t, ν_i} , $t = 1, 2$, на яких вершина a_{ν_i} знаходилась би на парній віддалі від k -початку $B_{k,2}^*$ графа G означало б інцидентність вершини a_{ν_i} двом ребрам 1-фактора $f_{k,2}$, що суперечило б означенню 1-фактора графа. Отже, вершина a_{ν_i} знаходиться на непарній віддалі і на напівлокалізованому 1-переміжному відносно 1-фактора $f_{k,2}$ ланцюгу c'_{l_1, ν_i} , і на напівлокалізованому 1-переміжному відносно 1-фактора $f_{k,2}$ ланцюзі c'_{l_2, ν_i} , а тому згідно з лемою 1 вершина a_{ν_i} знаходиться на непарній віддалі і на довільному напівлокалізованому 1-переміжному відносно 1-фактора $f_{k,2}$ ланцюгу $c'_{l_\theta, \nu_i} = c'(a_{l_\theta}, a_{\nu_i}; G, f_{k,2})$, $a_{l_\theta} \in B_{k,2}^*$.

Твердження 12. Якщо в графі G з k -початком $B_{k,2}^*$ існують такі два напівлокалізовані 1-переміжні відносно 1-фактора $f_{k,2}$ ланцюги $c'_{l_t, \nu_i} = c'(a_{l_t}, a_{\nu_i}; G, f_{k,2})$, $a_{l_t} \in B_{k,2}^*$, $t = 1, 2$, що $c'_{l_1, \nu_i} \cap c'_{l_2, \nu_i} = a_{\nu_i}$, $a_{\nu_i} \in f_{k,2}^o$, то вершина a_{ν_i} разом з довільними $k - 1$ іншими вершинами з $A_{k,2}^*$ складає S - k -тку графа G .

Це твердження впливає з попередніх тверджень і твердження 11.

Сформульованому твердженню 5 можна надати наступну форму.

Твердження 13. Якщо в графі G порядку n з k -початком $B_{k,2}^*$ для вершини a_{ν_i} має місце рівність

$$\rho(a_{\nu_i}, G) = n - 1,$$

то вершина a_{ν_i} на довільному напівлокалізованому 1-переміжному відносно 1-фактора $f_{k,2}$ ланцюгу

$$c'_{l_t, \nu_i} = c'(a_{l_t}, a_{\nu_i}; G, f_{k,2}), \quad a_{l_t} \in B_{k,2}^*,$$

знаходиться на непарній віддалі.

Лема 5. Якщо в максимально насиченому ребрами графі G з S - k -тками і K - k -тками порядку n , $n \geq k+4$, з k -початком $B_{k,2}^*$ вершина $a_{\nu_i} \in G^o$, то $\rho(a_{\nu_i}, G) = n - 1$ тоді і лише тоді, коли на довільному напівлокалізованому 1-переміжному відносно 1-фактора $f_{k,2}$ ланцюгу

$$c'_{l_\tau, \nu_i} = c'(a_{l_\tau}, a_{\nu_i}; G, f_{k,2}), \quad a_{l_\tau} \in B_{k,2}^*,$$

вершина a_{ν_i} знаходиться на непарній віддалі.

Доведення. Необхідність умов леми впливає з твердження 13.

Переконаємося в тому, що якщо на довільному напівлокалізованому 1-переміжному відносно 1-фактора $f_{k,2}$ ланцюгу $c'_{l_\tau, \nu_i} = c'(a_{l_\tau}, a_{\nu_i}; G, f_{k,2})$, $a_{l_\tau} \in B_{k,2}^*$, максимально насиченого ребрами графа G з S - k -тками і K - k -тками порядку n , $n \geq k + 4$, вершина a_{ν_i} графа G знаходиться на непарній віддалі, то $\rho(a_{\nu_i}, G) = n - 1$. Справді, якби в графі G існувала така вершина a_p , що

$(a_{l_i} a_p) \in \hat{G}^1$, то ребро $(a_{l_i} a_p)$ було б k -факторизуючим ребром графа G , а отже, k -тка $A_{k,2}^*$ була б K - k -ткою графа $G + (a_{l_i} a_p)$. Тоді з існування 1-фактора $f_{[1]}((G + (a_{l_i} a_p)) \setminus A_{k,2}^*)$ випливало б існування в графі G напівлокалізованого 1-переміжного відносно 1-фактора $f_{k,2}$ ланцюга $c'_{l_{\tau'}, l_i} = c'(a_{l_{\tau'}}, a_{l_i}; G, f_{k,2})$, $a_{l_{\tau'}} \in B_{k,2}^*$, згідно з лемою 2, на якому вершина a_{l_i} знаходилась би на парній віддалі, чого не може бути.

Для двох підмножин множини вершин графа G порядку n , $n \geq k + 4$, введемо позначення:

$A_{k,2}^{**} = \{a_{l_i'} \in f_{k,2}^o \mid \text{вершина } a_{l_i'} \text{ лежить на непарній відстані на довільному напівлокалізованому 1-переміжному відносно 1-фактора } f_{k,2} \text{ ланцюгу}$

$$c'_{l_{\tau'}, l_i'} = c'(a_{l_{\tau'}}, a_{l_i'}; G, f_{k,2}),$$

$$a_{l_{\tau'}} \in B_{k,2}^*, i' = (k+1)(1)k, 0 \leq k-k \leq (n-k-2)/2\};$$

$$A_{k,2} = A_{k,2}^* + A_{k,2}^{**}; \quad A_{k,2} = \{a_{l_i}\}_{i=1}^k;$$

$$B_{k,2}^{**} = \{a_{l_{k+i'}} \mid (a_{l_i'} a_{l_{k+i'}}) \in f_{k,2}, a_{l_i'} \in A_{k,2}^{**},$$

$$i' = (k+1)(1)k, 0 \leq k-k \leq (n-k+2)/2\};$$

$$B_{k,2} = B_{k,2}^* + B_{k,2}^{**}; \quad B_{k,2} = \{a_{l_j}\}_{j=k+1}^{2k-k-2}.$$

Враховуючи взаємно однозначну відповідність між елементами множин $A_{k,2}^{**}$ і $B_{k,2}^{**}$ графа G , а також те, що для графа G порядку $k+2$ має місце рівність $|A_{k,2}| = k$, переконуємося в справедливості наступного твердження.

Твердження 14. Для графа G порядку n , $n \geq k+2$ справедливо $|A_{k,2}| \in N_{\mu}^k$, $\mu = (n+k-2)/2$.

Твердження 15. Вершина a_{l_j} ,

$$a_{l_j} \in B_{k,2}, \quad l_j \neq l_{\tau'}, \quad \{a_{l_{\tau'}}, a_{l_{\tau'}}\} = B_{k,2}^*$$

графа G на довільному напівлокалізованому 1-переміжному відносно 1-фактора $f_{k,2}$ ланцюгу

$$c'_{l_{\tau'}, l_j} = c'(a_{l_{\tau'}}, a_{l_j}; G, f_{k,2})$$

знаходиться на парній віддалі.

З цього твердження, твердження 2 і леми 5 випливає справедливність наступного твердження.

Твердження 16. Вершина a_{l_j} , $a_{l_j} \in B_{k,2}$, максимально насиченого ребрами графа G з S - k -тками і K - k -тками разом з довільними $k-1$ іншими його вершинами складає K - k -тку графа G .

Твердження 17. В максимально насиченому ребрами графі G з S - k -тками і K - k -тками не існує напівлокалізованого 1-переміжного відносно 1-фактора $f_{k,2}$ ланцюга

$$c'_{l_{j_r}, l_{j_s}} = c'(a_{l_{j_r}}, a_{l_{p_r}}, \dots, a_{l_{p_s}}, a_{l_{j_s}}, G, f_{k,2}),$$

$$|c'_{l_{j_r}, l_{j_s}}| \geq 1, a_{l_{j_\theta}} \in B_{k,2}, (a_{l_{j_\theta}} a_{l_{p_\theta}}) \in f_{k,2}^1, \theta = r, s.$$

Це твердження випливає з лем 5 і 1.

Наслідок. Множина $B_{k,2}$ вершин максимально насиченого ребрами графа G з S - k -тками і K - k -тками незалежна в G .

Лема 6. Якщо в графі G з k -початком $B_{k,2}^*$ існують напівлокалізовані 1-переміжні відносно 1-фактора $f_{k,2}$ ланцюги непарної і парної довжини

$$c'_{l_{\tau'}, l_p} = c'(a_{l_{\tau'}}, a_{l_p}; G, f_{k,2}),$$

$$c'_{l_{\tau''}, l_p} = c'(a_{l_{\tau''}}, a_{l_p}; G, f_{k,2}),$$

$a_{l_{\tau'}}, a_{l_{\tau''}} \in B_{k,2}^*$, то в графі G існує вершина $a_{l_\lambda} \in B_{k,2}$, через яку проходить довільний напівлокалізований 1-переміжний відносно $f_{k,2}$ ланцюг

$$c'_{l_\tau, l_p} = c'(a_{l_\tau}, a_{l_p}; G, f_{k,2}), \quad a_{l_\tau} \in B_{k,2}^*$$

а ребро $(a_{l_p} a_{l_\lambda})$ належить або до G^1 , або до \hat{G}^1 і не є k -факторизуючим ребром графа G .

Доведення. Нехай умови леми виконуються і

$$\Pi = c'(a_{l_{\tau'}}, a_{l_p} \cap c'_{l_{\tau''}, l_p}) \setminus a_p.$$

Тоді $\Pi \neq \emptyset$ бо при $\tau'' = \tau'$ маємо, що $\Pi \geq a'_{l_\tau}$, а при $\tau'' \neq \tau'$ згідно з лемою 1.

Нехай $\{a_{\nu_i} a_{\nu_{k+i}}\}_{i=k+1}^k \cap \Pi = \Pi_1$, $a_{\nu_i} \in A_{k,2}^{**}$, $a_{\nu_{k+i}} \in B_{k,2}^{**}$. Якщо

$$\Pi_1 \{(a_{\nu_{i_q}} a_{\nu_{k+i_q}})\}_{q=1}^r,$$

$$d(a_{\nu_t}, a_{\nu_{k+i_r}}; G, c'_{l_t, l_p}) > d(a_{\nu_t}, a_{\nu_{k+i_{q_1}}}; G, c'_{l_t, l_p}),$$

$1 \leq q_1 \leq r-1$, $t = \tau', \tau''$, то ребро $(a_{\nu_{i_r}} a_{\nu_{k+i_r}})$ належить довільному напівлокалізованому 1-переміжному відносно 1-фактора $f_{k,2}$ ланцюгу $c'_{l_{\tau'}, l_p} = c'(a_{l_{\tau'}}, a_{l_p}; G, f_{k,2})$, $a_{l_{\tau'}} \in B_{k,2}^*$, через те, що якби знайшовся такий напівлокалізований 1-переміжний відносно 1-фактора $f_{k,2}$ ланцюг

$$c'_{l_{t^*}, l_p} = c'(a_{l_{t^*}}, a_{l_p}; G, f_{k,2}), \quad a_{l_{t^*}} \in B_{k,2}^*$$

що $(a_{\nu_{i_r}} a_{\nu_{k+i_r}}) \in c'_{l_{t^*}, l_p}^1$ то на напівлокалізованому 1-переміжному відносно 1-фактора $f_{k,2}$ ланцюгу

$$c'_{l_{t^*}, l_p} \cup c'_{l_{t'}, l_p}(a_{l_p}, a_{\nu_{i_r}}), \quad t' \in \{\tau', \tau''\},$$

вершина $a_{\nu_{i_r}}$ знаходилась би на парній віддалі всупереч тому, що $a_{\nu_{i_r}} \in A_{k,2}^{**}$.

Отже, через вершину $a_{l_\lambda} = a_{\nu_{k+i_r}} \in B_{k,2}^*$, проходить довільний напівлокалізований 1-переміжний відносно 1-фактора $f_{k,2}$ ланцюг

$$c'_{l_{\tau'}, l_p} = c'(a_{l_{\tau'}}, a_{l_p}; G, f_{k,2}), \quad a_{l_{\tau'}} \in B_{k,2}^*.$$

Ребро $(a_{l_p} a_{l_\lambda})$ належить або до G^1 , або до \hat{G}^1 , а тому згідно з лемою 2 не є k -факторизуючим ребром графа G .

Якщо ж $\Pi_1 = \emptyset$, то напівлокалізовані 1-переміжні відносно 1-фактора $f_{k,2}$ ланцюги $c'_{l_{\tau'}, l_p}$ і $c'_{l_{\tau''}, l_p}$ задовольняють умови: $a_{l_{\tau''}} = a_{l_{\tau'}}$,

$$c'_{l_{\tau'}, l_p} \cap c'_{l_{\tau''}, l_p} = \{a_{l_{\tau'}}, a_{l_p}\}.$$

Тому згідно з лемою 1 в графі G не існує жодного напівлокалізованого 1-переміжного відносно 1-фактора $f_{k,2}$ ланцюга $c'_{l_{t'}, l_p} = c'(a_{l_{t'}}, a_{l_p}; G, f_{k,2})$, $a_{l_{t'}} \in B_{k,2}^* \setminus a_{l_{\tau'}}$. Отже, якщо $\Pi_1 = \emptyset$, то на довільному напівлокалізованому 1-переміжному відносно 1-фактора $f_{k,2}$ ланцюгу

$$c'_{l_{\tau'}, l_p} = c'(a_{l_{\tau'}}, a_{l_p}; G, f_{k,2}), \quad a_{l_{\tau'}} \in B_{k,2}^*,$$

має місце рівність $a_{l_\lambda} = a'_{l_\tau}$. Ребро $(a_{l_p} a_{l_\lambda})$ належить або до G^1 , або до \hat{G}^1 , і тому згідно з лемою 2 не є k -факторизуючим ребром графа G .

Лема 7. Якщо в максимально насиченому ребрами графі G з S - k -тками і K - k -тками існують напівлокалізовані 1-переміжні відносно 1-фактора $f_{k,2}$ ланцюги

$$c'_{l_\tau, l_p} = c'(a_{l_\tau}, a_{l_p}; G, f_{k,2}),$$

$$c'_{l_\tau, l_p} = c'(a_{l_\tau}, a_{l_p}; G, f_{k,2}),$$

$a_{l_\tau}, a_{l_\tau} \in B_{k,2}^*$, на яких вершина a_{l_p} графа G знаходиться на непарній і на парній віддалі, то існує і суміжна з a_{l_p} відповідна їй вершина $a_{l_\lambda} \in B_{k,2}$, $a_{l_p} \sim a_{l_\lambda}$, і якщо $a_{l_p} \sim a_{l_\lambda}$, $a_{l_{p'}} \sim a_{l_{\lambda'}}$, то $(a_{l_p} a_{l_{p'}}) \in G^1$, або $(a_{l_p} a_{l_{p'}}) \in \hat{G}^1$ в залежності від того, чи $l'_\lambda = l_\lambda$, чи $l'_\lambda \neq l_\lambda$.

Теорема 1. Граф порядку n , $n \geq k + 2$, $k \geq 1$ є графом з S - k -тками тоді і лише тоді, коли він є факторграфом або N -графом $N_{n,k,2-k}(\{n_r\}_{r=1}^{k-k+2})$, $n_r \equiv 1 \pmod{2}$, $r = 1(1)(k - k + 2)$, $1 \leq k \leq k \leq (n + k - 2)/2$ при $n - k \equiv 0 \pmod{2}$, або N -графом $N_{n,n-1,2-n}$ при $n - k \equiv 1 \pmod{2}$.

Доведення. Необхідність теореми 1 випливає з наведених вище міркувань.

Неважко переконатися в тому, що згаданий в умові теореми 1 N -граф G містить і S - k -тки і K - k -тки, а довільне ребро графа G є k -факторизуючим ребром графа G і тому цей граф є максимально насиченим ребрами графом з такими властивостями.

Провівши міркування, аналогічні проведеним стосовно теореми 1, приходимо до висновку, що має місце наступна теорема.

Теорема 2. Граф порядку n , $n \geq k + 2$ є графом з усіма S - k -тками тоді і лише тоді, коли він є факторграфом або N -графом

$$N_{n,k,2+k}(\{n_r\}_{r=1}^{k+k+2}),$$

$n_r \equiv 1 \pmod{2}$, $r = 1(1)(k + k + 2)$, $0 \leq k \leq (n - k - 2)/2$ при $n - k \equiv 0 \pmod{2}$, або N -граф

$$N_{n,n-1,2-n}$$

при $n - k \equiv 1 \pmod{2}$.

Мінімальним графом порядку n , $n \geq k + 2$, $k \geq 1$ з S - k -тками і K - k -тками є N -граф $N_{n,0,\mathfrak{a}}$, $\mathfrak{a} = (n + k)/2$. З теореми 2 при $k = 0$ випливає класична теорема Татта про примітивні графи. Описана структура графів окремих класів дає можливість побудувати всі графи заданого порядку розглядуваних класів.

Про важливість цих досліджень йдеться, зокрема, в книзі про досягнення Академії наук Української РСР за 60 років (під ред. академіка АН УРСР І. К. Походні; Київ: Наукова думка, 1979, с. 84) та в книзі [12, с. 349].

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Хоменко Н.П. *К топологии графов* // VI Всесоюзная топологическая конференция (Тбилиси, 2-7 окт. 1972 г.). — Тбилиси: Мецниереба, 1972. — С. 125–126.
- [2] *φ -перетворення графів* (відп. ред. Н.П.Хоменко). — Київ, Ін-т математики АН УРСР, 1973. — С. 7–34, 261–317.
- [3] Хоменко М.П. *Родина класифікацій графів* // Доп. АН УРСР. Сер. А. — 1987. — Т. 5 — С. 27–29.
- [4] Хоменко Н.П., Виврот Т.М. *Структура примитивных графов* // Топологические аспекты теории графов (отв. ред. Н.П.Хоменко). — Киев: Ин-т математики АН УССР. — 1971. — С.64–82.
- [5] Хоменко Н.П., Виврот Т.М. *Представление ориентируемых 2-многообразий при помощи графов и сужение его на эти графы* // Там же. — С. 64–82.
- [6] Хоменко М.П., Виврот Т.М. *Теорема Татта про примітивні графи* // φ -перетворення графів (відп. ред. М.П.Хоменко). — Київ; Ін-т математики АН УРСР, 1973. — С. 301–306.
- [7] Хоменко Н.П., Виврот Т.М. *Свойства SK-графов* // Теория графов (отв. ред. Н.П.Хоменко).-Киев: Ин-т математики АН УССР. — 1977. — С. 128–134.
- [8] Хоменко М., Виврот Т. *Структура та властивості графів класу (SK)2-графів* // П'ята Міжнародна наук. конф. ім. акад. М.Кравчука (16-18 тр. 1996 р., Київ). — Київ, 1996. — С. 464.

- [9] Хоменко М., Виврот Т. *Структура і властивості S_0 -графів* // VIII Міжнародна наук. конф. ім. акад. М. Кравчука. Матеріали конф. (11-14 тр. 2000 р., Київ). — Київ, 2000. — С. 382-384.
- [10] Хоменко М.П., Виврот Т.М. *Властивості та структура Sk_1 -графів* // Одинадцята Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука. (18-20 тр. 2006 р., Київ). Матеріали конф. — Київ, 2006. — С. 636.
- [11] Хоменко М.П., Виврот Т.М. *Властивості та структура $(SK)_k$ -графів* // Дванадцята Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука. (15-17 тр. 2008 р., Київ). Матеріали конф. I. — Київ, 2008. — С. 844.
- [12] Nikolay Pavlovich Homenko // International Who's Who of Intellectuals. — Eighth Edition. Cambridge: IBC, 1990. — P. 349.

UDC 515.124; 515.125

Dikran Dikranjan*Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Udine,
Via delle Scienze 206, 33100 Udine, Italy**E-mail: dikranja@dimi.uniud.it****Dušan Repovš****Faculty of Mathematics and Physics, and Faculty of Education,
University of Ljubljana, P.O.B. 2964, 1001 Ljubljana, Slovenia**E-mail: dusan.repovs@guest.arnes.si*

Topics in uniform continuity

This paper collects results and open problems concerning several classes of functions that generalize uniform continuity in various ways, including those metric spaces (generalizing Atsuji spaces) where all continuous functions have the property of being close to uniformly continuous.

Keywords: *Closure operator, uniform continuity, Atsuji space, UA space, straight space, hedgehog, magic set, locally connected space.*

Dedicated to the memory of Jan Pelant (1950-2005)

1. INTRODUCTION

The uniform continuity of maps between metric or uniform spaces determines a specific topic in general topology. By the end of the fifties and in the seventies the attention was concentrated on those spaces (called UC spaces, or Atsuji spaces) on which uniform continuity coincides with continuity. Of course, compact spaces are UC spaces, but there also exist non-compact UC spaces (e.g., the uniformly discrete ones).

In this survey we consider several aspects of uniform continuity and its relationship with continuity. We start with a discussion

© D. Dikranjan and D. Repovš

of the possibility to capture uniform continuity by means of the so-called closure operators [29]. The most relevant and motivating example of a closure operator is the usual Kuratowski closure K in the category **Top** of topological spaces and continuous maps. It is well known that one can describe the morphisms in **Top** (i.e., the continuous maps) in an equivalent way as the maps “compatible” with the Kuratowski closure (see §2.2). In this setting appear the *uniformly approachable* and the *weakly uniformly approachable* (briefly, UA and WUA , resp.) functions (see Definition 1). Section 3 compares the properties UA and WUA with the property of the u.c. functions which have distant fibers in an appropriate sense. In Section 4 we consider studies those spaces X on which every continuous function $X \rightarrow \mathbb{R}$ is UA . This class contains the well-known *Atsugi* spaces, where every continuous function is u.c. [1, 2, 3, 4].

Section 5 deals with those metric spaces in which the uniform quasi-components of every closed subspace are closed. Every UA space is thin, but there exist complete thin spaces that are not UA . The main result of this section is a separation property of the complete thin spaces.

The last section is dedicated to “additivity”, which turns out to be quite a non-trivial question in the case of uniform continuity. More precisely, we discuss here the *straight* spaces: these are the metric spaces on which a continuous function $X \rightarrow \mathbb{R}$ is uniformly continuous whenever the restrictions $f \upharpoonright_{F_1}$ and $f \upharpoonright_{F_2}$ on each member of an arbitrary closed binary cover $X = F_1 \cup F_2$ are uniformly continuous.

At the end of the paper we collect most of open problems and question (although some of them can be found in the main text).

We did not include in this paper several related issues. One of them, *magic sets*, is a topic that appeared in connection with UA functions, even though it has no apparent connection to uniform continuity. The reader can see [15, 16, 17, 6, 7, 21] for more on this topic.

We are dedicating this survey to the memory of the outstanding topologist and our good friend Jan Pelant, who actively worked on this topic and contributed the most relevant results in this area.

1.1. Notation and terminology. A topological space X is called *hereditarily disconnected* if all connected components of X are trivial, while X is called *totally disconnected*, if all quasi components of X are trivial [32]. The closure of a subset Y of a topological space X will be denoted by $cl(Y)$ or \bar{Y} . All topological spaces considered in this paper are assumed to be Tychonoff. A topological space is said to be *Baire* if it satisfies the Baire Category Theorem, i.e., if every meager subset of X has empty interior. A *Cantor set* is a nonvoid zero-dimensional compact metrizable space with no isolated points, i.e., a homeomorphic copy of the Cantor middle thirds set. If X is a topological space, we write $C(X)$ for the family of all continuous real-valued functions on X , and $C_n(X)$ for the sets of continuous nowhere constant real-valued functions on X . (To say that a continuous function $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ is nowhere constant is equivalent to saying that $f^{-1}(y)$ is nowhere dense for each $y \in \mathbb{R}$.)

A metric space is said to be *uniformly locally connected* (shortly, *ULC*) [34, 3-2], if for every $\varepsilon > 0$ there is $\delta > 0$ such that any two points at distance $< \delta$ lie in a connected set of diameter $< \varepsilon$. In other words, close points can be connected by small connected sets. For example, convex subsets of \mathbb{R}^m (or any Banach space) are uniformly locally connected.

2. UNIFORM CONTINUITY VS CONTINUITY

2.1. Global view on closure operators. Closure operators can be introduced in a quite general context [29]. The prominent examples that inspired this general notion were given by Isbell (in the category of semigroups, or more generally, categories of universal algebras) and Salbany (in the category **Top** of topological spaces and continuous maps). We briefly recall here the notion of a closure operator of **Top**, following [29, 30].

A *closure operator* of **Top** is a family $C = (c_X)_{X \in \mathbf{Top}}$ of maps $c_X : 2^X \rightarrow 2^X$ such that for every X in **Top**

- (i) $M \subseteq c_X(M)$ for all $M \in 2^X$;
- (ii) $M \subseteq M' \in 2^X \Rightarrow c_X(M) \subseteq c_X(M')$; and
- (iii) $f(c_X(M)) \subseteq c_Y(f(M))$ for all $f : X \rightarrow Y$ in **Top** and $M \in 2^X$.

A prominent example is the Kuratowski closure operator K . Every continuous function satisfies the “continuity” condition (iii) for every closure operator C . For a closure operator C of **Top** we say that the set map $f : X \rightarrow Y$ is *C-continuous*, if it satisfies (iii). It is easy to see that a map $f : X \rightarrow Y$ is continuous if and only if it is *K-continuous*. In other words, the morphisms in **Top** can be detected by a closure operator (as *K-continuous* maps).

Analogously, a closure operator of **Unif** can be defined as a family $C = (c_X)_{X \in \mathbf{Unif}}$ of maps $c_X : 2^X \rightarrow 2^X$ such that for every X in **Unif** items (i) and (ii) are satisfied, and

- (iii_u) $f(c_X(M)) \subseteq c_Y(f(M))$ for all $f : X \rightarrow Y$ in **Unif** and $M \in 2^X$.

We say that C is *additive (idempotent)* if the equality

$$c_X(M \cup N) = c_X(M) \cup c_X(N)$$

(resp., $c_X(c_X(M)) = c_X(M)$) always holds.

The Kuratowski closure operator K is a closure operator of **Unif**. Analogously, for a closure operator C of **Unif** one can say that the set map $f : X \rightarrow Y$ is *C-continuous*, if it satisfies (iii_u); f is said to be *totally continuous* if it is *C-continuous* for every closure operator C of **Unif**.

In the category **Top** of topological spaces a map is continuous if and only if (iii) is holds for $C = K$. Hence morphisms in **Top** are determined by the closure operator K . Can the same be said of **Unif**? This question was answered in the negative in [28]. We briefly sketch the proof here.

The spaces needed as tools are the uniformly discrete two-point space $D = \{0, 1\}$, the one-point compactification \mathbb{N}_∞ of the naturals \mathbb{N} equipped with its unique uniformity, and two uniformly close sequences, which are not topologically close

$$X_0 := \{(n, 1/n) \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{(n, -1/n) \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Set

$$M_a = \{(n, 1/n) \mid n \in \mathbb{N}\}, \quad M_b = \{(n, -1/n) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

and consider the map $\pi : X_0 \rightarrow D$ defined by $\pi(a_n) = 0$ and $\pi(b_n) = 1$ for each n . Clearly π is continuous but not uniformly continuous, since the open disjoint binary cover $X_0 = M_a \cup M_b$ is not uniform.

Lemma 1. ([28]) *In the above notation:*

- (a) *the map π is C -continuous for every additive closure operator C of **Unif** such that*

$$\text{either } c(M_a) \setminus M_a \text{ or } c(M_b) \setminus M_a \text{ is finite;}$$

- (b) *if $c(M_a) \setminus M_a$ is infinite for a closure operator C of **Unif**, then for every metric Baire space $B \in \mathbf{Unif}$ without isolated points there exists a discontinuous map $f_B : \mathbb{N}_\infty \rightarrow B$ which is C -continuous.*

Theorem 1. ([28]) *Let C be an additive closure operator of **Unif**. Then either $\pi : X_0 \rightarrow D$ is C -continuous or for every metric Baire space without isolated points B there exists a discontinuous map $f_B : \mathbb{N}_\infty \rightarrow B$ which is C -continuous.*

This shows that for every additive closure operator C of **Unif** one can find a C -continuous map that is not uniformly continuous. Hence, a single closure operator of **Unif** cannot detect uniform continuity. This theorem also allows us to see which C -continuous maps fail to be u.c.

It is natural to expect that using more than just one closure operator things may change. We shall see now that this is not the case. Even a totally continuous map, which satisfies (iii) for every

closure operator C , is not necessarily uniformly continuous. The tool to achieve this result is the following notion introduced in [28] and [6]:

Definition 1. ([6, 28]) *We say that a map $f \in C(X, Y)$ is **UA (uniformly approachable)**, whenever for every compact set $K \subseteq X$ and every set $M \subseteq X$, there exists a UC function $g \in C(X, Y)$ which coincides with f on K and satisfies $g(M) \subseteq f(M)$.*

*We then say that g is a (K, M) -**approximation of f** . If we require in the definition of UA that K consists of a single point we obtain the weaker notion **WUA (weakly UA)**.*

Clearly, UA implies WUA.

It was shown in [28] that \mathbb{R} with the natural uniformity has the property that every continuous selfmap is uniformly approachable:

Example 10. *Every $f \in C(\mathbb{R})$ is UA. Indeed, let $K = [-n, n]$ and let $M \subseteq \mathbb{R}$ be an arbitrary non-empty set. Pick any $m_1 \in M \cap (-\infty, -n]$ if this set is non-empty, otherwise take $m_1 = -n$. Choose $m_2 \in M$ analogously. Then the function $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ defined by*

$$g(x) = \begin{cases} f(m_1), & \text{if } x \leq m_1 \\ f(x), & \text{if } m_1 \leq x \leq m_2 \\ f(m_2), & \text{if } x \geq m_2 \end{cases}$$

is a (K, M) -approximation of f .

Since “uniformly approachable” implies “totally continuous” and $f(x) = x^2$ is not uniformly continuous it follows that uniform continuity is not detected even by all closure operators in **Unif**. However, Burke noticed [6, Example 3.3] that there are continuous non-WUA functions on \mathbb{R}^2 (in fact, $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy$, is such a function, see Example 5).

The next theorem easily follows from the definitions:

Theorem 2. ([28]) *Every WUA function is totally continuous.*

2.2. Local view on closure operators. Every additive and idempotent closure operator of **Top** or **Unif** defines a topology on the underlying set of the space. In this sense, the use of topologies that make certain maps (uniformly) continuous in the sequel can be also viewed as a local use of idempotent additive closure operators (i.e., on a single space or on a single pair of spaces, without the axiom (iii)).

2.2.1. Topologies τ on \mathbb{R} that make a given class of functions $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ coincide with $C((\mathbb{R}, \tau), (\mathbb{R}, \tau))$. In the sequel X will be a metric space. Following [18] we say that a class \mathcal{F} of functions from X to Y can be topologized if there exist topologies τ_1 on X and τ_2 on Y such that \mathcal{F} coincides with the class of all continuous functions from (X, τ_1) to (Y, τ_2) . The paper [18] gives conditions which under GCH (generalized continuum hypothesis) imply that \mathcal{F} can be topologized. In particular, it is shown that (assuming GCH) there exists a connected Hausdorff topology τ on the real line such that the class of all continuous functions in τ coincides with the class of all linear functions. A similar theorem is valid for the class of all polynomials, all analytic functions, and all harmonic functions. On the other hand, the classes of derivatives, C^∞ , differentiable, or Darboux functions cannot be topologized.

2.2.2. Characterization of uniform continuity as a simple continuity w.r.t. appropriate topologies. We recall here the work of Burke [14] on characterization of uniform continuity as a simple continuity w.r.t. appropriate topologies (or **locally** defined closure operators in the above sense). Within this setting, the problem becomes the question of determining which metric spaces X and Y are such that the uniformly continuous maps $f: X \rightarrow Y$ are precisely the continuous maps between (X, τ_1) and (Y, τ_2) for some new topologies τ_1 and τ_2 on X and Y , respectively.

Theorem 3. *There exist a connected closed subset X of the plane, a homeomorphism $h: X \rightarrow X$, and a connected Polish topology τ on X such that the continuous self-maps of X are precisely the*

maps h^n ($n \in \mathbb{Z}$) and the constant maps, while the continuous self-maps of (X, τ) as well as the uniformly continuous self-maps of X are precisely the maps h^n ($n \leq 0$) and the constant maps.

3. FUNCTIONS WITH DISTANT FIBERS AND UNIFORM CONTINUITY

Definition 2. We say that $f \in C(X)$ has **distant fibers** (briefly, **DF**) if any two distinct fibers $f^{-1}(x)$, $f^{-1}(y)$ of f are at some positive distance.

It is curious to note that this property generalizes two *antipodal* properties of a function:

- f is constant (f has *one* big fiber)
- f has small fibers (e.g., one-to-one functions, or more generally, functions with compact fibers, or briefly, **KF**).

3.1. Uniform continuity coincides with DF for bounded functions $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$. It is easy to see that *UC* implies *DF* for any function $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Indeed, if $d(f^{-1}(u), f^{-1}(v)) = 0$ for some $u \neq v$ in \mathbb{R} , then any pair of sequences x_n, y_n such that $f(x_n) = u$, $f(y_n) = v$ and $\lim_n d(x_n, y_n) = 0$ witness non-uniform continuity of f .

Let us verify that *DF* implies *UC* for bounded functions $f : \mathbb{R}^m \rightarrow [0, 1]$. Indeed, assume that the sequences x_n, y_n imply non uniform continuity of f with $d(x_n, y_n) \rightarrow 0$ and $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ for every n . Then boundedness of f yields that $f(x_n), f(y_n)$ can without loss of generality be assumed convergent, i.e., $(x_n) \rightarrow a$, $f(y_n) \rightarrow b$ for some $a \neq b$ in $[0, 1]$. Let I_n be the segment in \mathbb{R}^m joining x_n and y_n . Let $a < b$ and take $u, v \in [0, 1]$ with $a < v < u < b$. Then $f(x_n) \in [0, v)$ and $f(y_n) \in (u, 1]$ for sufficiently large n since $f(I_n)$ is an interval (being a connected set) containing $f(x_n)$ and $f(y_n)$. Then $u, v \in f(I_n)$ for sufficiently large n . Since $d(x_n, y_n) \rightarrow 0$, we conclude that $d(f^{-1}(u), f^{-1}(v)) = 0$, a contradiction.

In the argument above \mathbb{R}^m can be replaced by any space that is uniformly locally connected. This condition cannot be omitted, since the argument function on the circle minus a point is DF but not UC (indeed, the circle minus a point is not uniformly locally connected with respect to the metric induced by the plane).

Theorem 4. ([8, Theorem 3.7]) *A bounded function $f \in C(X)$ on a uniformly locally connected space X is u.c. if and only if it is DF.*

Boundedness was essential to prove that DF implies uniform continuity. Indeed, unbounded continuous functions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ need not be u.c. even when they are *finite-to-one* (e.g., $x \mapsto x^2$) or even *injective* (e.g., $x \mapsto x^3$).

The next theorem says that uniform continuity of a bounded function $f \in C(X)$ is a property of its fibers. In this form the theorem permits one to remove the hypothesis “uniformly locally connected”.

Theorem 5. ([8, Theorem 3.10]) *Let (X, d) be a connected and locally connected metric space. Suppose that*

$$f, g \in C(X, [0, 1])$$

have the same family of fibers and that f is u.c. Then g is also u.c.

Nevertheless, boundedness cannot be removed, as the pair of functions $x \mapsto x, x \mapsto x^3$ on \mathbb{R} show. It is not clear what is the precise property of the fibres of $f \in C(X, [0, 1])$ which gives uniform continuity. Theorem 4 shows that it is precisely DF when the space X is uniformly locally connected.

How to remove boundedness

In order to remove boundedness we now consider a generalization of UC which coincides with UC for bounded functions.

We start with a notion which is stronger than DF. A function f is said to be **proper** (briefly, P) if the f -preimage of any compact

set is compact. Equivalently, f is a closed map with KF . Even though in general the implication $P \rightarrow KF$ cannot be inverted (e.g., $x \mapsto \arctan x$ in \mathbb{R}), one can prove that $P = KF$ for unbounded functions $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $m > 1$. In particular, this holds for polynomial functions $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$.

The property KF implies DF , but it is much stronger. Indeed, UC need not imply KF . This is why we introduce the auxiliary notion AP that presents a weakening of both the notion of proper function and that of UC function. We plan to show that $DF = AP$ for functions $f \in C(X)$ on a uniformly locally connected space X .

Definition 3. ([8]) $f \in C(X, Y)$ is said to be AP (**almost proper**) if f is u.c. on the f -preimage of every compact set.

Obviously, UC implies AP , whereas bounded AP functions are UC . The same argument given above to prove $UC \rightarrow DF$ also proves that AP implies DF . On the other hand, with the proof of Theorem 4 outlined above one can also show:

Lemma 2. ([8, Lemma 3.5]) $DF \rightarrow AP$ for functions $f \in C(X)$ on a uniformly locally connected space X . Hence, AP coincides with DF on uniformly locally connected spaces.

In this way we have achieved our goal by replacing UC with AP .

Next we discuss an alternative solution, based on a different idea of choosing instead of AP a class of functions close to UC in the sense of approximation, namely UA (and WUA).

Theorem 6. ([8, Theorem 3.15]) DF implies UA in uniformly locally connected spaces.

The proof is based on the notion of **truncation**, which was implicit in Example 10. Now we define a different kind of truncation (for the general definition see Definition 6). For a function $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ and real numbers $a \leq b$ define the (a, b) -**truncation** as follows:

$$f_{(a,b)}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{if } f(x) \in [a, b], \\ a, & \text{if } f(x) \leq a, \\ b & \text{if } f(x) \geq b. \end{cases}$$

One proves that $f \in DF$ implies $f_{(a,b)} \in DF$, hence $f_{(a,b)} \in UC$ since it is bounded. Now, if K is a compact set and $a, b \in \mathbb{R}$ are chosen such that $f(K) \subseteq [a, b]$, then $f_{(a,b)}$ is a (K, M) -approximation of f if one takes additional care about $g(M) \subseteq f(M)$ as in Example 1.

The above implication cannot be inverted, as the next example shows.

Example 11. *The function $f(x) = \sin x^2$ is not DF, since any two fibers of f are at distance 0. Nevertheless, according to Example 10, $f(x)$ is UA.*

This suggests that the condition DF is too strong. We shall consider an appropriate weaker version below.

Remark 1. *Note that the (a, b) -truncation is different from the truncation g defined in Example 10 in the case $X = \mathbb{R}$. It can easily be shown that if $f([m_1, m_2]) = [a, b]$, then g is a truncation of $f_{(a,b)}$.*

3.2. Distant connected components of fibers. In order to invert the implication in Theorem 6 we need a weaker form of DF. To this end we take a closer look at the *connectedness* structure of the fibers. First of all we recall a notion for continuous maps in **Top**.

Definition 4. *A continuous maps $f : X \rightarrow Y$ between topological spaces is called*

- (a) *monotone if all fibers of f are connected;*
- (b) *light if all fibers of f are totally disconnected.*

The term in item (a) was motivated by the fact that for maps $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ one obtains the usual monotone maps. It is known that

every continuous map $f : X \rightarrow Y$ between topological spaces can be factorized as $f = l \circ m$, where $m : X \rightarrow Z$ is monotone and $l : Z \rightarrow Y$ is light. (Notice that this factorization for the constant map $f : X \rightarrow Y = \{y\}$ provides as Z exactly the space of connected components of X and $m : X \rightarrow Z$ is the quotient map having as fibers the connected components of X .)

Definition 5. We say that f has “**distant connected components of fibers**” (**DCF**) in the sense that any two components of distinct fibers are at positive distance.

Example 12. Let X be a metric space and $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ a continuous map.

- (a) if f is monotone, then f is DCF if and only if f is DF.
- (b) If f is light, then it is DCF.

In particular, the function $f : (0, 1/\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ defined by

$$f(x) = \sin 1/x,$$

as well as the function from Example 11, are DCF (being light), but any two non-empty fibers of f are at distance 0.

Theorem 7. ([8, Theorem 4.3]) *UA implies DCF for $f \in C(X)$ and arbitrary metric spaces X .*

In fact, if C_a and C_b are two connected components of fibres of f at distance 0, then for $K = \{a, b\}$ and $M = C_a \cup C_b$ the function f has no (K, M) -approximation.

Along with Example 10 this gives:

Corollary 1. *Every continuous real-valued function $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is DCF.*

Actually, we shall see below that even *WUA* implies *DCF* for $f \in C(\mathbb{R}^m)$ (see Theorem 8), therefore,

$$DF \rightarrow UA \rightarrow WUA \rightarrow DCF \text{ for } f \in C(\mathbb{R}^m).$$

Hence all they coincide for polynomial functions (or functions with finitely many connected components of fibres). Let us put all

these implications in the following diagram, where the equivalence (1) for ULS spaces is given by Lemma 2 and the implication (2) for ULS spaces is given by Theorem 6. The implication (3) for \mathbb{R}^n follows from these two implications and the trivial implication $UA \rightarrow WUA$. The implication (4) will be proved in Theorem 8 below which gives a much stronger result.

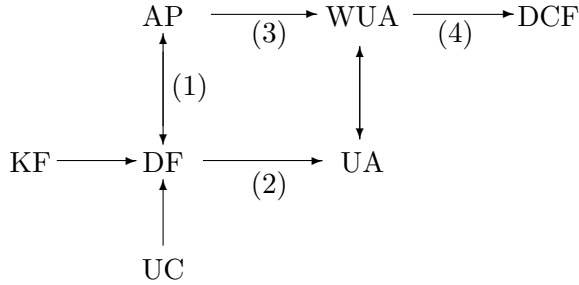


Diagram 1

We shall see below that (4) is not an equivalence. This motivated the introduction of the following weaker version of UA in [20]: a function $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ is said to be UA_d (*densely uniformly approachable*) if it admits uniform $\langle K, M \rangle$ -approximations for every dense set M and for every compact set K . Analogously, one can define WUA_d .

Theorem 8. WUA_d coincides with DCF for $f \in C(\mathbb{R}^m)$.

The proof requires a new form of weak UC based on truncations:

Definition 6. $g \in C(X)$ is a **truncation** of $f \in C(X)$ if the space X can be partitioned in two parts $X = A \cup B$ so that $g = f$ on A and g is constant on each connected component of B (that

is, g must be constant on each connected component of $\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$.

This motivates the introduction of the class *TUA* of *truncation-UA* functions, that is, functions $f \in C(X)$ such that for every compact set $K \subseteq X$ there is a u.c. truncation g of f which coincides with f on K .

The following is easy to prove:

Theorem 9. ([8]) *TUA implies DCF on every locally connected space.*

Indeed, if C_a and C_b are two connected components of fibres of f at distance 0, then for $K = \{a, b\}$ the function f has no UC K -truncations.

The proof of Theorem 8 splits in three steps (see in Diagram 2 below)

Step 1:

([8, Cor.7.4]) $DCF \rightarrow TUA$ for $f \in C(\mathbb{R}^m)$;

Step 2:

([20, Th.3.1]) $TUA \rightarrow UA_d$ for $f \in C(\mathbb{R}^m)$;

Step 3:

([8],[20, Cor.4.2]) $WUA_d \rightarrow DCF$ for $f \in C(\mathbb{R}^m)$.

Step 1 together with Theorem 9 ensure the equivalence (4) for $f \in C(\mathbb{R}^m)$ in Diagram 2. Step 2, the trivial implication $UA_d \rightarrow WUA_d$, Step 3 and the equivalence (4) imply (5). This proves all four equivalences for $f \in C(\mathbb{R}^m)$ in the right square of Diagram 2.

The remaining three implications (1), (2) and (3) are trivial.

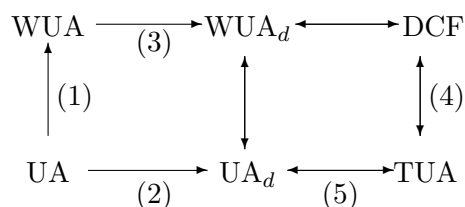


Diagram 2

In view of the four equivalences in the right square of Diagram 2, the next example shows that the implications (2) and (3) cannot be inverted.

Example 13. ([20, §5]) *In $C(\mathbb{R}^2)$, TUA does not imply WUA.*

It remains unclear whether the remaining last implication (1) of Diagram 2 can be inverted for $f \in C(\mathbb{R}^m)$ (see Problem 1).

4. UA SPACES

The main objective of this section are the **UA spaces** – spaces where every continuous function is UA. The first example of this kind is \mathbb{R} (Example 10). The motivation to introduce these spaces are the well known Atsuji spaces.

Here we recall some results from [6] and we anticipate some of the principal results from [9] which give further motivation for studying UA functions.

The next definition will be used in the sequel.

Definition 7. *Two subsets A, B of a topological space X are said to be **separated** if the closure of each of them does not meet the other (this is equivalent to saying that A and B are clopen in $A \cup B$). So X is connected if and only if it cannot be partitioned in two separated sets.*

A subset S of X **separates** the nonempty sets A and B if the complement of S can be partitioned in two separated sets, one of which contains A , the other contains B (see [39, §16, VI]).

4.1. UA spaces. Several criteria for UA-ness are given, and among them the following looks most spectacular:

Theorem 10. ([9]) *Let X be a UA space and let A, B be disjoint closed uniformly connected subsets of X . Then there is a collection $\{H_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ of nonempty closed subsets of X such that for every n ,*

- (1) $H_{n+1} \subseteq H_n$;
- (2) H_n separates A and B ; and
- (3) H_n is contained in a finite union of balls of diameter $< 1/n$.

Actually, this property can be proved for a larger class of spaces discussed in §6, where a relevant property is obtained in the case when X is complete (Theorem 21).

The following construction which produces UA spaces from trees and compact sets placed at their vertices was given in [8].

Definition 8. *A metric space X is a tree of compact sets*

$$\{K_n : n \in \omega\}$$

if $X = \bigcup_{n \in \omega} K_n$ where each K_n is compact and

$$|K_{n+1} \cap \bigcup_{i \leq n} K_i| = 1.$$

- (a) *Given a subset $I \subseteq \omega$, we say that the subspace*

$$X_I = \bigcup_{n \in I} K_n$$

of $X = \bigcup_{i \in \omega} K_i$ is a subtree of X if for every n, m with $n < m$, if $n \in I$ and $K_n \cap K_m \neq \emptyset$, then $m \in I$.

- (b) A tree of compact sets $X = \bigcup_{i \in \omega} K_i$ is said to be tame if every K_i has an open neighbourhood which intersects only finitely many K_j 's and every two disjoint subtrees of X are at a distance > 0 .

It is easy to see that the circle minus a point can be represented as a tree of compact sets, but none of these trees is tame. The next theorem shows the reason for that (the circle minus a point is not a UA space).

Theorem 11. [9] *If $X = \bigcup_{i \in \omega} K_i$ is a tame tree of compact sets $\{K_n : n \in \omega\}$, then X is UA.*

Examples of tame trees are given in Figure 1 (see ladders B and C).

4.2. Non-UA spaces: Hedgehogs and some necessary conditions. Let α be a cardinal. In the sequel H_α denotes the hedgehog with α spikes (see [32, Example 4.1.5], note that H_a is separable if and only if $a = \omega$).

Recall the definition of the cardinal \mathfrak{b} as the minimal cardinality of an unbounded family of functions $f : \omega \rightarrow \omega$ with respect to the partial preorder $f \leq^* g$ if $f(n) \leq g(n)$ for all but finite number $n \in \omega$ (see [31]). In ZFC $\omega_1 \leq \mathfrak{b} \leq 2^\omega$, and $\mathfrak{b} = 2^\omega$ consistently (for example under MA or CH, see [31] for more detail).

Surprisingly, one has the following independency result: ZFC cannot decide whether the smallest non-separable hedgehog H_{ω_1} is UA. More precisely, the following holds:

Theorem 12. [9] *Let α be a cardinal. If $\alpha < \mathfrak{b}$ then H_α is UA, whereas if $\alpha \geq \mathfrak{b}$ then H_α is not even WUA.*

In particular, under CH the space H_{ω_1} is not UA, while in models of ZFC where $\neg CH \& MA$ holds, one has $\omega_1 < \mathfrak{b}$, so H_{ω_1} is UA.

We show below that every space H_α is TUA (Corollary 2). Hence $TUA \not\rightarrow WUA$ for nonseparable spaces.

We also consider the following space which is more general than the hedgehog H_α of α spikes:

Definition 9. Let α be an infinite cardinal. A metric space (X, d) is called a hedgehog of compact sets $\{K_\lambda : \lambda \in \alpha\}$ if $X = \bigcup_{\lambda \in \alpha} K_\lambda$ where each K_λ is compact with more than one point and there exists $p \in X$ such that

- (1) $K_\lambda \cap K_{\lambda'} = \{p\}$ for $\lambda \neq \lambda'$; and
- (2) for all $x, y \in X$ we have that

$$d(x, y) < \max\{d(x, p), d(y, p)\} \rightarrow \exists \lambda < \alpha [x, y \in K_\lambda].$$

Sometimes we prefer to say more precisely: a hedgehog of α compact sets.

Definition 10. Let X be a uniform space, let $f \in C(X)$ and let K be a compact subset of the space X . The minimal K -truncation f_K of f is defined as the $(\inf_K f, \sup_K f)$ -truncation of f .

Theorem 13. [9] Let X be a hedgehog of compact sets and K be a compact subset of X containing p . Then for every continuous function $f \in C(X)$ the $(\inf_K f, \sup_K f)$ -truncation of f is u.c.

This gives the following:

Corollary 2. Every hedgehog of compact sets is TUA.

Another source of UA spaces is given by the following:

Theorem 14. [9] Every uniformly zero-dimensional space is UA.

In [10] the Cantor set is characterized as the only compact metrizable space M such that each subspace of M is UA.

Theorem 15. [9] The only manifolds which are WUA are the compact ones and the real line.

Now we see that a metric space having a continuous function which is not uniformly continuous, necessarily also has a bounded uniformly approachable function that is not uniformly continuous. Hence, in some sense, UA is “closer to continuity than to uniform continuity”.

Theorem 16. [9] *A metric space X is UC if and only if every bounded uniformly approachable function is uniformly continuous, so that a space X with $C_u(X) = C_{ua}(X)$ is necessarily a UC space.*

In order to get a necessary condition for being a WUA space, the following notion was proposed in [6]:

Definition 11. *Let X be a uniform space. A family of pseudo-hyperbolas in X is given by a countable family $\{H_n\}$ of disjoint subsets of X such that for every $n \in \mathbb{N}$:*

- (1) H_n is closed and uniformly connected;
- (2) $H_n \cup H_{n+1}$ is uniformly connected;
- (3) $H_n \cap \overline{\bigcup_{m>n} H_m} = \emptyset$; and
- (4) the set $H = \bigcup_n H_n$ is not closed in X .

This notion was inspired by the following example due to Burke.

Example 14. *A family of pseudo-hyperbolas in \mathbb{R}^2 is given by the sets $H_n = \{(x, y) : (xy)^{-1} = n\}$.*

Theorem 17. ([6]) *If a normal uniform space X has a family of pseudo-hyperbolas, then X is not WUA.*

Theorem 18. ([6]) *Let X be a separable uniform space and suppose that there exists $f \in C(X)$ with countable fibers without non-constant uniformly continuous truncations. Then X is not WUA.*

Example 15. *Now we give three non-WUA examples of subsets X_1, X_2 and X_3 of \mathbb{R}^2 that contain no pseudo-hyperbolas. To prove that they are not WUA one can apply Theorem 18. So it is necessary to find, in each case, a continuous function with countable fibers and without non-constant uniformly continuous truncations.*

- (a) *The space X_1 is the unit circle minus a non-empty finite set. So X_1 can be identified with a cofinite subset of the set of complex numbers $e^{i\theta}$ with $0 < \theta < 2\pi$. Define*

$$f: X_1 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(e^{i\theta}) = \theta.$$

Then f is non-WUA. It is easy to see that X_1 contains no pseudo-hyperbolas.

(b) The space X_2 consists of the union of the two hyperbolas

$$H_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, xy = 1\},$$

$$H_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, xy = 2\}.$$

Obviously, X_2 contains no pseudo-hyperbolas. Define

$$f: X_2 \rightarrow \mathbb{R}$$

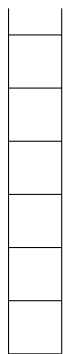
as follows. If $(x, y) \in H_1$, then set $f(x, y) = e^x$.

If $(x, y) \in H_2$, then set $f(x, y) = -e^{-x}$. It is easy to see that this works.

(c) Let X_3 be the space from Diagram 3. It contains no pseudo-hyperbolas. Define $f: X_3 \rightarrow \mathbb{R}$ by identifying X_3 with the subspace of \mathbb{R}^2 consisting of the union of the two vertical axes $x = -1$ and $x = 1$, together with the horizontal segments

$$I_n = \{(x, n) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Let $f(-1, y) = -y$, $f(1, y) = y$. This defines f on the two axes of the ladder. On each horizontal segment I_n , f is linear. This uniquely defines f since we have already defined f on the extrema of the horizontal segments I_n . f is pseudo-monotone, so each truncation of f is an (a, b) -truncation. Any such non-constant truncation is not uniformly continuous. Since f has countable fibers, Theorem 18 applies and thus X_3 is not WUA.

Diagram 3: A subset of \mathbb{R}^2

5. THIN SPACES

The class of topological spaces X having connected quasi components is closed under homotopy type and it contains all compact Hausdorff spaces (see [32, Theorem 6.1.23]) and every subset of the real line. Some sufficient conditions are given in [33] (in terms of existence of Vietoris continuous selections) and [22] (in terms of the quotient space ΔX in which each quasi-component is identified to a point), but an easily-stated description of this class does not seem to be available (see [22]). The situation is complicated even in the case when all connected components of X are trivial, i.e., when X is hereditarily disconnected. In these terms the question is to distinguish between hereditarily disconnected and totally disconnected spaces (examples to this effect go back to Knaster and Kuratowski [38]).

The connectedness of the quasi component (i.e., the coincidence of the quasi component and the connected component) in topological groups is also a rather hard question. Although a locally compact space does not need to have connected quasi components

[32, Example 6.1.24], all locally compact groups have this property. This is an easy consequence of the well known fact that the connected component of a locally compact group coincides with the intersection of all open subgroups of the group [35, Theorem 7.8]. All countably compact groups were shown to have this property, too ([26], see also [25, 27]). Many examples of pseudocompact group where this property strongly fails in different aspects, as well as further information on quasi components in topological groups, can be found in ([24, 25, 27], see also [45] for a planar group with non-connected quasi components).

Let us recall the definition of the *quasi component* $Q_x(X)$ of a point x in a topological space X . This is the set of all points $y \in X$ such that $f(y) = f(x)$ for every continuous function

$$f : X \rightarrow \{0, 1\},$$

where the doubleton $\{0, 1\}$ is discrete. Analogously, given a uniform space X and a point $x \in X$ the *uniform quasi component* of x consists of all points $y \in X$ such that $f(y) = f(x)$ for every uniformly continuous function $f : X \rightarrow \{0, 1\}$, where the doubleton $D = \{0, 1\}$ has the uniformly discrete structure (i.e., the diagonal of $D \times D$ is an entourage). We denote by $Q_x^u(X)$ the uniform quasi component of x .

In these terms we have the following inclusions

$$C_x(X) \subseteq Q_x(X) \subseteq Q_x^u(X), \quad (*)$$

where $C_x(X)$ denotes the connected component of x . Now we can introduce the relevant notion for this section:

Definition 12. *A uniform space X is said to be **thin** if for every closed subset Y of X and every $y \in Y$, the uniform quasi component of y in Y is connected.*

It is easy to see that all inclusions in (*) become equalities in the case of compact spaces. Hence compact spaces are thin. This also follows from the more general property given in Theorem 20.

Definition 13. For three subsets A, B and S of a topological space X we say that S **cuts** between A and B if S intersects every connected set which meets both A and B . (If S is empty this means that there is no connected set which meets both A and B .)

If a set separates A and B (see Definition 12), then it also cuts between A and B , but the converse is false in general.

Definition 14. We say that a uniform space X has the **compact separation property** (briefly CSP), if for any two disjoint closed connected subspaces A and B there is a compact set K disjoint from A and B such that every neighbourhood of K disjoint from A and B separates A and B (consequently K intersects every closed connected set which meets both A and B , see Definition 7).

It is easy to see that every compact space has CSP since disjoint compact sets are always separated.

It was proved in [9, Lemma 3.2] that if a metric space X contains two disjoint closed sets H and K and a point $a \in H$ such that the uniform quasi component of a in $H \cup K$ intersects K , then X is neither thin nor UA . This yields the following corollary:

Corollary 3. Two disjoint closed uniformly connected subsets A, B of a thin metric space X are at positive distance.

The following notion is relevant to the description of thin spaces.

Definition 15. Given two distinct points a, b of a metric space X such that the uniformly connected component of a contains b , there exists for each n a finite set $L_n \subset X$ whose points form a $1/n$ -chain from a to b . We say that the sets L_n , together with a and b , form a **(discrete) garland**, if there is an open subset V of X which separates a and b and such that $V \cap \bigcup_n L_n$ is closed (and discrete).

One can give a characterization of the thin of metric spaces in terms of existence of garlands in the space.

Proposition 1. [9] For a metric space X the following conditions are equivalent:

- (a) X is thin;
- (b) X contains no garlands;
- (c) X contains no discrete garlands.

The main result of the paper [9] is the following:

Theorem 19. *Every complete thin metric space has CSP.*

A large source of thin spaces is provided by US spaces.

Theorem 20. ([9]) *Every UA metric space is thin.*

Theorem 19 follows from the following more precise result:

Theorem 21. *Let X be a complete thin metric space and let A, B be disjoint closed connected subsets of X . Then:*

- (1) *there is a compact set K such that each neighbourhood of K disjoint from $A \cup B$ separates A and B ;*
- (2) *hence K intersects every closed connected set which meets A and B ;*
- (3) *if X is also locally compact, there is a compact set K' which separates A and B .*

5.1. CSP vs thin and complete. The next examples show that the implications in Theorems 19 and 20 cannot be inverted.

Example 16. *There exist many examples of separable metric space with CSP which are not thin:*

- (i) *the circle minus a point (it has two closed connected subsets at distance zero, so it cannot be thin by Corollary 3);*
- (ii) *the rationals \mathbb{Q} (uniformly connected non-connected, hence not thin).*

None of the above examples is complete. Here is an example of a complete separable metric space with CSP which is not thin.

Example 17. *Let H_1 and H_2 be the branches of hyperbolas $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ and $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 2\}$, respectively, contained in the first quadrant. Then the space $X = H_1 \cup H_2$ with*

the metric induced from \mathbb{R}^2 is a complete separable space. Since H_1 and H_2 are connected and at distance zero, it follows from Corollary 3 that X is not thin. On the other hand, the empty set separates the closed connected sets H_1 and H_2 . So if A and B are closed connected disjoint sets in X , it remains to consider only the case when both A and B are contained in the same component H_i ($i = 1, 2$). Now A and B can be separated by a point.

Theorem 19 can be given the following more general form. A metrizable space X with compatible metrics d_1, d_2 such that (X, d_1) is complete (i.e. X is Čech-complete) and (X, d_2) is thin admits also a compatible metric d such that (X, d) is complete and thin (namely, $d = \max\{d_1, d_2\}$). Hence every Čech-complete metrizable space that admits a compatible thin metric has CSP. This explains why the spaces in (i) above and Example 17 have CSP.

Although completeness was essentially used in the proof of Theorem 19, it is not clear whether it is in fact necessary, in other words:

Question 1. *Are there examples of thin spaces that do not have CSP? What about UA spaces?*

As the following example shows, neither thinness nor UA-ness is preserved by passing to completions, thus an immediate application of Theorem 19 (via passage to completions) cannot help attempts to answer Question 1.

Example 18. *There is a UA metric space whose completion is not thin (hence not UA). Let $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{1/n\} \times I$, where I is the unit interval $[0, 1] \subset \mathbf{R}$, let $a = (0, 0)$, $b = (0, 1)$ and $Y = X \cup \{a, b\}$. We put on Y the following metric. The distance between two points (x_1, y_1) and (x_2, y_2) is $|y_1 - y_2|$ if $x_1 = x_2$. Otherwise the distance is the minimum between*

$$y_1 + y_2 + |x_1 - x_2|$$

and

$$(1 - y_1) + (1 - y_2) + |x_1 - x_2|.$$

With this metric Y is the completion of X and the two points a, b are the limits for $n \rightarrow \infty$ of $(1/n, 0)$ and $(1/n, 1)$, respectively. The space Y is not thin since there is a garland consisting of a, b and $\langle L_n \mid n \in \mathbf{N} \rangle$ where L_n is a $1/n$ -chain between a and b in $\{1/n\} \times I$. The space X is UA since X is a union of a chain of compact sets, each attached to the next by at most one point (see [6, Theorem 11.4] and the introduction).

5.2. Thin does not imply UA for complete metric spaces.

We give an example of a complete connected thin metric space that is not UA .

Example 19. For any cardinal α the hedgehog $J(\alpha)$ is thin. Indeed, if $J(\alpha)$ were not thin, then by Proposition 1, it would contain a discrete garland $a, b, \langle L_n \mid n \in \mathbf{N} \rangle$. Let V be an open set separating a, b such that $V \cap \bigcup_n L_n$ is closed and discrete. The minimal connected set C containing a, b must non-trivially intersect V , so it contains an open interval I on one of the spikes. Now, whenever $1/n$ is less than the diameter of I , L_n must intersect I , so $V \cap \bigcup_n L_n$ has an accumulation point, which is a contradiction.

This gives the following immediate corollary of Theorem 12

Corollary 4. For every $\alpha \geq \mathfrak{b}$ the hedgehog $J(\alpha)$ is thin (so has the property CSP), but not UA .

The space $J(\alpha)$ is not separable for $\alpha > \omega$. On the other hand, $\mathfrak{b} > \omega$ ([31]), hence the above examples are not separable. According to Theorem 12 the hedgehogs $J(\alpha)$ are UA for all $\alpha < \mathfrak{b}$, so one cannot get in this way an example of a separable space with the above properties (see Question 4).

6. GLUING UNIFORMLY CONTINUOUS FUNCTIONS

It is well-known fact that a map $f : X \rightarrow Y$ between topological spaces is continuous whenever its restriction to each member of a locally finite closed cover of X is continuous. This section is dedicated to the analogue of this property for uniform continuity.

6.1. Straight spaces. In order to characterize the spaces where uniformly continuous functions can be glued as the continuous ones, the following definition was introduced in [10]:

Definition 16. *A space X is called **straight** if whenever X is the union of two closed sets, then $f \in C(X)$ is u.c. if and only if its restriction to each of the closed sets is u.c.*

Apparently, it would be more natural to ask about the possibility to glue together *finite* number of u.c. functions instead of just two. The following geometric criterion obtained in [10] justifies this choice.

Two subsets A and B of a uniform space X are called *U -distant* (or simply, *distant*) if there exists an entourage U such that

$$A[U] \cap B = \emptyset$$

(or equivalently, there exists an entourage U such that $A \cap B[U] = \emptyset$).

Definition 17. *Let (X, \mathcal{U}) be a uniform space. A pair C^+, C^- of closed sets of X is said to be u-placed if C_U^+ and C_U^- are distant for every entourage U , where*

$$C_U^+ = \{x \in C^+ \mid x \notin (C^+ \cap C^-)[U]\},$$

$$C_U^- = \{x \in C^- \mid x \notin (C^+ \cap C^-)[U]\}.$$

Remark 2. (a) *In the case of a metric space (X, d) we always consider the metric uniformity of X , so that in such a case a pair C^+, C^- of closed sets of X is u-placed if $d(C_\varepsilon^+, C_\varepsilon^-) > 0$ holds for every $\varepsilon > 0$, where*

$$C_\varepsilon^+ = \{x \in C^+ : d(x, C^+ \cap C^-) \geq \varepsilon\},$$

$$C_\varepsilon^- = \{x \in C^- : d(x, C^+ \cap C^-) \geq \varepsilon\}.$$

(b) *Note that $C_\varepsilon^+ = C^+$ and $C_\varepsilon^- = C^-$ when $C^+ \cap C^- = \emptyset$ in Definition 17. Hence a partition $X = C^+ \cup C^-$ of X*

into clopen sets is u -placed if and only if C^+, C^- are uniformly clopen (a subset U of a uniform space X is uniformly clopen if the characteristic function $X \rightarrow \{0, 1\}$ of U is uniformly continuous where $\{0, 1\}$ is discrete).

Theorem 22. For a uniform space (X, \mathcal{U}) and a pair C^+, C^- of closed sets the following statements are equivalent:

- (1) the pair C^+, C^- is u -placed;
- (2) a continuous function $f : C^+ \cup C^- \rightarrow \mathbb{R}$ is $u.c.$ whenever $f|_{C^+}$ and $f|_{C^-}$ are $u.c.$
- (3) same as (2) with \mathbb{R} replaced by a general uniform space (M, \mathcal{V})

The next theorem extends the defining property of straight spaces to arbitrary finite products.

Theorem 23. [10] If a metric space X is straight and X can be written as a union of finitely many closed sets

$$C_1, \dots, C_n$$

it follows that $f \in C(X)$ is $u.c.$ if and only if each restriction $f|_{C_k}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) of f is $u.c.$

Definition 18. Let X be a metric space. We say that X is *WULC*, if for every pair of sequences x_n, y_n in X with

$$d(x_n, y_n) \rightarrow 0$$

and such that the set $\{x_n\}$ is closed and discrete there exist a $n_0 \in \mathbb{N}$ and connected sets $I(x_n, y_n)$ containing x_n and y_n for every $n \geq n_0$ in such a way that the $\text{diam} I(x_n, y_n) \rightarrow 0$.

Proposition 2. Every *WULC* space is straight.

Proof. Assume X is the union of finitely many closed sets F_1, \dots, F_m and the restriction of a function $f \in C(X)$ to each of the closed

so that also the set $\{y_n\}$ is closed and discrete.

sets F_k is u.c. We have to check that f is u.c. Pick $\varepsilon > 0$ and assume that

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geq 2\varepsilon \quad (*)$$

for some x_n, y_n such that $d(x_n, y_n) \rightarrow 0$. It is clear, that the sequence x_n cannot have an accumulation point x in X , since then some subsequence $x_{n_k} \rightarrow x$ and also $y_{n_k} \rightarrow x$. Now the continuity of f would imply $|f(x_{n_k}) - f(x)| \rightarrow 0$ and $|f(y_{n_k}) - f(x)| \rightarrow 0$. Consequently, $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \rightarrow 0$ contrary to (*). Therefore, the double sequence x_n, y_n satisfies the condition (a) of Definition 18. Therefore, for large enough n we have a connected set I_n containing x_n, y_n such that $\text{diam} I_n < \delta$. We can choose $\delta > 0$ such that also $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/m$ whenever x, y belong to the same closed set F_k and $d(x, y) < \delta$. Note that $f(I_n)$ is an interval with length $\geq 2 \cdot \varepsilon$ covered by m subsets $f(I_n \cap F_k)$, $k = 1, \dots, m$ each with diameter $\leq \varepsilon/m$. This leads to a contradiction since an interval of length $\geq 2 \cdot \varepsilon$ cannot be covered by m sets of diameter $\leq \varepsilon/m$. \square

As a corollary we obtain that ULC spaces are straight.

Theorem 24. *Let (X, d) be locally connected. Then (X, d) is straight if and only if it is uniformly locally connected.*

Theorem 25. *Let (X, d) be a totally disconnected metric space. Then X is straight if and only if X is UC.*

6.2. Stability properties of straight spaces. The next theorem shows that straightness spectacularly fails to be preserved under taking closed spaces.

Theorem 26. *For every metric space X with $\text{Ind} X = 0$ the following are equivalent:*

- (1) X is UC;
- (2) every closed subspace of X is straight;
- (3) whenever X can be written as a union of a locally finite family $\{C_i\}_{i \in I}$ of closed sets we have that $f \in C(X)$ is u.c. if and only if each restriction $f|_{C_i}$ of f , $i \in I$, is u.c.

The following notion is relevant for the description of the dense straight subspaces.

Definition 19. ([12]) *An extension $X \subseteq Y$ of topological spaces is called **tight** if for every closed binary cover*

$$X = F^+ \cup F^-$$

one has

$$\overline{F^+}^Y \cap \overline{F^-}^Y = \overline{F^+ \cap F^-}^Y. \quad (6.1)$$

With this notion one can characterize straightness of extensions.

Theorem 27. ([12]) *Let X, Y be metric spaces, $X \subseteq Y$ and let X be dense in Y . Then X is straight if and only if Y is straight and the extension $X \subseteq Y$ is tight.*

6.3. Products of straight spaces. Here we discuss preservation of straightness under products.

Nishijima and Yamada [40] proved the following

Theorem 28. ([40]) *Let X be a straight space. Then $X \times K$ is straight for each compact space K if and only if $X \times (\omega + 1)$ is straight.*

The next lemma easily follows from the definitions.

Lemma 3. ([13]) *A product $X \times Y$ is ULC if and only if both X and Y are ULC.*

The next proposition, proved in [13], plays a crucial role in the proof of Theorem 29:

Proposition 3. *If $X \times Y$ is straight, then X is ULC or Y is precompact.*

Theorem 29. ([13]) *The product $X \times Y$ of two metric spaces is straight if and only if both X and Y are straight and one of the following conditions holds:*

- (a) both X and Y are precompact;
- (b) both X and Y are ULC;

(c) one of the spaces is both precompact and ULC.

It turns out that the straightness of an infinite product of ULC spaces is related to connectedness:

Theorem 30. ([13]) *Let X_n be a ULC space for each $n \in \mathbb{N}$ and $X = \prod_n X_n$.*

- (a) *X is ULC if and only if all but finitely many X_n are connected.*
- (b) *The following are equivalent:*
 - (b₁) *X is straight.*
 - (b₂) *either X is ULC or each X_n is precompact.*

This theorem completely settles the case of infinite powers of ULC space:

Corollary 5. *Let X be ULC. Then*

- (a) *X^ω is ULC if and only if X is connected;*
- (b) *X^ω straight if and only if X is either connected or precompact.*

The above results leave open the question about when infinite products of precompact straight spaces are still straight (see Questions 7 and 6).

7. QUESTIONS

Our first open problem is about the implication (1) in Diagram 2:

Problem 1. ([20, Problem 1.4]) *Does WUA imply UA in $C(\mathbb{R}^n)$? What about $C(\mathbb{R}^2)$?*

7.1. Questions on UA functions and UA spaces. A general question is to characterize the UA and WUA spaces and functions. We list below more specific questions ([6]).

- (1) Characterize the UA functions $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.
- (2) Characterize the UA subsets of \mathbb{R} .

- (3) Characterize the topological spaces which admit a UA uniformity, and those which are UA under every uniformity compatible with their topology. Does the latter class of spaces also include the UC spaces?
- (4) Do WUA and UA coincide for connected spaces?
- (5) Suppose that a uniform space X has a dense UA subspace. Does it follow that X is UA ? (This fails for WUA according to Example 7.7 from [6].)
- (6) Let X be the pushout of two WUA spaces over a single point. Is X WUA ? (This holds for UA by Theorem 11.1 from [6].)
- (7) Suppose that every pseudo-monotone function $f \in C(X)$ is UA . Is then X a UA space?
- (8) Define $2-UA$ similarly as UA but with the set K of cardinality at most 2. Is then $2-UA$ equivalent to UA ?

7.2. Questions on thin spaces. The next question is related to Theorem 19:

Question 2. *Is it true that a complete thin uniform space has CSP? What about a complete UA uniform space?*

Our next question is about how much one needs the fact that **uniform** quasi components are connected.

Question 3. *Is it true that every complete metric space X such that every closed subspace of X has connected quasi components necessarily has CSP?*

Question 4. *Is it true that every (complete) metric thin separable space is UA ?*

7.3. Questions on straight spaces. Theorem 27 gives a criterion for straightness of a dense subspace Y of a straight space X in terms of properties of the embedding $Y \hookrightarrow X$ (namely, when X is a tight extension of Y). The analogue of this question for *closed* subspaces is somewhat unsatisfactory. We saw that uniform retracts, clopen subspaces, as well as direct summands, of straight

spaces are always straight, [9]. On the other hand, closed subspaces even of ULC spaces may fail to be straight (see [BDP2]). Another instance when a closed subspace of a straight space fails to be straight is given by the following fact proved in [10]: the spaces X in which *every* closed subspace is straight are precisely the UC spaces [10]. Hence every straight space that is not UC has closed non-straight subspaces. This motivates the following general

Problem 2. Find a sufficient condition ensuring that a closed subspace Y of a straight space X is straight.

Question 5. *Generalize the results on straight spaces from the category of metric spaces to the category of uniform spaces.*

The results from §6.3 describe when infinite products of ULC spaces are again ULC or straight. The case of precompact spaces is still open, so we start with the following still unsolved

Question 6. *Let X be a precompact straight space. Is the infinite power X^ω necessarily straight?*

More generally:

Question 7. *Let X_n be a precompact straight space for every $n \in \mathbb{N}$. Is the infinite product $\prod_n X_n$ necessarily straight?*

It is easy to see that a positive answer to this question is equivalent to a positive answer to item (b) of the following general question: (i.e., the version of Theorem 30 for products of *precompact* spaces):

Question 8. *Let the metric space Y_i be a tight extension of X_i for each $i \in \mathbb{N}$.*

- (a) *Is $\prod_i Y_i$ a tight extension of $\prod_i X_i$.*
- (b) *What about precompact metric spaces Y_i ?*

ACKNOWLEDGEMENTS

This research was supported by the grant MTM2009-14409-C02-01 and Slovenian Research Agency Grants P1-0292-0101, J1-2057-0101 and J1-9643-0101.

REFERENCES

- [1] Atsuji M. *Uniform continuity of continuous functions on metric spaces* // Pacif. J. Math. — 1958. — Vol. 8. — P. 11–16.
- [2] Atsuji M. *Uniform continuity of continuous functions on metric spaces* // Can. J. Math. — 1961. — Vol. 13. — 657–663.
- [3] Beer G. *UC spaces revisited* // Amer. Math. Monthly. — 1988. — Vol. 95. — P. 737–739.
- [4] Beer G., Di Concilio A. *A generalization of compact metric spaces* // Comment. Math. Univ. Carolinae. — 1991. — Vol. 32, № 2. — P. 361–367.
- [5] Bella A., Simon S. *Function spaces with a dense set of nowhere constant functions* // Boll. Unione. Mat. Ital. — 1990. — Vol. 7, № 4A. — P. 121–124.
- [6] Berarducci A., Dikranjan D. *Uniformly approachable functions and UA spaces* // Rend. Ist. Matematica Univ. di Trieste. — 1993. — Vol. 25. — P. 23–56.
- [7] Berarducci A., Dikranjan D. *Uniformly approachable functions*, in: G.Choquet, G.Godefroy, M. Rogalski, J. Saint Raymond, Eds. Publications Mathématiques de l'Univ. Pierre et Marie Curie, Séminaire d'Initiation a l'Analyse, 33ème Année. — 1993/1994. — P. 7-01–7-09.
- [8] Berarducci A., Dikranjan A., Pelant J. *Functions with distant fibers and uniform continuity* // Topology Appl. — 2002. — Vol. 121, № 1-2. — P. 3-23.
- [9] Berarducci A., Dikranjan A., Pelant J. *Uniform quasi components, thin spaces and compact separation* // Topology Appl. — 2002. — Vol. 122. — P. 51–64.
- [10] Berarducci A., Dikranjan A., Pelant J. *Uniformly approachable functions and UA spaces II*, in preparation.
- [11] Berarducci A., Dikranjan A., Pelant J. *An additivity theorem for uniformly continuous functions* // Topology Appl. — 2005. — Vol. 146/147. — P. 339–352.
- [12] Berarducci A., Dikranjan A., Pelant J. *Local connectedness and extension of uniformly continuous functions* // Topology Appl. — (2006). — Vol. 153. — P. 3355–3371.

- [13] Berarducci A., Dikranjan A., Pelant J. *Products of straight spaces* // Topology Appl. — 2009. Vol. 156, № 7. — P. 1422–1437.
- [14] Burke M. *Characterizing uniform continuity with closure operations* // Topology Appl. — 1994. — Vol. 59. — P. 245–259.
- [15] Burke M. *Continuous functions which take a somewhere dense set of values on every open set* // Topology Appl. — 2000 — Vol. 103, № 1. — P. 95–110.
- [16] Burke M., Ciesielski K. *Sets on which measurable functions are determined by their range* // Canadian Math. J. — 1997. — Vol. 49. — P. 1089–1116.
- [17] Burke M., Ciesielski K. *Sets of range uniqueness for classes of continuous functions* // Proc. Amer. Math. Soc. — 1999. — Vol. 127 — P. 3295–3304.
- [18] Ciesielski K. *Topologizing different classes of real functions* // Canadian Math. J. — 1994. — Vol. 46. — P. 1188–1207.
- [19] Ciesielski K., Dikranjan D. *Uniformly approachable maps*, // Topology Proc. — 1995 — Vol. 20. — P. 75–89.
- [20] Ciesielski K., Dikranjan D. *Between continuous and uniformly continuous functions on \mathbb{R}^n* // Topology Appl. — 2001 — Vol. 114, № 3. — P. 311–325.
- [21] Ciesielski K., Shelah S. *A model with no magic set* // J. Symbolic Logic — 1999. — Vol. 64. — P. 1467–1490.
- [22] Cuchillo-Ibáñez E., Morón M., Ruiz del Portal F. *Closed mappings and spaces in which components and quasicomponents coincide*, Mathematical contributions (Spanish), 357–363, Editorial Complutense, Madrid, 1994.
- [23] Diamond H.G., Pomerance C., Rubel L. *Sets on which an entire function is determined by its range* // Math. Z. — 1981 — Vol. 176. — P. 383–398.
- [24] Dikranjan D. *Connectedness and disconnectedness in pseudocompact groups* // Rend. Accad. Naz. dei XL, Memorie di Mat. **110**, Vol. XVI, fasc. 12 (1992) 211–221.
- [25] Dikranjan D. *Dimension and connectedness in pseudo-compact groups* // Comp. Rend. Acad. Sci. Paris, Série I. — 1993. — Vol. 316. — P. 309–314.
- [26] Dikranjan D. *Zero-dimensionality of some pseudocompact groups* // Proc. Amer. Math. Soc. — 1994. — Vol. 120, № 4. — P. 1299–1308.
- [27] Dikranjan D. *Compactness and connectedness in topological groups* // Topology Appl. — 1998. — Vol. 84. — P. 227–252.

- [28] Dikranjan D., Pelant J. *The impact of closure operators on the structure of a concrete category* // Quaestiones Mathematicae — 1995. — Vol. 18. — P. 381-396.
- [29] Dikranjan D., Tholen W. *Categorical Structure of Closure operators with Applications to Topology, Algebra and Discrete Mathematics*. — Mathematics and its Applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. — 1995.
- [30] Dikranjan D., Tholen W., Watson S. *Classification of closure operators for categories of topological spaces*. — Categorical structures and their applications, 69–98, World Sci. Publ., River Edge, NJ. — 2004.
- [31] van Douwen Eric K. *The integers and topology*. — Handbook of set-theoretic topology, 111–167, North-Holland, Amsterdam-New York, 1984.
- [32] Engelking R. *General Topology*, PWN, Warszawa. — 1977.
- [33] Gutev V., Nogura T. *Vietoris continuous selections and disconnectedness-like properties* // Proc. Amer. Math. Soc. — 2001. — Vol. 129, no. 9. — P. 2809–2815
- [34] Hocking J. G., Young G. S. *Topology*, New York, Dover Publications. — 1988 originally published: Reading, Massachusetts, Addison – Wesley 1961).
- [35] Hewitt E., Ross K. *Abstract Harmonic Analysis, Volume I*. — Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg. — 1979.
- [36] Hueber H. *On uniform continuity and compactness in metric spaces* // Amer. Math. Monthly — 1981 — Vol. 88. — P. 204–205.
- [37] Isbell J. R. *Uniform spaces*, Mathematical Surveys (12), Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island. — 1964.
- [38] Knaster B., Kuratowski K. *Sur les ensembles connexes* // Fund. Math. — 1921. — Vol. 2. — P. 206–255.
- [39] Kuratowski C. *Topologie* (fourth edition), Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa. — 1958.
- [40] Nishijima K., Yamada K. *Products of straight spaces with compact spaces* // Applied General Topology, — 2007 — Vol. 8. — P. 151–159.
- [41] Page W. *Topological Uniform Structures*. — New York: Dover Publications, Inc., — 1988.
- [42] Shelah S. *Independence results* // J. Symbolic Logic — 1980. — Vol. 45. — P. 563–573.
- [43] Sierpiński W. *Sur un ensemble non dénombrable dont toute image continue est de mesure null* // Fund. Math. — 1928. — Vol. 11. — P. 304.

- [44] Sierpiński W. *Hypothèse du continu*. — Monografie Matematyczne, T. IV, Warsaw. — 1934.
- [45] Ursul M. *An example of a plane group whose quasi-component does not coincide with its component* // Mat. Zametki. — 1985. — Vol. 38, № 4. — P. 517–522.

Anastasia V. Kisil

Trinity College, Cambridge, CB2 1TQ

E-mail: ak528@cam.ac.uk

Gromov Conjecture on Surface Subgroups: Computational Experiments

В даній роботі вивчається гіпотеза М. Л. Громова про те чи кожна гіперболічна група з одним кінцем містить підгрупу ізоморфну фундаментальній групі деякої поверхні. Випадок подвійних груп зводився до вивчення груп с одним співвідношенням. Знайдено, що більшість (96%) випадкових груп з трьома твірними мають потрібну властивість. Обчислювальний експеримент проводився за допомогою програми MAGMA.

В этой работе мы изучаем гипотезу М.Л.Громова: каждая ли гиперболическая группа с одним окончанием содержит поверхностьную подгруппу. Случай двойных групп сводился к изучению групп с одним соотношением. Показано, что большинство (96%) случайных двойных групп с тремя генераторами обладают искомым свойством. Вычислительный эксперимент проводился на пакете MAGMA.

In this paper we investigate Gromov's question: whether every one-ended word hyperbolic group contains a surface subgroup. The case of double groups is considered by studying the associated one relator groups. We show that the majority (96%) of the randomly selected double groups with three generators have the property. The experiments are performed on MAGMA software.

Keywords: *one relator groups, surface group, Gromov, word hyperbolic group, MAGMA*

© A.V.Kisil

1. INTRODUCTION

In this paper we are going to investigate the following question:

Question 1 (Gromov). [1] *Does every one-ended word hyperbolic group contains a surface group?*

Here a “surface subgroup” means a subgroup isomorphic to the fundamental group of a closed surface with non-positive Euler characteristic. This question of Gromov is of interest partly because it is a natural generalisation of famous Surface Subgroup Conjecture. In the case of the fundamental groups of hyperbolic 3-manifolds it is exactly the Conjecture. The question of finding subgroups is studied from different angles and it has proved to be a highly nontrivial problem [4].

To define what is meant by the number of ends of a finitely generated group take $S \subseteq G$ a finite generating set of G and let $\Gamma(G, S)$ be the Cayley graph of G with respect to S . Then the number of ends is $e(\Gamma(G, S))$ (e stands for edges) which does not depend on the choice of a finite generating set S of G hence it is well-defined. Stallings’ theorem about ends of groups states that a finitely generated group G has more than one end if and only if the group G admits a nontrivial decomposition as an amalgamated free product or an HNN extension over a finite subgroup [10]. A word hyperbolic group roughly speaking, is a finitely generated group equipped with a word metric satisfying certain properties characteristic of hyperbolic geometry.

The famous Gromov’s question has been much speculated about but it is still very much open even for very concrete groups. It is not even quite clear which answer to expect. One of the few classes of groups the answer is known to is in the case of Coxeter groups and some Artin groups, where it is true [5]. It is not even known for one-relator groups $G_n(w) = \frac{F_n}{\langle\langle w \rangle\rangle}$ where w is an element of a free group of rank n , F_n that is not a proper power.

In this paper we focus on doubles $D_n(w) = F_n *_{\langle w \rangle} F_n$ where F_n is a free group of rank n and $w \in F_n$. The useful recent reduction of the question in the case of the doubles is:

Theorem 2 (Gordon, Wilton). [6] *Let $w \in F_n$. If $G_n(w)$ has an index- k subgroup G' with $\beta_1(G') > 1 + k(n - 2)$ then the double $D_n(w) = F_n *_{\langle w \rangle} F_n$ contains a surface subgroup.*

The above result allowed Gordon and Wilton to exhibit several infinite families of new examples of doubles with surface subgroups [6]. This result reduces the Gromov's question for doubles to virtual homology. The only difficulty is that general approach to computing the virtual homology is not fully developed. But for each particular group β_1 of a subgroup can be attempted to be calculated using a computer. This is the approach taken to gather evidence for Gromov's question.

We will be using this to investigate mainly doubles with $n = 3$. It will be also shown how this method works for $n = 4$. The Question 1 was already studied with success by Button in the case of $n = 2$ [3] using similar methods.

2. ALGORITHM

We will be looking at groups of the form

$$G_3(w) = \langle a, b, c \mid w(a, b, c) \rangle$$

where $w(a, b, c)$ is a cyclically reduced word in three letters of length up to 18. The reason 18 is chosen is that the longer the word is the more computational time is needed. Cyclically reduced means that cyclic permutations are reduced. Reduced simply means that all obvious cancellations like a^{-1} followed by a are made.

In general there is no algorithm to decided weather a group is hyperbolic of not. But in the one relator setting there is a number of theorems we will need to use later on.

The trivial corollary to the above Theorem 2 that we will be using in the remainder of the paper is:

Corollary 1. *Let $w \in F_3$. If $G_3(w)$ has an index- k subgroup G' with $\beta_1(G') > n + 1$ then the double $D_3(w) = F_3 *_{\langle w \rangle} F_3$ contains a surface subgroup.*

A randomly chosen finitely presented group is almost surely word-hyperbolic with an appropriate definition of “almost surely”. That is why initially we did not include any checks whether the group is hyperbolic or not. Double groups are one-ended if w is not in a proper free factor of F_n [6].

The algorithm is as follows:

- (1) Generate a random word $w(a, b, c)$. It is done by choosing randomly 18 characters from $a, a^{-1}, b, b^{-1}, c, c^{-1}$ and then cyclically reduce the word. Since we do not know how much cancellation will take place we only know that the resulting word will be of length smaller than 18 typically around 14.
- (2) Calculate the index $i = 1$ subgroups for

$$G_3(w) = \langle a, b, c \mid w(a, b, c) \rangle.$$

- (3) Checking for the condition in Corollary 1 for each subgroup. So for each subgroup we calculate the first Betti number. In other words the abelianization of the subgroup is calculated and the first Betti number is the rank of it.
- (4) If the condition is satisfied to step 6.
- (5) If the condition is not satisfied go back to step 2 and increase i by 1. Do this until $i < 10$ then move to the next step. The reason why the index is chosen to be 10 is that it is the highest average computer will calculate in reasonable time for a generic group.
- (6) Record the result whether the condition is satisfied for all i and go to step 1. The output is $w(a, b, c)$ and either the program found that the condition is satisfied and if so at which index or that it failed.
- (7) Then calculate the number of successes and fails over the number of groups tried.

This algorithm was implemented in MAGMA software for symbolic calculations. The main limitation of this method is the speed of the computer.

3. ANALYSIS OF RESULTS

It became clear after running the program that F_2 appears quite often which produces double that are not hyperbolic (and not one-ended). To filter it out we used three methods.

The first one is linked to the Nielsen's moves. Let G be a group and let $M = (g_1, \dots, g_n) \in G_n$ be an n -tuple of elements of G . The following moves are called elementary Nielsen moves on M , for generators g_i , $1 < i < n$:

- (1) For some i , replace g_i by g_i^{-1} in M .
- (2) For some $i \neq j$, $1 < i, j < n$ replace g_i by $g_i g_j$ in M .
- (3) For some $i \neq j$, $1 < i, j < n$ interchange g_i and g_j in M .

We say that two n -tuples are Nielsen equivalent if there is a chain of elementary Nielsen moves which transforms one into another. In fact if they are Nielsen equivalent if and only if they generate the same group. So if w has only one of $a, a^{-1}, b, b^{-1}, c, c^{-1}$ then $G_3(w)$ is Nielsen equivalent to F_2 . Hence this is the first thing to check for, since it is the least computationally expensive.

Secondly there is a function in MAGMA which looks for isomorphisms between groups. So the next job is to find isomorphisms of $G_3(w)$ and F_2 which we do with parameter 9. The parameter in the function isomorphism indicated how hard it looks in the sense the higher the parameter the longer it will try to look for before giving up.

Finally we can gather evidence that the group is F_2 or at least disprove that it is not by looking at the number of subgroups of a all index (up to conjugacy the way it is counted in MAGMA). If the group has the same number of subgroups for all indexes up to 9 it is likely to be either F_2 or it is indistinguishable (by looking at subgroups) from it.

The second class of groups which will not satisfy the condition in Corollary 1 is: when it can be written as $G = F_1 * H$ where $H = BS(n, m)$ Baumslag-Solitar groups or very close to them like $\langle a, b^p \mid b^{-p}a^nb^p = a^{m\pm 1} \rangle$. The later are due to Higman [7] called Baumslag-Brunner-Gersten in [3]. Baumslag-Solitar groups are of the form:

$$BS(n, m) \cong \langle a, b \mid b^{-1}a^nb = a^m \rangle.$$

We have $\beta_1(G') = i + 1$ for all subgroups G' of G with index i see section 5.5 in [9] for the proof.

Proposition 1. *The linked one relator groups which do not give a surface subgroups for the doubles in light of Corollary 1 are either*

- (1) *the free group on two generators F_2 , or*
- (2) *the groups of the form $G = F_1 * H$, where*

$$H = BS(n, m)$$

are Baumslag-Solitar or Baumslag-Brunner-Gersten groups.

Note that for all subgroups F' of a free group on two generators F_2 we have that $\beta_1(F') = i + 1$.

It appears that those can be very not trivial to spot even using a computer. What is easier is to prove that the group is not of a certain form. In the next section we display four examples where our computer did not find any surface subgroups but which are not of the above kind.

The above algorithm was run for 1000 random groups showing that it either contains a surface subgroup or are of the above form for 96% of all group.

4. OPEN QUESTIONS

The relator of four $G_3(w)$ groups which are not of the above form are:

- $ba^{-1}c^{-1}b^{-1}ab^{-2}a^{-1}b^{-1}a^{-1}c$
- $b^{-1}ab^{-3}c^{-2}b^{-2}ca^{-1}$

- $ac^{-1}ac^{-1}ac^2b^2ca$
- $a^{-1}bc^2a^{-1}ca^{-1}ba^3b^{-1}$

One way to see that those relators do not give rise to F_2 is to compare the number of subgroups of index say 9 which is different for each one. This actually indicates that no two of the above groups are isomorphic to each other. To see that it is not $G = F_1 * H$ where $H = BS(n, m)$ we prove that all four of the above groups are word hyperbolic. To do that we use the paper [8], which has a nice criteria in the case of one relator groups. The approach works if we can find a presentation which has one letter appearing no more than three times, which we have in all of the above. Then it is simply the matter of an easy check. Note that hyperbolic groups cannot contain a Baumslag-Solitar groups as a subgroup, this implies that the above groups are not of the form as in the Proposition 1.

The above groups are intriguing: could it be the case that they are decomposable but not with Baumslag-Solitar groups? If this is the case then $G = F_1 * H$, where H will be two generator one relator group and the relator could be either of height 1 or not. One relator groups are well studied and all of the counter-examples seem to come from height 1 relators. Without loss of generality height one word is:

$$w = ba^{i_1}ba^{i_2}\dots ba^{i_{i-1}}ba^{i_i}$$

If it is not height 1 we cannot say anything about that at the moment. But if H is then there is a theorem of J. Button in [2] which says that those groups are either large or are indistinguishable from Baumslag-Solitar groups from looking at subgroups. If H is large then certainly the $\beta_1 > 1 + i$ for some i . And also the above groups do not have the same number of subgroups as any Baumslag-Solitar groups.

The way to see that is to note that we can work out the $n - m$ from the abelianization and bound $n + m < 16$ by the fact that Nielsen's moves preserve the highest powers. Then there is only a

few possible Baumslag-Solitar groups to check, and none of them work for any of the above groups. In fact the number of subgroups is strictly in between that of F_2 and Baumslag-Solitar groups. Hence if it is decomposable then H is not of height 1.

It maybe it might be the case that a higher index is needed to detect the required property. Or do there exist doubles which have a surface subgroup but this is not detectable by Theorem 2 for arbitrary index? The property that the above groups seem to share is very little torsion in the abelianization of subgroups. Also up to index 9 there is no abelianization of a subgroup which has the repeating torsion, which could have been used to try the method described in Section 7.

5. DECOMPOSABLE INTO THE TWO GENERATORS ONE RELATOR GROUP AND A FREE GROUP

In this section we will be testing the groups of the form $F(b, c | w(b, c)) * F_1$ where F_1 is the free one generator group. It is interesting to see for which $F(b, c | w(b, c))$ we cannot find a surface subgroup in the associated doubles.

Question 1 does not apply in this scenario (the above is not one-ended) but it is still of interest to see how many of them actually satisfy the above property. Using this approach we were able to come up with examples of groups which will not terminate using the below program but which nevertheless satisfy the condition in Result 1. Since the group is a free product it is enough to study $F(a, b | w(b, c))$ which is much smaller and so the computer can go to a much higher index.

For example, with

$$w(b, c) = c^{-1} * b^{-2} * c^2 * b^{-3} * c^{-2}$$

the property is only detected at index 13. One would need a very powerful computer to go that high for $n = 3$. Furthermore for

$$w(b, c) = c * b^2 * c * b * c * b^{-1} * c^{-2} * b$$

the index the property is detected is 30. It is not possible to calculate all subgroups up to index 30 even with the most powerful computer. So we use a trick that was used in [3] by spotting that at index 15 there is a subgroup with an abelianization which had three cyclic groups of the same order. So take this subgroup as the group and repeat the process with it, where it works already at index 2.

6. FOUR GENERATORS

We also tried this method in the case of $n = 4$. The program below dealt with about 87% of the random double groups. The reason why less of them is dealt with is that with more generators the algorithms become more expensive and the index up to which it is possible to go is only 6. Also the index we might need to go up to might be bigger.

The way the algorithm worked is as follows:

- (1) We pick a random relator in the same sense as in the three generator case.
- (2) Cyclically reduce it.
- (3) Check if there is a letter which occurs only once or not at all.
- (4) If it occurs only once then it is isomorphic to F_3 by the Nelson's moves same as in the $n = 3$ case.
- (5) If there is a letter absent then $G_4 = F_1 * G_3$ so it can be recovered from the $n = 3$ case. It is important to see if it is decomposable since $\beta_1(K * L) = \beta_1(K) * \beta_1(L)$.
- (6) If neither of the two happens we search for isomorphisms with F_3 this time with parameter 7 (smaller one had to be chosen due to more time consuming search). Then we follow exactly the same procedure as in the case of $n = 3$.

7. ACKNOWLEDGEMENT

I am very grateful to Dr Jack Button for suggesting this project and for the very helpful discussion along the way.

8. APPEDIX A. PROGRAMS

8.1. The code for three generator groups.

```

F<a, b, c>:= FreeGroup(3);
F1<a1,b1>:= FreeGroup(2);
kon:=0;
free2:=0;
// number of subgroups of  $\langle F_2 \rangle$  for indexes up to 9
// to check against up to 9 to check against
sub:=[1, 3, 7, 26, 97, 624, 4163, 34470, 314493];

for i_1 := 1 to 50 do //numbers of groups checked
  rel:=Id(F);
  c1:=0;
  c2:=0;
  c3:=0;
  for i := 1 to 18 do
    j:=Random(3, 6);
    if j eq 1 then rel:=rel*a;
    elif j eq 2 then rel:=rel*a^-1;
    elif j eq 3 then rel:=rel*b;
    elif j eq 4 then rel:=rel*b^-1;
    elif j eq 5 then rel:=rel*c;
    else rel:=rel*c^-1;
    end if;
  end for;

  for i:=0 to #rel do //cyclically reducing
    l1:=LeadingGenerator(rel);
    rel1:=rel*l1;
    if #rel gt #rel1 then rel:=l1^-1*rel*l1;
    else break;
    end if;
  end for;

```

```
seq:=Eltseq(rel);

k:=1;
//counting the number of each relator
for i := 1 to #rel do
  if seq[i] eq 1 then c1:=c1+1;
  elif seq[i] eq -1 then c1:=c1+1;
  elif seq[i] eq 2 then c2:=c2+1;
  elif seq[i]eq -2 then c2:=c2+1;
  elif seq[i] eq 3 then c3:=c3+1;
  else c3:=c3+1;
  end if;
end for;
if c1 eq 1 then
  k:=2;
  print "Iso to F2";
  free2:=free2+1;
elif c3 eq 1 then
  k:=2;
  print "Iso to F2";
  free2:=free2+1;
elif c2 eq 1 then
  k:=2;
  print "Iso to F2";
  free2:=free2+1;
end if;
```

```

rel;
G <e, f, g> := quo<F | rel >;
ab:=0;
nu:=0;
sB:=0;
if k eq 1 then
  isiso, f1, f2 := SearchForIsomorphism(G,F1,9);
  isiso;
  if isiso then
    k:=2;
    print "Iso to F2";
    free2:=free2+1;
  end if;
end if;

//the index up to which it is going up
for i := 1 to 9 do
  if k eq 2 then break;
  end if;
  t:=LowIndexSubgroups(G, <i, i>);
  if #t ne sub[i] then sB:=1;
  end if;
  for j:= 1 to #t do
    l:=AQInvariants(t[j]);
    //calculating the number of zero's
    //in the abelinisation
    con:=0;
    for m:=1 to #l do
      if 1 gt l[m] then con:=con+1;
      else ab:=1;
      end if;
    end for;
  end for;

```



```
//condition
if con gt i+1 then print i; k:=2; kon:=kon+1;
end if;
if con ne i+1 then nu:=1;
end if;
if k eq 2 then break;
end if;
end for;
if k eq 2 then break;
end if;
end for;
if k eq 1 then
  print "Did not find surface subgroups";
end if;
if ab eq 0 and nu eq 0 and sB eq 0 then
  print "Looks like F2";
end if;
end for;
print "Free 2";
free2;
print "Done";
kon;
```

10

20

8.2. The code for four generator groups.

```

F<a, b, c, d>:= FreeGroup(4);
F1<a1,b1, c1>:= FreeGroup(3);
kon:=0;
free3:=0;
free2:=0;
//number of subgroups of \((F_3)\)
//for indexes up to 6 to check against
sub:=[1, 7, 41, 604, 13753, 504243];
for i_1 := 1 to 50 do
  rel:=Id(F);
  c1:=0;
  c2:=0;
  c3:=0;
  c4:=0;
  for i := 1 to 14 do
    j:=Random(-1, 6);
    if j eq 1 then rel:=rel*a;
    elif j eq -1 then rel:=rel*d^-1;
    elif j eq 0 then rel:=rel*d;
    elif j eq 2 then rel:=rel*a^-1;
    elif j eq 3 then rel:=rel*b;
    elif j eq 4 then rel:=rel*b^-1;
    elif j eq 5 then rel:=rel*c;
    else rel:=rel*c^-1;
    end if;
  end for;
  for i:=0 to #rel do
    l1:=LeadingGenerator(rel);
    rel1:=rel*l1;
    if #rel gt #rel1 then rel:=l1^-1*rel*l1;
    else break;
    end if;
  end for;
end for;

```

```

seq:=Eltseq(rel);
k:=1;
for i := 1 to #rel do
  if seq[i] eq 1 then c1:=c1+1;
  elif seq[i] eq -1 then c1:=c1+1;
  elif seq[i] eq 2 then c2:=c2+1;
  elif seq[i]eq -2 then c2:=c2+1;
  elif seq[i] eq 3 then c3:=c3+1;
  elif seq[i] eq 4 then c4:=c4+1;
  elif seq[i] eq -4 then c4:=c4+1;
  else c3:=c3+1;
  end if;
end for;
if c1 eq 1 then
  k:=2;
  print "Iso to F3";
  free3:=free3+1;
elif c3 eq 1 then
  k:=2;
  print "Iso to F3";
  free3:=free3+1;
elif c2 eq 1 then
  k:=2;
  print "Iso to F3";
  free3:=free3+1;
elif c4 eq 1 then
  k:=2;
  print "Iso to F3";
  free3:=free3+1;
elif c1 eq 0 then
  k:=2;
  print "Back to 3 gens";
  free2:=free2+1;

```

```

elif c3 eq 0 then
  k:=2;
  print "Back to 3 gens";
  free2:=free2+1;
elif c2 eq 0 then
  k:=2;
  print "Back to 3 gens";
  free2:=free2+1;
elif c4 eq 0 then
  k:=2;
  print "Back to 3 gens";
  free2:=free2+1;
end if;
rel;
G <e, f, g> := quo<F | rel >;
ab:=0;
nu:=0;
sB:=0;
if k eq 1 then
  isiso, f1, f2 := SearchForIsomorphism(G,F1,7);
  isiso;
  if isiso then k:=2; print "Iso to F2"; free3:=free3+1;
  end if;
end if;
for i := 1 to 6 do
  if k eq 2 then break;
  end if;
  t:=LowIndexSubgroups(G, <i, i>);
  if #t ne sub[i] then sB:=1;
  end if;

```

10

20

30

```

for j:= 1 to #t do
l:=AQInvariants(t[j]);
con:=0;
for m:=1 to #l do
  if 1 gt l[m] then con:=con+1;
  else ab:=1;
  end if;
end for;
if con gt 2*i+1 then print i; k:=2; kon:=kon+1;
end if;
if con ne i+1 then nu:=1;
end if;
if k eq 2 then break;
end if;
end for;
if k eq 2 then break;
end if;
end for;
if k eq 1 then
  print "Did not find surface subgroups' ";
end if;
if ab eq 0 and nu eq 0 and sB eq 0 then
  print "Like F3";
end if;
end for;
print "Free 3: "; free3;
print "Back to 3 gens: "; free2;
print "Done: "; kon;

```

REFERENCES

- [1] Bridson. M. R. *Questions in geometric group theory*,
<http://www.math.utah.edu/~bestvina/eprints/questions-updated.pdf>.
- [2] Button J. *Largeness of LERF and 1-relator groups* // Groups Geometry
 and Dynamics. — 2010. — Vol. 4, Issue 4. — P. 709–738.

-
- [3] Button J. O. *Proving finitely presented groups are large by computer* // Experiment Math. — 2011. — Vol. 20, Issue 2. — P. 153–168.
 - [4] Calegari D. *Surface subgroups from homology* // Geom. Topol. — 2008. — Vol. 12, № 4. — P. 1995–2007.
 - [5] Gordon C. McA., Long D. D., and Reid A. W. *Surface subgroups of Coxeter and Artin groups* // J. Pure Appl. Algebra. — 2004. — Vol. 189, № 1-3. — P. 135–148.
 - [6] Gordon C., Wilton H. *On surface subgroups of doubles of free groups* // J. London Math. Soc. — 2010. — Vol. 82, № 1. — P. 17–31.
 - [7] Higman G. *A finitely generated infinite simple group* // J. London Math. Soc. — 1951. — Vol. 26. — P. 61–64.
 - [8] Ivanov S. V., Schupp P. E. *On the hyperbolicity of small cancellation groups and one-relator groups* // Trans. Amer. Math. Soc. — 1998. — Vol. 350, № 5. — P. 1851–1894.
 - [9] Serre J.-P. *Trees*. — Springer, 2003.
 - [10] Wikipedia, *Stallings theorem about ends of groups*.

UDC 539.12

Yu.M. Malyuta, T.V. Obikhod*Institute for Nuclear Research, NAS of Ukraine, Kyiv**E-mail: obikhod@kinr.kiev.ua*

Stringy Approach to the Minimal Supersymmetric Standard Model

Superstring theory is applied to construct the Minimal Supersymmetric Standard Model. The mass spectrum, partial widths and production cross sections of superpartners are calculated. This approach gives concrete predictions for superpartner searches at the LHC.

Keywords: *Superstring theory, Minimal Supersymmetric Standard Model, Derived categories.*

1. INTRODUCTION

The purpose of the present work is to construct the Minimal Supersymmetric Standard Model [1] from superstring theory [2]. This aim is achieved by using the notion of derived category [3]. Such approach allows to determine the mass spectrum, partial widths and production cross sections of superpartners.

These predictions are important from experimental point of view as they are connected with searches for new physics at the LHC.

2. DERIVED CATEGORY

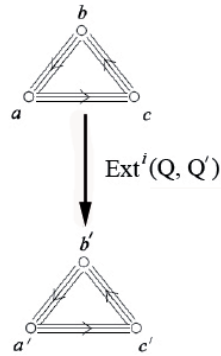
Derived categories are the mathematical foundation of superstring theory. We consider the derived category over the abelian category of McKay quivers. Objects of this category are McKay quivers [3] (numbers

$$\text{Ext}^i \left(\begin{array}{c} b \\ \circ \\ \begin{array}{ccc} \circ & & \circ \\ \nearrow & & \searrow \\ \circ & \longrightarrow & \circ \\ \searrow & & \nearrow \\ \circ & & \circ \end{array} \\ a \qquad c \end{array} , \begin{array}{c} b' \\ \circ \\ \begin{array}{ccc} \circ & & \circ \\ \nearrow & & \searrow \\ \circ & \longrightarrow & \circ \\ \searrow & & \nearrow \\ \circ & & \circ \end{array} \\ a' \qquad c' \end{array} \right)$$

© Yu.M. Malyuta, T.V. Obikhod

a, b, c denote orbifold charges [4]), morphisms of this category are Ext^i groups [4]

In this approach D-branes are described by quivers, and superstrings are described by Ext^i groups. The interaction between D-branes mediated by the superstring is described by the following diagram



3. PARTICLE CONTENT

It was shown in [5] that the moduli space of the superstring has the form

$$\begin{aligned} \text{Ext}^0(Q, Q') &= \mathbb{C}^{aa' + bb' + cc'} \\ \text{Ext}^1(Q, Q') &= \mathbb{C}^{3ab' + 3bc' + 3ca'} \end{aligned} \quad (1)$$

Substituting in (1) orbifold charges

$$a = b = c = a' = b' = c' = 4$$

and using the Langlands hypothesis [6], we obtain the realization of (1) in terms of $SU(5)$ multiplets

$$3 \times (24 + 5_H + \bar{5}_H + 5_M + \bar{5}_M + 10_M + \bar{10}_M) .$$

This result determines the particle content of the MSSM.

4. SUPERPOTENTIAL

The gauge invariant MSSM superpotential takes the form

$$\begin{aligned}
 W_{SU(5)} = & \lambda_{ij}^d \cdot \bar{5}_H \times \bar{5}_M^{(i)} \times 10_M^{(j)} + \\
 & + \lambda_{ij}^u \cdot 5_H \times 10_M^{(i)} \times 10_M^{(j)} + \mu \cdot 5_H \times \bar{5}_H,
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

where 5_H and $\bar{5}_H$ are Higgs multiplets, $\bar{5}_M^{(i)}$ and $10_M^{(j)}$ are multiplets of quark and lepton superpartners, λ_{ij}^d , λ_{ij}^u are Yukawa coupling constants and μ is the Higgs mixing parameter.

5. MASS SPECTRUM

The analysis of Yukawa coupling constants, based on observational hints and theoretical considerations, allows to restrict the parameter space in (2) to five free parameters [7]:

$$\begin{aligned}
 M_0 = 0.01 \text{ GeV}, \quad M_{1/2} = 600 \text{ GeV}, \quad A_0 = 0, \\
 \tan\beta = 35, \quad \text{sgn}(\mu) = +1.
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Using this restricted parameter set it is possible to calculate the mass spectrum of superpartners by application of the computer program SOFTSUSY [8]. This MSSM spectrum is shown in Table 1.

Table 1

	GeV		GeV		GeV
\tilde{u}_R	1187			\tilde{g}	1354
\tilde{u}_L	1232	$\tilde{\nu}_e$	391	$\tilde{\chi}_1^0$	249
\tilde{d}_R	1182	\tilde{e}_R	224	$\tilde{\chi}_2^0$	471
\tilde{d}_L	1235	\tilde{e}_L	398	$\tilde{\chi}_3^0$	727
\tilde{c}_R	1187			$\tilde{\chi}_4^0$	738
\tilde{c}_L	1232	$\tilde{\nu}_\mu$	391	$\tilde{\chi}_1^\pm$	470
\tilde{s}_R	1182	$\tilde{\mu}_R$	224	$\tilde{\chi}_2^\pm$	738
\tilde{s}_L	1235	$\tilde{\mu}_L$	398		
\tilde{t}_1	958			h^0	116
\tilde{t}_2	1155	$\tilde{\nu}_\tau$	379	A^0	671
\tilde{b}_1	1095	$\tilde{\tau}_1$	127	H^0	671
\tilde{b}_2	1148	$\tilde{\tau}_2$	408	H^\pm	676

6. PARTIAL WIDTHS

Using the parameter set (3) it is possible to calculate partial widths of superpartners by application of the computer program SDECAY [9]. These partial widths are shown in Tables 2-5.

Table 2

	channel	BR	channel	BR
$\tilde{\nu}_e$	$\tilde{\chi}_1^0 \nu_e$	1.000		
\tilde{e}_L	$\tilde{\chi}_1^0 e$	1.000		
$\tilde{\nu}_\mu$	$\tilde{\chi}_1^0 \nu_\mu$	1.000		
$\tilde{\mu}_L$	$\tilde{\chi}_1^0 \mu$	1.000		
$\tilde{\nu}_\tau$	$\tilde{\chi}_1^0 \nu_\tau$	0.072	$\tilde{\tau}_1 W^+$	0.928
$\tilde{\tau}_2$	$\tilde{\chi}_1^0 \tau$	0.107	$\tilde{\tau}_1 Z$	0.527
	$\tilde{\tau}_1 h^0$	0.365		
\tilde{u}_R	$\tilde{\chi}_1^0 u$	0.997	$\tilde{\chi}_4^0 u$	0.002
\tilde{u}_L	$\tilde{\chi}_1^0 u$	0.013	$\tilde{\chi}_1^+ d$	0.646
	$\tilde{\chi}_2^0 u$	0.320	$\tilde{\chi}_2^+ d$	0.012
	$\tilde{\chi}_4^0 u$	0.008		
\tilde{d}_R	$\tilde{\chi}_1^0 d$	0.997	$\tilde{\chi}_4^0 d$	0.002
\tilde{d}_L	$\tilde{\chi}_1^0 d$	0.016	$\tilde{\chi}_1^- u$	0.628
	$\tilde{\chi}_2^0 d$	0.317	$\tilde{\chi}_2^- u$	0.027
	$\tilde{\chi}_4^0 d$	0.011		
\tilde{c}_R	$\tilde{\chi}_1^0 c$	0.997	$\tilde{\chi}_4^0 c$	0.002
\tilde{c}_L	$\tilde{\chi}_1^0 c$	0.013	$\tilde{\chi}_1^+ s$	0.646
	$\tilde{\chi}_2^0 c$	0.320	$\tilde{\chi}_2^0 s$	0.012
	$\tilde{\chi}_4^0 c$	0.008		
\tilde{s}_R	$\tilde{\chi}_1^0 s$	0.997	$\tilde{\chi}_4^0 s$	0.002
\tilde{s}_L	$\tilde{\chi}_1^0 s$	0.016	$\tilde{\chi}_1^- c$	0.628
	$\tilde{\chi}_2^0 s$	0.317	$\tilde{\chi}_2^- c$	0.027
	$\tilde{\chi}_4^0 s$	0.011		
\tilde{t}_1	$\tilde{\chi}_1^0 t$	0.216	$\tilde{\chi}_4^0 t$	0.032
	$\tilde{\chi}_2^0 t$	0.105	$\tilde{\chi}_1^+ b$	0.249
	$\tilde{\chi}_3^0 t$	0.171	$\tilde{\chi}_2^+ b$	0.227

Table 3

	channel	BR	channel	BR
\tilde{t}_2	$\tilde{\chi}_1^0 t$	0.025	$\tilde{\chi}_1^+ b$	0.247
	$\tilde{\chi}_2^0 t$	0.111	$\tilde{\chi}_2^+ b$	0.165
	$\tilde{\chi}_3^0 t$	0.114	$\tilde{t}_1 h^0$	0.045
	$\tilde{\chi}_4^0 t$	0.213	$\tilde{t}_1 Z$	0.080
\tilde{b}_1	$\tilde{\chi}_1^0 b$	0.055	$\tilde{\chi}_1^- t$	0.390
	$\tilde{\chi}_2^0 b$	0.220	$\tilde{\chi}_2^- t$	0.183
	$\tilde{\chi}_3^0 b$	0.063	$\tilde{t}_1 W^-$	0.047
	$\tilde{\chi}_4^0 b$	0.041		
\tilde{b}_2	$\tilde{\chi}_1^0 b$	0.023	$\tilde{\chi}_1^- t$	0.161
	$\tilde{\chi}_2^0 b$	0.091	$\tilde{\chi}_2^- t$	0.425
	$\tilde{\chi}_3^0 b$	0.079	$\tilde{t}_1 W^-$	0.125
	$\tilde{\chi}_4^0 b$	0.095		
\tilde{g}	$\tilde{d}_L d^*$	0.019	$\tilde{c}_L c^*$	0.020
	$\tilde{d}_L^* d$	0.019	$\tilde{c}_L^* c$	0.020
	$\tilde{d}_R d^*$	0.038	$\tilde{c}_R c^*$	0.036
	$\tilde{d}_R^* d$	0.038	$\tilde{c}_R^* c$	0.036
	$\tilde{u}_L u^*$	0.020	$\tilde{b}_1 b^*$	0.078
	$\tilde{u}_L^* u$	0.020	$\tilde{b}_1^* b$	0.078
	$\tilde{u}_R u^*$	0.036	$\tilde{b}_2 b^*$	0.054
	$\tilde{u}_R^* u$	0.036	$\tilde{b}_2^* b$	0.054
	$\tilde{s}_L s^*$	0.019	$\tilde{t}_1 t^*$	0.097
	$\tilde{s}_L^* s$	0.019	$\tilde{t}_1^* t$	0.097
	$\tilde{s}_R s^*$	0.038	$\tilde{t}_2 t^*$	0.043
	$\tilde{s}_R^* s$	0.038	$\tilde{t}_2^* t$	0.043

Table 4

	channel	BR	channel	BR
A^0	bb^*	0.858	$\tilde{\tau}_1^- \tilde{\tau}_2^+$	0.004
	$\tau^+ \tau^-$	0.130	$\tilde{\tau}_1^+ \tilde{\tau}_2^-$	0.004
	tt^*	0.002		
H^0	bb^*	0.859	$\tilde{\tau}_1^- \tilde{\tau}_1^+$	0.003
	$\tau^+ \tau^-$	0.130	$\tilde{\tau}_1^- \tilde{\tau}_2^+$	0.002
	tt^*	0.002	$\tilde{\tau}_1^+ \tilde{\tau}_2^-$	0.002

H^+	cb^*	0.001	tb^*	0.818
	$\tau^+\nu_\tau$	0.169	$\tilde{\tau}_1^+\tilde{\nu}_\tau$	0.010
$\tilde{\chi}_1^0$	$\tilde{e}_R^-e^+$	0.032	$\tilde{\mu}_R^+\mu^-$	0.032
	$\tilde{e}_R^+e^-$	0.032	$\tilde{\tau}_1^-\tau^+$	0.436
	$\tilde{\mu}_R^-\mu^+$	0.032	$\tilde{\tau}_1^+\tau^-$	0.436
$\tilde{\chi}_2^0$	$\tilde{\chi}_1^0Z$	0.001	$\tilde{\tau}_2^-\tau^+$	0.037
	$\tilde{\chi}_1^0h^0$	0.010	$\tilde{\tau}_2^+\tau^-$	0.037
	$\tilde{e}_L^-e^+$	0.056	$\tilde{\nu}_e\nu_e^*$	0.064
	$\tilde{e}_L^+e^-$	0.056	$\tilde{\nu}_e^*\nu_e$	0.064
	$\tilde{\mu}_L^-\mu^+$	0.056	$\tilde{\nu}_\mu\nu_\mu^*$	0.064
	$\tilde{\mu}_L^+\mu^-$	0.056	$\tilde{\nu}_\mu^*\nu_\mu$	0.064
	$\tilde{\tau}_1^-\tau^+$	0.135	$\tilde{\nu}_\tau\nu_\tau^*$	0.081
	$\tilde{\tau}_1^+\tau^-$	0.135	$\tilde{\nu}_\tau^*\nu_\tau$	0.081
$\tilde{\chi}_3^0$	$\tilde{\chi}_1^0Z$	0.080	$\tilde{\chi}_2^0h^0$	0.007
	$\tilde{\chi}_2^0Z$	0.193	$\tilde{\tau}_1^-\tau^+$	0.088
	$\tilde{\chi}_1^+W^-$	0.211	$\tilde{\tau}_1^+\tau^-$	0.088
	$\tilde{\chi}_1^-W^+$	0.211	$\tilde{\tau}_2^-\tau^+$	0.051
	$\tilde{\chi}_1^0h^0$	0.016	$\tilde{\tau}_2^+\tau^-$	0.051

Table 5

	channel	BR	channel	BR
$\tilde{\chi}_4^0$	$\tilde{\chi}_1^0Z$	0.016	$\tilde{\mu}_R^-\mu^+$	0.001
	$\tilde{\chi}_2^0Z$	0.009	$\tilde{\mu}_R^+\mu^-$	0.001
	$\tilde{\chi}_1^+W^-$	0.208	$\tilde{\tau}_1^-\tau^+$	0.061
	$\tilde{\chi}_1^-W^+$	0.208	$\tilde{\tau}_1^+\tau^-$	0.061
	$\tilde{\chi}_1^0h^0$	0.069	$\tilde{\tau}_2^-\tau^+$	0.058
	$\tilde{\chi}_2^0h^0$	0.171	$\tilde{\tau}_2^+\tau^-$	0.058
	$\tilde{e}_L^-e^+$	0.005	$\tilde{\nu}_e\nu_e^*$	0.009
	$\tilde{e}_L^+e^-$	0.005	$\tilde{\nu}_e^*\nu_e$	0.009
	$\tilde{e}_R^-e^+$	0.001	$\tilde{\nu}_\mu\nu_\mu^*$	0.009
	$\tilde{e}_R^+e^-$	0.001	$\tilde{\nu}_\mu^*\nu_\mu$	0.009
	$\tilde{\mu}_L^-\mu^+$	0.005	$\tilde{\nu}_\tau\nu_\tau^*$	0.010
	$\tilde{\mu}_L^+\mu^-$	0.005	$\tilde{\nu}_\tau^*\nu_\tau$	0.010

$\tilde{\chi}_1^+$	$\tilde{\nu}_e e^+$	0.135	$\tilde{\mu}_L^+ \nu_\mu$	0.108
	$\tilde{\nu}_\mu \mu^+$	0.135	$\tilde{\tau}_1^+ \nu_\tau$	0.261
	$\tilde{\nu}_\tau \tau^+$	0.176	$\tilde{\tau}_2^+ \nu_\tau$	0.067
	$\tilde{e}_L^+ \nu_e$	0.108	$\tilde{\chi}_1^0 W^+$	0.010
$\tilde{\chi}_2^+$	$\tilde{\nu}_e e^+$	0.009	$\tilde{\tau}_2^+ \nu_\tau$	0.051
	$\tilde{\nu}_\mu \mu^+$	0.009	$\tilde{\chi}_1^+ Z$	0.206
	$\tilde{\nu}_\tau \tau^+$	0.105	$\tilde{\chi}_1^0 W^+$	0.079
	$\tilde{e}_L^+ \nu_e$	0.020	$\tilde{\chi}_2^0 W^+$	0.214
	$\tilde{\mu}_L^+ \nu_\mu$	0.020	$\tilde{\chi}_1^+ h^0$	0.183
	$\tilde{\tau}_1^+ \nu_\tau$	0.104		

7. CROSS SECTIONS

Using the parameter set (3) it is possible to calculate production cross sections of superpartners by application of the computer program PYTHIA [10]. These cross sections at center-of-mass energy $\sqrt{s} = 14$ TeV are shown in Table 6.

8. COMPARISON WITH EXPERIMENTS

Comparison of the predicted MSSM spectrum with experimental data obtained at the LEP and TEVATRON [11] (see Table 7) shows, that the calculated masses exceed the lower limits on masses reached at colliders.

New searches for superpartners will be made at the LHC.

Table 6

channel	cross section
$gg \rightarrow \tilde{g}\tilde{g}$	$\sigma_{\tilde{g}\tilde{g}} = 0.307$ pb
$gu \rightarrow \tilde{g}\tilde{u}$	$\sigma_{\tilde{g}\tilde{u}} = 0.891$ pb
$du \rightarrow \tilde{d}\tilde{u}$	$\sigma_{\tilde{d}\tilde{u}} = 0.466$ pb
$\bar{u}u \rightarrow \tilde{\chi}_1^+ \tilde{\chi}_1^-$	$\sigma_{\tilde{\chi}_1^+ \tilde{\chi}_1^-} = 0.157$ pb
$\bar{d}u \rightarrow \tilde{\chi}_1^+ \tilde{\chi}_2^0$	$\sigma_{\tilde{\chi}_1^+ \tilde{\chi}_2^0} = 0.208$ pb

Table 7

particle		Condition	Lower limit (GeV/c ²)	Source
$\tilde{\chi}_1^\pm$	gaugino	$M_{\tilde{\nu}} > 200 \text{ GeV}/c^2$	103	LEP 2
		$M_{\tilde{\nu}} > M_{\tilde{\chi}_1^\pm}$	85	LEP 2
		any $M_{\tilde{\nu}}$	45	Z width
	Higgsino	$M_2 < 1 \text{ TeV}/c^2$	99	LEP 2
	GMSB		150	DØ isolated photons
	RPV	$L\bar{L}\bar{E}$ worst case $LQ\bar{D}$ $m_0 > 500 \text{ GeV}/c^2$	87 88	LEP 2 LEP 2
$\tilde{\chi}_1^0$	indirect	any $\tan\beta$, $M_{\tilde{\nu}} > 500 \text{ GeV}/c^2$	39	LEP 2
		any $\tan\beta$, any m_0	36	LEP 2
		any $\tan\beta$, any m_0 , SUGRA Higgs	59	LEP 2 combined
	GMSB		93	LEP 2 combined
	RPV	$L\bar{L}\bar{E}$ worst case	23	LEP 2
\tilde{e}_R	$e\tilde{\chi}_1^0$	$\Delta M > 10 \text{ GeV}/c^2$	99	LEP 2 combined
$\tilde{\mu}_R$	$\mu\tilde{\chi}_1^0$	$\Delta M > 10 \text{ GeV}/c^2$	95	LEP 2 combined
$\tilde{\tau}_R$	$\tau\tilde{\chi}_1^0$	$M_{\tilde{\chi}_1^0} < 20 \text{ GeV}/c^2$	80	LEP 2 combined
$\tilde{\nu}$			43	Z width
$\tilde{\mu}_R, \tilde{\tau}_R$		stable	86	LEP 2 combined
\tilde{t}_1	$c\tilde{\chi}_1^0$	any θ_{mix} , $\Delta M > 10 \text{ GeV}/c^2$	95	LEP 2 combined
		any θ_{mix} , $M_{\tilde{\chi}_1^0} \sim \frac{1}{2}M_{\tilde{t}}$	115	CDF
		any θ_{mix} and any ΔM	59	ALEPH
	$b\tilde{\nu}$	any θ_{mix} , $\Delta M > 7 \text{ GeV}/c^2$	96	LEP 2 combined
\tilde{g}		any $M_{\tilde{g}}$	195	CDF jets+ \cancel{E}_T
\tilde{q}		$M_{\tilde{q}} = M_{\tilde{g}}$	300	CDF jets+ \cancel{E}_T

REFERENCES

- [1] Haber H. E. *Introductory low-energy supersymmetry* // arXiv: hep-ph/9306207.
- [2] Vafa C. et al. *Stringy reflections on LHC*
// <http://www.claymath.org/workshops/lhc/>.
- [3] Aspinwall P.S. *D-branes on Calabi-Yau manifolds* // arXiv: hep-th/0403166.
- [4] Douglas M. R., Fiol B., Römelsberger C. *The spectrum of BPS branes on a noncompact Calabi-Yau* // arXiv: hep-th/0003263.

- [5] Katz S., Pantev T., Sharpe E. *D-branes, orbifolds, and Ext groups* // arXiv: hep-th/0212218.
- [6] Schmid W. *Homogeneous complex manifolds and representations of semisimple Lie groups* // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. — 1968. — Vol. 69. — P. 56–59.
- [7] Heckman J. J., Vafa C. *F-theory, GUTs, and the weak scale* // arXiv:0809.1098 [hep-th].
- [8] Allanach B. C. *SOFTSUSY2.0: a program for calculating supersymmetric spectra* // Comput. Phys. Commun. — 2002. — Vol. 143. — P. 305–331.
- [9] Muhlleitner M., Djouadi A., Mambrini Y. *SDECAY: a fortran code for the decays of the supersymmetric particles in the MSSM* // Comput. Phys. Commun. — 2005. — Vol. 168. — P. 46–70.
- [10] Sjöstrand T., Mrenna S., Skands P. *PYTHIA 6.4 Physics and Manual* // JHEP. — 2006. — Vol. 5. — P. 1–26.
- [11] *M. Schmitt Supersymmetry, Part II (Experiment)* // Phys. Lett. — 2004. — Vol. B592. — P. 1014–1023.

MSC 2000: 53C40

Koji Matsumoto*2-3-65, Nishi-Odori, Yonezawa, Yamagata, 992-0059, Japan**E-mail: tokiko_matsumoto@yahoo.com***Zerrin Şentürk***Department of Mathematics, Fen-Edebiyat Faculty, Istanbul Technical University, Maslak, Istanbul, Turkey**E-mail: senturk@itu.edu.tr*

Certain Anti-holomorphic Submanifolds in a Locally Conformal Kaehler Manifold

In this paper we consider special anti-holomorphic submanifolds which is called almost contact anti-holomorphic submanifold, in a locally conformal Kaehler manifold. Next, we define the \mathcal{D} -mean curvature vector field in an anti-holomorphic submanifold. Then, we consider certain relations between this vector field and the shape operator (Theorem 6.1). Finally, in a normal anti-holomorphic submanifold, we prove that the holomorphic distribution \mathcal{D} is totally umbilic in an ambient manifold (Theorem 6.5).

Keywords: *Locally conformal Kaehler manifold, Lee form, CR-submanifold, anti-holomorphic submanifold, \mathcal{D} -mean curvature vector field, almost contact anti-holomorphic submanifold*

1. PRELIMINARY

A Hermitian manifold \tilde{M} with structure (J, \tilde{g}) is called a *locally conformal Kaehler* (an *l.c.K.-*) manifold if each point $x \in \tilde{M}$ has an open neighbourhood U with a positive differentiable function $\rho : U \rightarrow \mathcal{R}$ such that $\tilde{g}^* = e^{-2\rho}\tilde{g}|_U$ is a Kaehlerian metric on U , that is, $\nabla^* J = 0$, where J is the almost complex structure, \tilde{g} is the Hermitian metric, ∇^* is the covariant differentiation with respect to \tilde{g}^* and \mathcal{R} is a real number space ([V]). Then we know

© K. Matsumoto, Z. Şentürk

Proposition 1.1[K]. *A Hermitian manifold \tilde{M} with structure (J, \tilde{g}) is l.c.K.- if and only if there exists a global 1-form α which is called Lee form satisfying*

$$(1.1) \quad d\alpha = 0 \quad (\alpha : \text{closed}),$$

$$(1.2) \quad \begin{aligned} (\tilde{\nabla}_V J)U &= -\tilde{g}(\alpha^\sharp, U)JV + \tilde{g}(U, V)\beta^\sharp + \\ &+ \tilde{g}(JV, U)\alpha^\sharp - \tilde{g}(\beta^\sharp, U)V \end{aligned}$$

for any $U, V \in T\tilde{M}$, where $\tilde{\nabla}$ denotes the covariant differentiation with respect to \tilde{g} , α^\sharp is the dual vector field of α which is called Lee vector field, the 1 form β is defined by $\beta(U) = -\alpha(JU)$, β^\sharp is the dual vector field of β and $T\tilde{M}$ means the set of all differentiable vector fields on \tilde{M} .

We denote an l.c.K.-manifold with the structure J, \tilde{g} and a Lee form α as $\tilde{M}(J, \tilde{g}, \alpha)$.

2. CR-SUBMANIFOLDS IN AN L.C.K.-MANIFOLD

In generally, between a Riemannian manifold (\tilde{M}, \tilde{g}) and its submanifold, we know the Gauss and Weingarten formulas

$$(2.1) \quad \tilde{\nabla}_V U = \nabla_V U + \sigma(V, U),$$

$$(2.2) \quad \tilde{\nabla}_V \xi = -A_\xi V + \nabla_V^\perp \xi$$

for any $V, U \in TM$ and $\xi \in T^\perp M$, where σ is the second fundamental form, A_ξ is the shape operator with respect to ξ and $T^\perp M$ is the normal bundle of M . Between the second fundamental form σ and the shape operator A_ξ , we have the following relation

$$(2.3) \quad \tilde{g}(\sigma(V, U), \xi) = \tilde{g}(A_\xi V, U)$$

for any $V, U \in TM$ and $\xi \in T^\perp M$.

A submanifold M in an l.c.K.-manifold \tilde{M} is called a *CR-submanifold* if there exists a differentiable distribution

$$\mathcal{D} : x \rightarrow \mathcal{D}_x \subset T_x M$$

on M satisfying the following conditions;

- (i) \mathcal{D} is holomorphic, i.e., $J\mathcal{D}_x = \mathcal{D}_x$ for each $x \in M$ and

(ii) the complementary orthogonal distribution

$$\mathcal{D}^\perp : x \rightarrow \mathcal{D}_x^\perp \subset T_x M$$

is totally real, i.e., $J\mathcal{D}_x^\perp \subset T_x^\perp M$ for each $x \in M$, where $T_x M$ (resp. $T_x^\perp M$) denotes the tangent (resp. normal) vector space at x of M ([B2, C2, K], etc.)

If $\dim \mathcal{D}_x^\perp = 0$ (resp. $\dim \mathcal{D}_x = 0$) for each $x \in M$, then the CR -submanifold is a *holomorphic* (resp. *totally real*) submanifold.

For a CR -submanifold M of an almost Hermitian manifold \tilde{M} , we denote by ν the complementary orthogonal subbundle of $J\mathcal{D}^\perp$ in the normal bundle $T^\perp M$. Then we have the following direct sum decomposition

$$(2.4) \quad T^\perp M = J\mathcal{D}^\perp \oplus \nu, \quad J\mathcal{D}^\perp \perp \nu.$$

A CR -submanifold M is said to be *mixed geodesic* if the second fundamental form σ satisfies $\sigma(X, Z) = 0$ for any $X \in \mathcal{D}$ and $Z \in \mathcal{D}^\perp$ and a CR -submanifold M is called *anti-holomorphic* if $J\mathcal{D}_x^\perp = T_x^\perp M$ for any $x \in TM$.

Remark 2.1. By the definition of ν , a CR -submanifold is anti-holomorphic if and only if $\nu_x = \{0\}$ for any $x \in M$.

Now, we put $\dim \tilde{M} = m$, $\dim M = n$, $\dim \mathcal{D} = 2p$, $\dim \mathcal{D}^\perp = q$ ($2p + q = n$) and $\dim \nu = 2s$. Let

$$\begin{aligned} &\{e_1, \dots, e_p, e_1^*, \dots, e_p^*\}, && \{e_{2p+1}, \dots, e_{2p+q}\}, \\ &\{e_{2p+1}^*, \dots, e_{2p+q}^*\}, && \{e_{n+q+1}, \dots, e_{n+q+2s}\}, \end{aligned}$$

where $n + q + 2s = m$ be a local orthonormal basis of \mathcal{D} , \mathcal{D}^\perp , $J\mathcal{D}^\perp$ and ν , respectively, where $e_i^* = Je_i$ for $i \in \{1, \dots, p\}$ and $e_{2p+a}^* = Je_{2p+a}$ for $a \in \{1, \dots, q\}$. We call such local basis an *adapted frame* of \tilde{M} .

3. MORPHISMS IN A CR -SUBMANIFOLD IN AN L.C.K.-MANIFOLD

Let M be a CR -submanifold in an l.c.K.-manifold

$$\tilde{M}(J, \tilde{g}, \alpha).$$

For any U tangent to M , we put

$$(3.1) \quad JU = \varphi U + \omega U,$$

where φU (resp. ωU) is the tangential (resp. the normal) component of JU .

Also, for any N normal to M , we put

$$(3.2) \quad JN = BN + CN,$$

where BN (resp. CN) is the tangential (resp. the normal) component of JN . Then we know that the morphism φ (resp. C) is an f -structure on TM (resp. $T^\perp M$), that is,

$$\varphi^3 U + \varphi U = 0$$

for any $U \in TM$ (resp. $C^3 N + CN = 0$ for any $N \in T^\perp M$) ([MS2]).

We define the covariant differentiation of the morphisms φ and ω as

$$(3.3) \quad \begin{cases} (\nabla'_V \varphi)U = \nabla_U(\varphi U) - \varphi(\nabla_V U), \\ (\nabla'_V \omega)(U) = \nabla_V^\perp(\omega U) - \omega(\nabla_V U) \end{cases}$$

for any $V, U \in TM$.

The covariant differentiation of (3.1) along M on \tilde{M} , (1.2) and (3.3) give us

$$(3.4) \quad \begin{aligned} (\nabla'_V \varphi)U &= -\tilde{g}(\alpha^\sharp, U)\varphi V + \tilde{g}(V, U)\beta_1^\sharp + \tilde{g}(\varphi V, U)\alpha_1^\sharp - \\ &\quad - \tilde{g}(\beta^\sharp, U)V + B\sigma(U, V) + A_{\omega U}V, \\ (\nabla'_V \omega)(U) &= -\tilde{g}(\alpha^\sharp, U)\omega V + \tilde{g}(V, U)\beta_2^\sharp + \\ &\quad + \tilde{g}(\varphi V, U)\alpha_2^\sharp + C\sigma(U, V) - \sigma(V, \varphi U) \end{aligned}$$

for any $U, V \in TM$, where α_1^\sharp and β_1^\sharp (resp. α_2^\sharp and β_2^\sharp) are respectively the tangential (resp. the normal) components of α^\sharp and β^\sharp .

We say that the morphism φ (resp. ω) is *parallel* if $\nabla' \varphi = 0$ (resp. $\nabla' \omega = 0$). Then we have

Proposition 3.1.[MS1] *In a CR-submanifold M of an l.c.K.-manifold \tilde{M} , the morphism φ (resp. ω) is parallel if and only if the second fundamental form σ and the shape operator A satisfy*

$$(3.5) \quad \begin{aligned} B\sigma(U, V) + A_{\omega U}V &= \tilde{g}(\alpha^\sharp, U)\varphi V - \tilde{g}(V, U)\beta_1^\sharp - \\ &\quad - \tilde{g}(\varphi V, U)\alpha_1^\sharp + \tilde{g}(\beta^\sharp, U)V \end{aligned}$$

(resp.)

$$(3.6) \quad \begin{aligned} C\sigma(U, V) - \sigma(V, \varphi U) &= \tilde{g}(\alpha^\sharp, U)\omega V - \\ &\quad - \tilde{g}(V, U)\beta_2^\sharp - \tilde{g}(\varphi V, U)\alpha_2^\sharp \end{aligned}$$

for any $V, U \in TM$.

Corollary 3.2[MS1]. *Let us consider the CR-submanifold M in an l.c.K.-manifold \tilde{M} is mixed geodesic. If the morphism φ or ω is parallel, then the Lee vector field α^\sharp is orthogonal to \mathcal{D} .*

Remark. In [M3], we proved that a CR-submanifold M in an l.c.K.-manifold \tilde{M} is a CR-product if and only if the morphism φ is parallel.

4. ANTI-HOLOMORPHIC SUBMANIFOLDS IN AN L.C.K.-MANIFOLD

In this section, we assume that our CR-submanifold M in an l.c.K.-manifold \tilde{M} is anti-holomorphic. Then, by the definition, the distribution $\nu = \{0\}$ or equivalently

$$J\mathcal{D}^\perp = T^\perp M.$$

So, we can take an adapted frame on \tilde{M} as

$$\{e_1, \dots, e_p, e_1^*, \dots, e_p^*, e_{2p+1}, \dots, e_{2p+q}, e_{2p+1}^*, \dots, e_{2p+q}^*\}.$$

Now, we define the tensor field $S(U, V)$ as

$$(4.1) \quad \begin{aligned} S(U, V) = & [\varphi, \varphi](U, V) - 2J\{d\omega(U, V) - \\ & - \frac{1}{2}\tilde{g}(\alpha^\sharp, U)\omega V + \frac{1}{2}\tilde{g}(\alpha^\sharp, V)\omega U\} \end{aligned}$$

for any $U, V \in TM$, where $[\varphi, \varphi]$ is the Niejenhuis tensor with respect to the morphism φ , that is,

$$(4.2) \quad \begin{aligned} (U, V) = & [\varphi U, \varphi V] + \varphi^2[U, V] - \\ & - \varphi([U, \varphi V]) - \varphi([\varphi U, V]), \end{aligned}$$

and $d\omega$ denotes the exterior differential of ω which is given by

$$(4.3) \quad d\omega(U, V) = \frac{1}{2}\{(\nabla'_U \omega)V - (\nabla'_V \omega)U\}$$

for any $U, V \in TM$ ([MS5]).

An anti-holomorphic submanifold of an l.c.K.-manifold is said to be *normal* if the tensor field S vanishes on M , identically. In our case, we have the following statement.

Theorem 4.1 [MS1]. *An anti-holomorphic submanifold M in an l.c.K.-manifold \tilde{M} is normal if and only if the following two conditions hold true:*

- (i) $\alpha^\sharp \in \mathcal{D}^\perp$

(ii) the shape operator A satisfies

$$(4.4) \quad A_{JZ}JX = JA_{JZ}X$$

for any $X \in \mathcal{D}$ and $Z \in \mathcal{D}^\perp$.

By virtue of (4.3), we can easily see

Proposition 4.2. *A normal anti-holomorphic submanifold M in an l.c.K.-manifold \tilde{M} is mixed geodesic and the second fundamental form σ satisfies $\sigma(JX, Y) = \sigma(JY, X)$ for any $X, Y \in \mathcal{D}$.*

Since, M is anti-holomorphic, the equation (3.4) is written as

$$(4.5) \quad \begin{cases} (\nabla'_V \varphi)U = -\tilde{g}(\alpha^\sharp, U)\varphi V + \tilde{g}(V, U)\beta_1^\sharp + \tilde{g}(\varphi V, U)\alpha_1^\sharp \\ \quad - \tilde{g}(\beta^\sharp, U)V + J\sigma(U, V) + A_{\omega U}V, \\ (\nabla'_V \omega)(U) = -\tilde{g}(\alpha^\sharp, U)\omega V + \tilde{g}(V, U)\beta_2^\sharp \\ \quad + \tilde{g}(\varphi V, U)\alpha_2^\sharp - \sigma(V, \varphi U) \end{cases}$$

for any $U, V \in TM$.

5. ALMOST CONTACT ANTI-HOLOMORPHIC SUBMANIFOLDS

Let M be an anti-holomorphic submanifold of an l.c.K.-manifold \tilde{M} .

Definition 5.1. The \mathcal{D} -mean curvature vector field $H_{\mathcal{D}}$ in a CR -submanifold in an l.c.K.-manifold is defined by

$$(5.1) \quad H_{\mathcal{D}} = \frac{1}{2p} \sum_{i=1}^p \{\sigma(e_i, e_i) + \sigma(e_i^*, e_i^*)\}$$

for any orthonormal frame $\{e_1, \dots, e_p, e_1^*, \dots, e_p^*\}$ of \mathcal{D} . And a CR -submanifold is said to be \mathcal{D} -minimal if the \mathcal{D} -mean curvature $H_{\mathcal{D}}$ vanishes, identically.

Remark 5.1. We know from [MS3] that a pseudo-umbilical submanifold in an l.c.K.-manifold is \mathcal{D} -minimal.

Definition 5.2. A submanifold M is called a *proper almost contact anti-holomorphic submanifold* if it satisfies

$$(5.2) \quad (i) \quad H_{\mathcal{D}} \neq 0, \quad (ii) \quad d\omega(U, V) = -\tilde{g}(U, \varphi V)H_{\mathcal{D}}$$

for any $U, V \in TM$.

Remark 5.2. An anti-holomorphic submanifold which satisfies $H_{\mathcal{D}} = 0$ and (ii) in Definition 5.2 is said to be *trivial*.

Remark 5.3. By Remark 5.1, there does not exist any pseudo-umbilical proper almost contact anti-holomorphic submanifold in an l.c.K.-manifold.

Remark 5.4. There does not exist any \mathcal{D} -geodesic (that is $\sigma(\mathcal{D}, \mathcal{D}) = \{0\}$) proper almost contact anti-holomorphic submanifold in an l.c.K.-manifold.

By virtue of (3.4) and (4.5), (5.2)_(ii) is written as

$$(5.3) \quad \begin{aligned} \tilde{g}(U, \varphi V)H_{\mathcal{D}} &= \tilde{g}(\alpha^{\sharp}, V)\omega U - \tilde{g}(\alpha^{\sharp}, U)\omega V - \\ &\quad - 2\tilde{g}(\varphi V, U)\alpha_2^{\sharp} - \sigma(V, \varphi U) + \sigma(U, \varphi V) \end{aligned}$$

for any $U, V \in TM$.

In (5.3), if we put $U = X \in \mathcal{D}$ and $V = Z \in \mathcal{D}^{\perp}$, then we have

$$(5.4) \quad \tilde{g}(\alpha^{\sharp}, X)\omega Z + \sigma(Z, \varphi X) = 0.$$

Thus we have

Proposition 5.1. *A proper almost contact anti-holomorphic submanifold M of an l.c.K.-manifold \tilde{M} is mixed geodesic if and only if the Lee vector field α^{\sharp} is orthogonal to \mathcal{D} .*

6. THE RELATIONS BETWEEN $H_{\mathcal{D}}$ AND THE SHAPE OPERATOR A

We consider an anti-holomorphic submanifold M in an l.c.K.-manifold $\tilde{M}(J, \tilde{g}, \alpha^{\sharp})$. In this section, we assume that U, V, \dots, W are elements of TM .

Now, in generally, the covariant differentiation of the induced metric ∇ with respect to \tilde{g} is defined by

$$(6.1) \quad \begin{aligned} 2\tilde{g}(\nabla_U V, W) &= U\tilde{g}(V, W) + V\tilde{g}(U, W) - W\tilde{g}(U, V) \\ &\quad + \tilde{g}([U, V], W) + \tilde{g}([W, U], V) - \tilde{g}([V, W], U). \end{aligned}$$

And, we have

$$(6.2) \quad \begin{aligned} 2\tilde{g}((\nabla'_U \varphi)V, W) &= 2\tilde{g}(\nabla_U \varphi V, W) - 2\tilde{g}(\varphi \nabla_U V, W) \\ &= 2\tilde{g}(\nabla_U \varphi V, W) + 2\tilde{g}(\nabla_U V, \varphi W). \end{aligned}$$

By virtue of (6.1), (6.2) is written as

$$\begin{aligned}
2\tilde{g}((\nabla'_U \varphi)V, W) &= \varphi V \tilde{g}(U, W) - W \tilde{g}(U, \varphi V) + \\
&+ \tilde{g}([U, \varphi V], W) + \tilde{g}([W, U], \varphi V) - \tilde{g}([\varphi V, W], U) + \\
&+ V \tilde{g}(U, \varphi W) - \varphi W \tilde{g}(U, V) + \tilde{g}([U, V], \varphi W) + \\
&+ \tilde{g}([\varphi W, U], V) - \tilde{g}([V, \varphi W], U). \quad (6.3)
\end{aligned}$$

Now, we have from (2.1) and (2.2)

$$\begin{aligned}
\varphi V \tilde{g}(U, W) &= \varphi V \tilde{g}(\varphi U, \varphi W) + \varphi V \tilde{g}(\omega U, \omega W) \\
&= \tilde{g}(\nabla_{\varphi V} \varphi U, \varphi W) + \tilde{g}(\nabla_{\varphi V} \varphi W, \varphi U) + \\
&+ \tilde{g}(\nabla_{\varphi V}^\perp \omega U, \omega W) + \tilde{g}(\nabla_{\varphi V}^\perp \omega W, \omega U).
\end{aligned}$$

Using the above equation, we have

$$\begin{aligned}
\varphi V \tilde{g}(U, W) - \varphi W \tilde{g}(U, V) &= \tilde{g}(\nabla_{\varphi V} \varphi U, \varphi W) - \\
&- \tilde{g}(\nabla_{\varphi W} \varphi U, \varphi V) + \tilde{g}([\varphi V, \varphi W], \varphi U) + \tilde{g}(\nabla_{\varphi V}^\perp \omega U, \omega W) - \\
&- \tilde{g}(\nabla_{\varphi W}^\perp \omega U, \omega V) + \tilde{g}(\nabla_{\varphi V}^\perp \omega W - \nabla_{\varphi W}^\perp \omega V, \omega U). \quad (6.4)
\end{aligned}$$

Substituting (6.4) into (6.3), we obtain

$$\begin{aligned}
2\tilde{g}((\nabla'_U \varphi)V, W) &= \tilde{g}(\nabla_{\varphi V} \varphi U, \varphi W) - \tilde{g}(\nabla_{\varphi W} \varphi U, \varphi V) + \\
&+ \tilde{g}([\varphi V, \varphi W], \varphi U) + \tilde{g}(\nabla_{\varphi V}^\perp \omega U, \omega W) - \tilde{g}(\nabla_{\varphi W}^\perp \omega U, \omega V) + \\
&+ \tilde{g}(\nabla_{\varphi V}^\perp \omega W - \nabla_{\varphi W}^\perp \omega V, \omega U) + V \tilde{g}(U, \varphi W) - W \tilde{g}(U, \varphi V) + \\
&+ \tilde{g}([U, \varphi V], W) - \tilde{g}([U, \varphi W], V) + \tilde{g}([W, U], \varphi V) - \\
&- \tilde{g}([V, U], \varphi W) - \tilde{g}([\varphi V, W], U) - \tilde{g}([\varphi W, V], U). \quad (6.5)
\end{aligned}$$

Next, since, we have

$$\tilde{g}([U, \varphi V], W) = \tilde{g}(\varphi[U, \varphi V], \varphi W) + \tilde{g}(\omega[U, \varphi V], \omega W),$$

substitution the above equations into (6.5) gives us

$$\begin{aligned}
2\tilde{g}((\nabla'_U \varphi)V, W) &= \tilde{g}(\nabla_{\varphi V} \varphi U, \varphi W) - \tilde{g}(\nabla_{\varphi W} \varphi U, \varphi V) \\
&+ \tilde{g}([\varphi V, \varphi W], \varphi U) + \tilde{g}(\nabla_{\varphi V}^\perp \omega U, \omega W) - \tilde{g}(\nabla_{\varphi W}^\perp \omega U, \omega V) \\
&+ \tilde{g}(\nabla_{\varphi V}^\perp \omega W - \nabla_{\varphi W}^\perp \omega V, \omega U) + V\tilde{g}(U, \varphi W) - W\tilde{g}(U, \varphi V) \\
&+ \tilde{g}([U, V], \varphi W) - \tilde{g}([U, W], \varphi V) + \tilde{g}(\varphi[U, \varphi V], \varphi W) \\
&+ \tilde{g}(\omega[U, \varphi V], \omega W) - \tilde{g}(\varphi[U, \varphi W], \varphi V) - \tilde{g}(\omega[U, \varphi W], \omega V) \\
&+ \tilde{g}(\varphi[W, \varphi V], \varphi U) + \tilde{g}(\omega[W, \varphi V], \omega U) - \tilde{g}(\varphi[V, \varphi W], \varphi U) \\
&- \tilde{g}(\omega[V, \varphi W], \omega U). \quad (6.5)
\end{aligned}$$

If we put

$$(6.7) \quad T(U, V) = \nabla_{\varphi U}^\perp \omega V - \omega[\varphi U, V],$$

the equation (6.6) is written as

$$\begin{aligned}
2\tilde{g}((\nabla'_U \varphi)V, W) &= \tilde{g}(\nabla_{\varphi V} \varphi U, \varphi W) - \tilde{g}(\nabla_{\varphi W} \varphi U, \varphi V) + \\
&+ \tilde{g}([\varphi V, \varphi W], \varphi U) + \tilde{g}(T(V, U), \omega W) - \tilde{g}(T(W, U), \omega V) + \\
&+ \tilde{g}(T(V, W) - T(W, V), \omega U) + V\tilde{g}(U, \varphi W) - W\tilde{g}(U, \varphi V) + \\
&+ \tilde{g}([U, V], \varphi W) - \tilde{g}([U, W], \varphi V) + \tilde{g}(\varphi[U, \varphi V], \varphi W) - \\
&- \tilde{g}(\varphi[U, \varphi W], \varphi V) - \tilde{g}(\varphi[\varphi V, W], \varphi U) - \tilde{g}(\varphi[V, \varphi W], \varphi U). \quad (6.8)
\end{aligned}$$

Since, our manifold is an l.c.K.-one, we have from (1.2)

$$\begin{aligned}
U\tilde{g}(\varphi V, W) &= U\tilde{g}(JV, W) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U JV, W) + \tilde{g}(JV, \tilde{\nabla}_U W) \\
&= -\tilde{g}(\alpha^\sharp, V)\tilde{g}(\varphi U, W) + \tilde{g}(\beta^\sharp, W)\tilde{g}(U, V) + \tilde{g}(\alpha^\sharp, W)\tilde{g}(\varphi U, V) \\
&- \tilde{g}(\beta^\sharp, V)\tilde{g}(U, W) - \tilde{g}(\nabla_U V, \varphi W) - \tilde{g}(\sigma(U, V), \omega W) \\
&+ \tilde{g}(\nabla_U W, \varphi V) + \tilde{g}(\sigma(U, W), \omega V).
\end{aligned}$$

By virtue of the above equation, we have

$$\begin{aligned}
V\tilde{g}(\varphi W, U) - W\tilde{g}(\varphi V, U) &= -\tilde{g}(\alpha^\sharp, W)\tilde{g}(\varphi V, U) + \\
&+ \tilde{g}(\alpha^\sharp, V)\tilde{g}(\varphi W, U) + 2\tilde{g}(\alpha^\sharp, U)\tilde{g}(\varphi V, W) - \tilde{g}(\beta^\sharp, W)\tilde{g}(V, U) + \\
&+ \tilde{g}(\beta^\sharp, V)\tilde{g}(W, U) - \tilde{g}([V, W], \varphi U) + \tilde{g}(\nabla_V U, \varphi W) - \\
&- \tilde{g}(\nabla_W U, \varphi V) + \tilde{g}(\sigma(V, U), \omega W) - \tilde{g}(\sigma(W, U), \omega V).
\end{aligned}$$

Using the above equation, the equation (6.8) is written as

$$\begin{aligned}
2\tilde{g}((\nabla'_U \varphi)V, W) &= \tilde{g}(\nabla_{\varphi V} \varphi U, \varphi W) - \tilde{g}(\nabla_{\varphi W} \varphi U, \varphi V) \\
&+ \tilde{g}([\varphi V, \varphi W], \varphi U) + \tilde{g}(T(V, U), \omega W) - \tilde{g}(T(W, U), \omega V) \\
&+ \tilde{g}(T(V, W) - T(W, V), \omega U) - \tilde{g}(\alpha^\sharp, W)\tilde{g}(\varphi V, U) \\
&+ \tilde{g}(\alpha^\sharp, V)\tilde{g}(\varphi W, U) + 2\tilde{g}(\alpha^\sharp, U)\tilde{g}(\varphi V, W) - \tilde{g}(\beta^\sharp, W)\tilde{g}(V, U) \\
&+ \tilde{g}(\beta^\sharp, V)\tilde{g}(W, U) - \tilde{g}([V, W], \varphi U) + \tilde{g}(\nabla_V U, \varphi W) \\
&- \tilde{g}(\nabla_W U, \varphi V) + \tilde{g}(\sigma(V, U), \omega W) - \tilde{g}(\sigma(W, U), \omega V) \\
&+ \tilde{g}(\varphi[U, \varphi V], \varphi W) + \tilde{g}([U, V], \varphi W) - \tilde{g}([U, W], \varphi V) \\
&+ \tilde{g}(\varphi[\varphi W, U], \varphi V) - \tilde{g}(\varphi[\varphi V, W] - \tilde{g}(\varphi[V, \varphi W], \varphi U). \quad (6.9)
\end{aligned}$$

Moreover, using the following equation

$$\tilde{g}([V, W], \varphi U) = -\tilde{g}(\varphi[V, W], U) = -\tilde{g}(\varphi^2[V, W], \varphi U),$$

we have

$$\begin{aligned}
\tilde{g}([\varphi V, \varphi W] + \varphi^2[V, W] - \varphi[\varphi V, W] - \varphi[V, \varphi W], \varphi U) &= \\
&= \tilde{g}([\varphi, \varphi](V, W), \varphi U).
\end{aligned}$$

Thus (6.9) becomes

$$\begin{aligned}
2\tilde{g}((\nabla'_U \varphi)V, W) &= \tilde{g}(\nabla_{\varphi V} \varphi U, \varphi W) - \tilde{g}(\nabla_{\varphi W} \varphi U, \varphi V) \\
&+ \tilde{g}([\varphi, \varphi](V, W), \varphi U) + \tilde{g}(T(V, U), \omega W) - \tilde{g}(T(W, U), \omega V) \\
&+ \tilde{g}(T(V, W) - T(W, V), \omega U) - \tilde{g}(\alpha^\sharp, W)\tilde{g}(\varphi V, U) \\
&+ \tilde{g}(\alpha^\sharp, V)\tilde{g}(\varphi W, U) + 2\tilde{g}(\alpha^\sharp, U)\tilde{g}(\varphi V, W) - \tilde{g}(\beta^\sharp, W)\tilde{g}(V, U) \\
&+ \tilde{g}(\alpha^\sharp, V)\tilde{g}(\varphi W, U) + \tilde{g}(\alpha^\sharp, V)\tilde{g}(\varphi W, U) + \tilde{g}(\nabla_V U, \varphi W) \\
&- \tilde{g}(\nabla_W U, \varphi V) + \tilde{g}(\sigma(V, U), \omega W) - \tilde{g}(\sigma(W, U), \omega V) \\
&+ \tilde{g}(\varphi[U, \varphi V], \varphi W) - \tilde{g}(\varphi[U, \varphi W], \varphi V) \\
&+ \tilde{g}([U, V], \varphi W) - \tilde{g}([U, W], \varphi V). \quad (6.10)
\end{aligned}$$

Next, in (6.10), using $\tilde{g}(\varphi^2 \nabla_U V, \varphi W) = -\tilde{g}(\nabla_U V, \varphi W)$, we have

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\nabla_{\varphi V} \varphi U + \nabla_V U + \varphi[U, \varphi V] + [U, V], \varphi W) &= \\
&= \tilde{g}((\nabla'_{\varphi V} \varphi)U + \varphi(\nabla'_U \varphi)V, \varphi W).
\end{aligned}$$

Thus, by virtue of the above equation, the equation (6.10) is written as

$$\begin{aligned}
2\tilde{g}((\nabla'_U\varphi)V, W) &= \tilde{g}([\varphi, \varphi](V, W), \varphi U) + \\
&\quad + \tilde{g}(T(V, U), \omega W) - \tilde{g}(T(W, U), \omega V) + \\
&\quad + \tilde{g}(T(V, W) - T(W, V), \omega U) - \tilde{g}(\alpha^\sharp, W)\tilde{g}(\varphi V, U) + \\
&\quad + \tilde{g}(\alpha^\sharp, V)\tilde{g}(\varphi W, U) + 2g(\alpha^\sharp, U)\tilde{g}(\varphi V, W) - \\
&\quad - \tilde{g}(\beta^\sharp, W)\tilde{g}(V, U) + \tilde{g}(\beta^\sharp, V)\tilde{g}(W, U) + \tilde{g}(\sigma(V, U), \omega W) - \\
&\quad - \tilde{g}(\sigma(W, U), \omega V) + \tilde{g}((\nabla'_{\varphi V}\varphi)U + \varphi(\nabla'_U\varphi)V, \varphi W) - \\
&\quad - \tilde{g}((\nabla'_{\varphi W}\varphi)U + \varphi(\nabla'_U\varphi)W, \varphi V). \quad (6.11)
\end{aligned}$$

On the other hand, we have from (3.3)_(ii) and (4.3)

$$\begin{aligned}
2d\omega(U, V) &= (\nabla'_U\omega)V - (\nabla'_V\omega)U = \\
&= \nabla_U^\perp\omega V - \nabla_V^\perp\omega U - \omega[U, V].
\end{aligned}$$

From this equation, we obtain

$$(6.12) \quad 2d\omega(\varphi U, V) = \nabla_{\varphi U}^\perp\omega V - \omega[\varphi U, V] = T(U, V).$$

Using the equation (6.12), the equation (6.11) becomes

$$\begin{aligned}
2\tilde{g}((\nabla'_U\varphi)V, W) &= \tilde{g}([\varphi, \varphi](V, W), \varphi U) + \\
&\quad + 2\tilde{g}(d\omega(\varphi V, U), \omega W) - 2\tilde{g}(d\omega(\varphi W, U), \omega V) + 2\tilde{g}(d\omega(\varphi V, W) - \\
&\quad - d\omega(\varphi W, V), \omega U) - \tilde{g}(\alpha^\sharp, W)\tilde{g}(\varphi V, U) + \tilde{g}(\alpha^\sharp, V)\tilde{g}(\varphi W, U) + \\
&\quad + 2g(\alpha^\sharp, U)\tilde{g}(\varphi V, W) - \tilde{g}(\beta^\sharp, W)\tilde{g}(V, U) + \tilde{g}(\beta^\sharp, V)\tilde{g}(W, U) + \\
&\quad + \tilde{g}(\sigma(V, U), \omega W) - \tilde{g}(\sigma(W, U), \omega V) + \tilde{g}((\nabla'_{\varphi V}\varphi)U + \\
&\quad + \varphi(\nabla'_U\varphi)V, \varphi W) - \tilde{g}((\nabla'_{\varphi W}\varphi)U + \varphi(\nabla'_U\varphi)W, \varphi V). \quad (6.13)
\end{aligned}$$

Next, since we have

$$\begin{aligned}
&\tilde{g}([\varphi, \varphi](V, W), \varphi U) - \tilde{g}(\alpha^\sharp, W)\tilde{g}(\varphi V, U) + \tilde{g}(\alpha^\sharp, V)\tilde{g}(\varphi W, U) \\
&= \tilde{g}([\varphi, \varphi](V, W) + \tilde{g}(\alpha^\sharp, W)V - \tilde{g}(\alpha^\sharp, V)W, \varphi U),
\end{aligned}$$

we get

$$\begin{aligned}
2\tilde{g}((\nabla'_U\varphi)V, W) &= \\
&= \tilde{g}([\varphi, \varphi](V, W) + \tilde{g}(\alpha^\sharp, W)V - \tilde{g}(\alpha^\sharp, V)W, \varphi U) \\
&\quad - 2\tilde{g}\left(d\omega(\varphi W, U) + \frac{1}{2}\sigma(W, U), \omega V\right) \\
&\quad\quad + 2\tilde{g}\left(d\omega(\varphi V, U) + \frac{1}{2}\sigma(V, U), \omega W\right) \\
&+ 2\tilde{g}\left((d\omega(\varphi V, W) + \frac{1}{2}\sigma(V, W)) - (d\omega(\varphi W, V) + \frac{1}{2}\sigma(V, W)), \omega U\right) \\
&\quad - \tilde{g}(\beta^\sharp, W)\tilde{g}(V, U) + \tilde{g}(\beta^\sharp, V)\tilde{g}(W, U) \\
&\quad + \tilde{g}\left((\nabla'_{\varphi V}\varphi)U + \varphi(\nabla'_U\varphi)V - \tilde{g}(\alpha^\sharp, U)V, \varphi W\right) \\
&\quad - \tilde{g}\left((\nabla'_{\varphi W}\varphi)U + \varphi(\nabla'_U\varphi)W - \tilde{g}(\alpha^\sharp, U)W, \varphi V\right). \quad (6.14)
\end{aligned}$$

Next, we get

$$\tilde{g}(\beta^\sharp, V)\tilde{g}(U, W) = -\tilde{g}(\alpha_1^\sharp, \varphi V)\tilde{g}(U, W) - \tilde{g}(\alpha_2^\sharp, \omega V)\tilde{g}(U, W).$$

Using the above equation, the equation (6.14) is written as

$$\begin{aligned}
2\tilde{g}((\nabla'_U\varphi)V, W) &= \\
&= \tilde{g}([\varphi, \varphi](V, W) + \tilde{g}(\alpha^\sharp, W)V - \tilde{g}(\alpha^\sharp, V)W, \varphi U) \\
&\quad - 2\tilde{g}\left(d\omega(\varphi W, U) + \frac{1}{2}\sigma(W, U) + \frac{1}{2}\tilde{g}(W, U)\alpha_2^\sharp, \omega V\right) \\
&\quad + 2\tilde{g}\left(d\omega(\varphi V, U) + \frac{1}{2}\sigma(V, U) + \frac{1}{2}\tilde{g}(V, U)\alpha_2^\sharp, \omega W\right) \\
&+ 2\tilde{g}\left((d\omega(\varphi V, W) + \frac{1}{2}\sigma(V, W) + \frac{1}{2}\tilde{g}(V, W)\alpha_2^\sharp) \right. \\
&\quad\quad \left. - (d\omega(\varphi W, V) + \frac{1}{2}\sigma(W, V) + \frac{1}{2}\tilde{g}(W, V)\alpha_2^\sharp), \omega U\right) \\
&\quad + \tilde{g}\left((\nabla'_{\varphi V}\varphi)U + \varphi(\nabla'_U\varphi)V - \tilde{g}(\alpha^\sharp, U)V + \tilde{g}(U, V)\alpha_1^\sharp, \varphi W\right) \\
&- \tilde{g}\left((\nabla'_{\varphi W}\varphi)U + \varphi(\nabla'_U\varphi)W - \tilde{g}(\alpha^\sharp, U)W + \tilde{g}(U, W)\alpha_1^\sharp, \varphi V\right). \quad (6.15)
\end{aligned}$$

Now, we put

$$(6.16) \quad A(U, V) = d\omega(\varphi U, V) + \frac{1}{2}\{\sigma(U, V) + \tilde{g}(U, V)\alpha_2^\sharp\}.$$

Then, the equation (6.15) is expressed as

$$\begin{aligned} 2\tilde{g}((\nabla'_U \varphi)V, W) = & \\ & \tilde{g}([\varphi, \varphi](V, W) + \tilde{g}(\alpha^\sharp, W)V - \tilde{g}(\alpha^\sharp, V)W, \varphi U) \\ & - 2\tilde{g}(A(W, U), \omega V) + 2\tilde{g}(A(V, U), \omega W) \\ & + 2\tilde{g}(A(V, W) - A(W, V), \omega U) \\ & + \tilde{g}((\nabla'_{\varphi V} \varphi)U + \varphi(\nabla'_U \varphi)V - \tilde{g}(\alpha^\sharp, U)V + \tilde{g}(U, V)\alpha_1^\sharp, \varphi W) \\ & - \tilde{g}((\nabla'_{\varphi W} \varphi)U + \varphi(\nabla'_U \varphi)W - \tilde{g}(\alpha^\sharp, U)W + \tilde{g}(U, W)\alpha_1^\sharp, \varphi V). \end{aligned} \quad (6.17)$$

Now, let our submanifold be almost contact anti-holomorphic. Then the \mathcal{D} -mean curvature vector field $H_{\mathcal{D}}$ satisfies (5.2). Hence, the tensor field $A(U, V)$ is expressed by

$$(6.18) \quad A(U, V) = -\tilde{g}(\varphi U, \varphi V)H_{\mathcal{D}} + \frac{1}{2}\{\sigma(U, V) + \tilde{g}(U, V)\alpha_2^\sharp\},$$

and $A(U, V)$ is symmetric with respect to U and V .

Substituting (6.18) into (6.17), we obtain

$$\begin{aligned} 2\tilde{g}((\nabla'_U \varphi)V, W) = & \\ & \tilde{g}([\varphi, \varphi](V, W) + \tilde{g}(\alpha^\sharp, W)V - \tilde{g}(\alpha^\sharp, V)W, \varphi U) \\ & + 2\tilde{g}(\tilde{g}(\varphi W, \varphi U)H_{\mathcal{D}} - \frac{1}{2}\{\sigma(W, U) + \tilde{g}(W, U)\alpha_2^\sharp\}, \omega V) \\ & - 2\tilde{g}(\tilde{g}(\varphi V, \varphi U)H_{\mathcal{D}} - \frac{1}{2}\{\sigma(V, U) + \tilde{g}(V, U)\alpha_2^\sharp\}, \omega W) \\ & + \tilde{g}((\nabla'_{\varphi V} \varphi)U + \varphi(\nabla'_U \varphi)V - \tilde{g}(\alpha^\sharp, U)V + \tilde{g}(U, V)\alpha_1^\sharp, \varphi W) \\ & - \tilde{g}((\nabla'_{\varphi W} \varphi)U + \varphi(\nabla'_U \varphi)W - \tilde{g}(\alpha^\sharp, U)W + \tilde{g}(U, W)\alpha_1^\sharp, \varphi V). \end{aligned} \quad (6.19)$$

Now, we have from (3.4)

$$\begin{aligned} (\nabla'_{\varphi V} \varphi)U = & -\tilde{g}(\alpha_1^\sharp, U)\varphi^2 V + \tilde{g}(U, \varphi V)\beta_1^\sharp - \tilde{g}(\varphi V, \varphi U)\alpha_1^\sharp \\ & - \tilde{g}(\beta_1^\sharp, U)\varphi V + B\sigma(U, \varphi V) + A_{\omega U}\varphi V \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\varphi((\nabla'_U \varphi)V) &= -\tilde{g}(\alpha_1^\sharp, V)\varphi^2 U + \tilde{g}(U, V)\varphi\beta_1^\sharp + \tilde{g}(\varphi U, V)\varphi\alpha_1^\sharp \\ &\quad - \tilde{g}(\beta_1^\sharp, V)\varphi U + \varphi A_{\omega V} U,\end{aligned}$$

where we used $\varphi B = 0$.

Using the above two equations we have

$$\begin{aligned}\tilde{g}\left((\nabla'_{\varphi V} \varphi)U + \varphi(\nabla'_U \varphi)V - \tilde{g}(\alpha^\sharp, U)V + \tilde{g}(U, V)\alpha_1^\sharp, \varphi W\right) &= \\ &= \tilde{g}(\beta_1^\sharp, \varphi W)\tilde{g}(\varphi V, U) - \tilde{g}(\alpha_1^\sharp, \varphi W)\tilde{g}(\varphi V, \varphi U) \\ &\quad - \tilde{g}(\beta_1^\sharp, U)\tilde{g}(\varphi V, \varphi W) + \tilde{g}(\sigma(\varphi V, \varphi W), \omega U) \\ &\quad - \tilde{g}(\alpha_1^\sharp, V)\tilde{g}(\varphi U, W) + \tilde{g}(\varphi\beta_1^\sharp, \varphi W)\tilde{g}(U, V) \\ &\quad + \tilde{g}(\varphi\alpha_1^\sharp, \varphi W)\tilde{g}(\varphi U, V) - \tilde{g}(\beta_1^\sharp, V)\tilde{g}(\varphi U, \varphi W) \\ &\quad - \tilde{g}(A_{\omega V} U, \varphi^2 W) + \tilde{g}(\alpha_1^\sharp, \varphi W)\tilde{g}(U, V).\end{aligned}$$

Thus we have

$$\begin{aligned}\tilde{g}\left((\nabla'_{\varphi V} \varphi)U + \varphi(\nabla'_U \varphi)V - \tilde{g}(\alpha^\sharp, U)V + \tilde{g}(U, V)\alpha_1^\sharp, \varphi W\right) &- \\ - \tilde{g}\left((\nabla'_{\varphi W} \varphi)U + \varphi(\nabla'_U \varphi)W - \tilde{g}(\alpha^\sharp, U)W + \tilde{g}(U, W)\alpha_1^\sharp, \varphi V\right) &= \\ &= \tilde{g}(\beta_1^\sharp, \varphi W)\tilde{g}(\varphi V, U) - \tilde{g}(\beta_1^\sharp, \varphi V)\tilde{g}(\varphi W, U) \\ - \tilde{g}(\alpha_1^\sharp, \varphi W)\tilde{g}(\varphi V, \varphi U) + \tilde{g}(\alpha_1^\sharp, \varphi V)\tilde{g}(\varphi W, \varphi U) & \\ - \tilde{g}(\alpha_1^\sharp, V)\tilde{g}(\varphi U, W) + \tilde{g}(\alpha_1^\sharp, W)\tilde{g}(\varphi U, V) & \\ + \tilde{g}(\varphi\beta_1^\sharp, \varphi W)\tilde{g}(U, V) - \tilde{g}(\varphi\beta_1^\sharp, \varphi V)\tilde{g}(U, W) & \\ - \tilde{g}(\varphi\alpha_1^\sharp, \varphi V)\tilde{g}(\varphi U, W) + \tilde{g}(\varphi\alpha_1^\sharp, \varphi W)\tilde{g}(\varphi U, V) & \\ - \tilde{g}(\beta_1^\sharp, V)\tilde{g}(\varphi U, \varphi W) + \tilde{g}(\beta_1^\sharp, W)\tilde{g}(\varphi U, \varphi V) & \\ - \tilde{g}(A_{\omega V} U, \varphi^2 W) + \tilde{g}(A_{\omega W} U, \varphi^2 V) & \\ + \tilde{g}(\alpha_1^\sharp, \varphi W)\tilde{g}(U, V) - \tilde{g}(\alpha_1^\sharp, \varphi V)\tilde{g}(U, W). & \quad (6.20)\end{aligned}$$

Since, $\beta_1^\sharp = \varphi\alpha_1^\sharp + B\alpha_2^\sharp$, we have $\tilde{g}(\beta_1^\sharp, \varphi W) = \tilde{g}(\varphi\alpha_1^\sharp, \varphi W)$.

So, we have

$$\begin{aligned}
& \tilde{g}\left((\nabla'_{\varphi V}\varphi)U + \varphi(\nabla'_U\varphi)V - \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. - \tilde{g}(\alpha^\sharp, U)V + \tilde{g}(U, V)\alpha_1^\sharp, \varphi W\right) - \\
& - \tilde{g}\left((\nabla'_{\varphi W}\varphi)U + \varphi(\nabla'_U\varphi)W - \tilde{g}(\alpha^\sharp, U)W + \tilde{g}(U, W)\alpha_1^\sharp, \varphi V\right) \\
& = -\tilde{g}(\alpha_1^\sharp, \varphi W)\tilde{g}(\varphi V, \varphi U) + \tilde{g}(\alpha_1^\sharp, \varphi V)\tilde{g}(\varphi W, \varphi U) \\
& \quad - \tilde{g}(\alpha_1^\sharp, V)\tilde{g}(\varphi U, W) + \tilde{g}(\alpha_1^\sharp, W)\tilde{g}(\varphi U, V) \\
& \quad + \tilde{g}(\varphi\beta_1^\sharp, \varphi W)\tilde{g}(U, V) - \tilde{g}(\varphi\beta_1^\sharp, \varphi V)\tilde{g}(U, W) \\
& \quad - \tilde{g}(\beta_1^\sharp, V)\tilde{g}(\varphi U, \varphi W) + \tilde{g}(\beta_1^\sharp, W)\tilde{g}(\varphi U, \varphi V) \\
& \quad - \tilde{g}(A_{\omega V}U, \varphi^2W) + \tilde{g}(A_{\omega W}U, \varphi^2V) \\
& \quad + \tilde{g}(\alpha_1^\sharp, \varphi W)\tilde{g}(U, V) - \tilde{g}(\alpha_1^\sharp, \varphi V)\tilde{g}(U, W). \quad (6.21)
\end{aligned}$$

Moreover, we have $\varphi\beta_1^\sharp = \varphi(\varphi\alpha_1^\sharp + B\alpha_2^\sharp) = \varphi^2\alpha_1^\sharp$. From this we get

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\varphi\beta_1^\sharp, \varphi W)\tilde{g}(U, V) &= \tilde{g}(\varphi^2\alpha_1^\sharp, \varphi W) = \\
&= \tilde{g}(\varphi\alpha_1^\sharp, W) = -\tilde{g}(\alpha_1^\sharp, \varphi W).
\end{aligned}$$

Using this, we obtain

$$\begin{aligned}
& \tilde{g}\left((\nabla'_{\varphi V}\varphi)U + \varphi(\nabla'_U\varphi)V - \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. - \tilde{g}(\alpha^\sharp, U)V + \tilde{g}(U, V)\alpha_1^\sharp, \varphi W\right) - \\
& - \tilde{g}\left((\nabla'_{\varphi W}\varphi)U + \varphi(\nabla'_U\varphi)W - \tilde{g}(\alpha^\sharp, U)W + \tilde{g}(U, W)\alpha_1^\sharp, \varphi V\right) \\
& = -\tilde{g}(\alpha_1^\sharp, \varphi W)\tilde{g}(\varphi V, \varphi U) + \tilde{g}(\alpha_1^\sharp, \varphi V)\tilde{g}(\varphi W, \varphi U) \\
& \quad - \tilde{g}(\alpha_1^\sharp, V)\tilde{g}(\varphi U, W) + \tilde{g}(\alpha_1^\sharp, W)\tilde{g}(\varphi U, V) \\
& \quad - \tilde{g}(\beta_1^\sharp, V)\tilde{g}(\varphi U, \varphi W) + \tilde{g}(\beta_1^\sharp, W)\tilde{g}(\varphi U, \varphi V) \\
& \quad - \tilde{g}(A_{\omega V}U, \varphi^2W) + \tilde{g}(A_{\omega W}U, \varphi^2V) \quad (6.22)
\end{aligned}$$

Now, we have

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\beta_1^\sharp, W) &= \tilde{g}(\varphi\alpha_1^\sharp, W) + \tilde{g}(B\alpha_2^\sharp, W) = \\ &= -\tilde{g}(\alpha_1^\sharp, \varphi W) - \tilde{g}(\alpha_2^\sharp, \omega W).\end{aligned}$$

So, we have

$$\begin{aligned}\{\tilde{g}(\alpha_1^\sharp, \varphi V) + \tilde{g}(\alpha_1^\sharp, \varphi W) + \tilde{g}(\alpha_2^\sharp, \omega W)\}\tilde{g}(\varphi V, \varphi U) = \\ = 2\tilde{g}(\alpha_1^\sharp, \varphi V)\tilde{g}(\varphi W, \varphi U) + \tilde{g}(\alpha_2^\sharp, \omega V)\tilde{g}(\varphi W, \varphi U).\end{aligned}$$

Using the above equation, we obtain

$$\begin{aligned}\tilde{g}\left((\nabla'_{\varphi V}\varphi)U + \varphi(\nabla'_U\varphi)V - \right. \\ \left. - \tilde{g}(\alpha^\sharp, U)V + \tilde{g}(U, V)\alpha_1^\sharp, \varphi W\right) - \\ - \tilde{g}\left((\nabla'_{\varphi W}\varphi)U + \varphi(\nabla'_U\varphi)W - \tilde{g}(\alpha^\sharp, U)W + \tilde{g}(U, W)\alpha_1^\sharp, \varphi V\right) \\ = 2\tilde{g}(\alpha_1^\sharp, \varphi V)\tilde{g}(\varphi W, \varphi U) - 2\tilde{g}(\alpha_1^\sharp, \varphi W)\tilde{g}(\varphi V, \varphi U) \\ + \tilde{g}(\alpha_2^\sharp, \omega V)\tilde{g}(\varphi W, \varphi U) - \tilde{g}(\alpha_2^\sharp, \omega W)\tilde{g}(\varphi V, \varphi U) \\ - \tilde{g}(\alpha_1^\sharp, V)\tilde{g}(\varphi U, W) + \tilde{g}(\alpha_1^\sharp, W)\tilde{g}(\varphi U, V) \\ - \tilde{g}(A_{\omega V}\varphi^2W - A_{\omega W}\varphi^2V, U).\end{aligned}\quad (6.23)$$

Thus (6.19) is written as

$$\begin{aligned}2\tilde{g}((\nabla'_U\varphi)V, W) &= \tilde{g}([\varphi, \varphi](V, W), \varphi U) \\ &+ 2\tilde{g}(\alpha_1^\sharp, W)\tilde{g}(V, \varphi U) - 2\tilde{g}(\alpha_1^\sharp, V)\tilde{g}(W, \varphi U) \\ &+ 2\tilde{g}\left(\tilde{g}(\varphi W, \varphi U)H_{\mathcal{D}} - \frac{1}{2}\{\sigma(W, U) + \tilde{g}(W, U)\alpha_2^\sharp\}, \omega V\right) \\ &- 2\tilde{g}\left(\tilde{g}(\varphi V, \varphi U)H_{\mathcal{D}} - \frac{1}{2}\{\sigma(V, U) + \tilde{g}(V, U)\alpha_2^\sharp\}, \omega W\right) \\ &+ 2\tilde{g}(\alpha_1^\sharp, \varphi V)\tilde{g}(\varphi W, \varphi U) - 2\tilde{g}(\alpha_1^\sharp, \varphi W)\tilde{g}(\varphi V, \varphi U) \\ &+ \tilde{g}(\alpha_2^\sharp, \omega V)\tilde{g}(\varphi W, \varphi U) - \tilde{g}(\alpha_2^\sharp, \omega W)\tilde{g}(\varphi V, \varphi U) \\ &- \tilde{g}(A_{\omega V}\varphi^2W - A_{\omega W}\varphi^2V, U).\end{aligned}\quad (6.24)$$

Moreover using (3.5),

$$\tilde{g}(\beta_1^\sharp, W) = -\tilde{g}(\alpha_1^\sharp, \varphi W) - \tilde{g}(\alpha_2^\sharp, \omega W)$$

we have from (6.24)

$$\begin{aligned}
& 2\left\{\tilde{g}(\alpha_1^\sharp, \varphi V)\tilde{g}(U, W) - \tilde{g}(\alpha_1^\sharp, \varphi W)\tilde{g}(U, V) + \right. \\
& \quad \left. + \tilde{g}(\alpha_2^\sharp, \omega V)\tilde{g}(U, W) - \tilde{g}(\alpha_2^\sharp, \omega W)\tilde{g}(U, V)\right\} = \\
& = \tilde{g}([\varphi, \varphi](V, W), \varphi U) + 2\tilde{g}\left(\tilde{g}(\varphi W, \varphi U)H_{\mathcal{D}} - \frac{3}{2}\sigma(W, U), \omega V\right) \\
& \quad - 2\tilde{g}\left(\tilde{g}(\varphi V, \varphi U)H_{\mathcal{D}} - \frac{3}{2}\sigma(V, U), \omega W\right) \\
& \quad + 2\tilde{g}(\alpha_1^\sharp, \varphi V)\tilde{g}(\varphi W, \varphi U) - 2\tilde{g}(\alpha_1^\sharp, \varphi W)\tilde{g}(\varphi V, \varphi U) \\
& \quad - \tilde{g}(\alpha_2^\sharp, \omega V)\{\tilde{g}(W, U) - \tilde{g}(\varphi W, \varphi U)\} \\
& \quad + \tilde{g}(\alpha_2^\sharp, \omega W)\{\tilde{g}(V, U) - \tilde{g}(\varphi V, \varphi U)\} \\
& \quad - \tilde{g}(A_{\omega V}\varphi^2 W - A_{\omega W}\varphi^2 V, U). \quad (6.25)
\end{aligned}$$

Since we know $\tilde{g}(V, U) = \tilde{g}(\varphi V, \varphi U) + \tilde{g}(\omega V, \omega U)$, (6.25) becomes

$$\begin{aligned}
& 2\left\{\tilde{g}(\alpha_1^\sharp, \varphi V)\tilde{g}(U, W) - \tilde{g}(\alpha_1^\sharp, \varphi W)\tilde{g}(U, V) \right. \\
& \quad \left. + \tilde{g}(\alpha_2^\sharp, \omega V)(\tilde{g}(U, W) - \tilde{g}(\alpha_2^\sharp, \omega W)\tilde{g}(U, V))\right\} = \\
& = \tilde{g}([\varphi, \varphi](V, W), \varphi U) \\
& \quad + 2\tilde{g}\left(\tilde{g}(\varphi W, \varphi U)H_{\mathcal{D}} - \frac{3}{2}\sigma(W, U), \omega V\right) \\
& \quad - 2\tilde{g}\left(\tilde{g}(\varphi V, \varphi U)H_{\mathcal{D}} - \frac{3}{2}\sigma(V, U), \omega W\right) \\
& \quad - \tilde{g}(\alpha_2^\sharp, \omega V)\tilde{g}(\omega W, \omega U) + \tilde{g}(\alpha_2^\sharp, \omega W)\tilde{g}(\omega V, \omega U). \quad (6.26)
\end{aligned}$$

That is, we obtain

$$\begin{aligned}
& \tilde{g}\left(\varphi[\varphi, \varphi](V, W) + 2\{\tilde{g}(\alpha_2^\sharp, \omega V)W - \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. - \tilde{g}(\alpha_2^\sharp, \omega W)V\}, U\right) = \\
& = 2\tilde{g}\left(\tilde{g}(\varphi W, \varphi U)H_{\mathcal{D}} - \frac{3}{2}\sigma(U, W) - \frac{1}{2}\sigma(U, \varphi^2 W) + \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. + \tilde{g}(\alpha_1^\sharp, \varphi W)\omega U + \frac{1}{2}\tilde{g}(\alpha_2^\sharp, \omega W)\omega U, \omega V\right) \\
& - 2\tilde{g}\left(\tilde{g}(\varphi V, \varphi U)H_{\mathcal{D}} - \frac{3}{2}\sigma(U, V) - \frac{1}{2}\sigma(U, \varphi^2 V) + \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. + \tilde{g}(\alpha_1^\sharp, \varphi V)\omega U + \frac{1}{2}\tilde{g}(\alpha_2^\sharp, \omega V)\omega U, \omega W\right). \quad (6.27)
\end{aligned}$$

Thus we have

Theorem 6.1. *In an almost contact anti-holomorphic submanifold in an l.c.K.-manifold, the \mathcal{D} -mean curvature vector field $H_{\mathcal{D}}$ satisfies*

$$\begin{aligned}
& \tilde{g}\left(\tilde{g}(\varphi V, \varphi U)H_{\mathcal{D}} - \frac{3}{2}\sigma(V, U) - \frac{1}{2}\sigma(\varphi^2 V, U) + \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. + \tilde{g}(\alpha_1^\sharp, \varphi V)\omega U + \frac{1}{2}\tilde{g}(\alpha_2^\sharp, \omega V)\omega U, \omega W\right) = \\
& = \tilde{g}\left(\tilde{g}(\varphi W, \varphi U)H_{\mathcal{D}} - \frac{3}{2}\sigma(W, U) - \frac{1}{2}\sigma(\varphi^2 W, U) + \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. + \tilde{g}(\alpha_1^\sharp, \omega W)\omega U + \frac{1}{2}\tilde{g}(\alpha_2^\sharp, \omega W)\omega U, \omega V\right) \quad (6.28)
\end{aligned}$$

if and only if the morphisms φ and ωA satisfy

$$(6.29) \quad \varphi[\varphi, \varphi](V, W) + 2\{\tilde{g}(\alpha_2^\sharp, \omega V)W - \tilde{g}(\alpha_2^\sharp, \omega W)V\} = 0$$

for any $U, V, W \in TM$.

From Theorem 6.1, we can easily obtain

Corollary 6.2. *In an almost contact anti-holomorphic submanifold in an l.c.K.-manifold which the Lee vector field α^\sharp is in \mathcal{D}^\perp , the \mathcal{D} -mean curvature vector field $H_{\mathcal{D}}$ satisfies (6.28) if and only if the shape operator A satisfies*

$$(6.30) \quad \varphi[\varphi, \varphi](V, W) = 0$$

for any $U, V \in TM$.

Remark. In the above case, (6.28) is written as

$$\begin{aligned} \tilde{g}\left(\tilde{g}(\varphi V, \varphi U)H_{\mathcal{D}} - \frac{3}{2}\sigma(V, U) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2}\sigma(\varphi^2 V, U) + \tilde{g}(\alpha^{\sharp}, \varphi V)\omega U, W\right) = \\ = \tilde{g}\left(\tilde{g}(\varphi W, \varphi U)H_{\mathcal{D}} - \frac{3}{2}\sigma(W, U) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2}\sigma(\varphi^2 W, U) + \tilde{g}(\alpha^{\sharp}, \varphi W)\omega U, \omega V\right) \quad (6.31) \end{aligned}$$

for any $U, V, W \in TM$.

Now, we calculate $\tilde{g}(S(U, V), \varphi W)$. Using (4.1), we have

$$\begin{aligned} \tilde{g}(S(U, V), \varphi W) = \tilde{g}[\varphi, \varphi](U, V) + \\ + 2\tilde{g}\left(\{d\omega(U, V) - \frac{1}{2}\tilde{g}(\alpha^{\sharp}, U)\omega V + \frac{1}{2}\tilde{g}(\alpha^{\sharp}, V)\omega U\}, J\varphi W\right). \end{aligned}$$

On the other hand, we know $\varphi U \in \mathcal{D}$ for any $U \in TM$. So, $J\varphi U \in \mathcal{D}$. This means that

$$\tilde{g}\left(\{d\omega(U, V) - \frac{1}{2}\tilde{g}(\alpha^{\sharp}, U)\omega V + \frac{1}{2}\tilde{g}(\alpha^{\sharp}, V)\omega U\}, J\varphi W\right) = 0.$$

From this, we have

$$(6.32) \quad \tilde{g}(S(U, V), \varphi W) = \tilde{g}([\varphi, \varphi](U, V), \varphi W),$$

that is,

$$(6.32)' \quad \varphi S(U, V) = \varphi[\varphi, \varphi](U, V)$$

for any $U, V \in TM$. Thus we have

Theorem 6.3. *In a normal almost contact anti-holomorphic submanifold in an l.c.K.-manifold, the \mathcal{D} -mean curvature vector field $H_{\mathcal{D}}$ satisfies (6.28).*

Now we assume that the submanifold is normal. Then we have from (6.32)

$$\begin{aligned} \tilde{g}\left(\tilde{g}(\varphi V, \varphi U)H_{\mathcal{D}} - \frac{3}{2}\sigma(V, U) - \frac{1}{2}\sigma(\varphi^2 V, U), \omega W\right) = \\ = \tilde{g}\left(\tilde{g}(\varphi W, \varphi U)H_{\mathcal{D}} - \frac{3}{2}\sigma(W, U) - \frac{1}{2}\sigma(\varphi^2 W, U), \omega V\right) \quad (6.33) \end{aligned}$$

for any $U, V, W \in TM$.

In (6.33), if we put $U = X, W = Y \in \mathcal{D}$ and $V \in \mathcal{D}^\perp$, then we get

$$(6.34) \quad \tilde{g}(X, Y)H_{\mathcal{D}} = \sigma(X, Y).$$

Thus we have

Theorem 6.4. *Under the same assumption with the above theorem, the \mathcal{D} -mean curvature $H_{\mathcal{D}}$ satisfies (6.34).*

By virtue of Theorem 6.4, we obtain

Theorem 6.5. *Under the same assumption with the above theorem, for a orthonormal frame $\{e_1, \dots, e_{2p}\}$ of \mathcal{D} , we have*

$$(6.35) \quad \sigma(e_i, e_j) = \delta_{ji}H_{\mathcal{D}},$$

that is,

$$(6.36) \quad \sigma(e_i, e_j) = \begin{pmatrix} H_{\mathcal{D}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & H_{\mathcal{D}} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & H_{\mathcal{D}} \end{pmatrix}.$$

This means that the distribution \mathcal{D} is totally umbilical in \tilde{M} .

Let M be normal. Then we have from (6.33)

$$\tilde{g}(\sigma(V, Z), \omega W) = \tilde{g}(\sigma(W, Z), \omega V)$$

for any $Z \in \mathcal{D}^\perp$ and $V, W \in TM$. From the above equation, we can easily have

Proposition 6.6. *A normal anti-holomorphic submanifold in an l.c.K.-manifold is mixed geodesic, that is, the second fundamental form σ satisfies $\sigma(\mathcal{D}, \mathcal{D}^\perp) = \{0\}$.*

Remark. The above proposition was proved by using the different method with Proposition 4.2.

REFERENCES

- [B1] Bejancu A. *CR-submanifolds of a Kaehler manifold I, II* // Proc. Amer. Math. Soc. — 1978. — Vol. 69. — P. 134–142; Trans. Amer. Math. Soc. — 1979. — Vol. 250. — P. 333–345.
- [B2] Bejancu A. *Geometry of CR-submanifolds* D. Reidel Publishing Company. — 1986.
- [C1] Chen B. Y. *Geometry of Submanifolds*. — Marcel Dekker. — 1973.
- [C2] Chen B. Y. *CR-submanifolds of a Kaehler manifold I, II* // J. Differential Geometry. — 1981. — Vol. 16. — P. 305–323, 493–509.

- [K] Kashiwada T. *Some properties of locally conformal Kähler manifolds* // Hokkaido Math, J. — 1979. — Vol. 8. — P. 191–198.
- [M1] Matsumoto K. *On CR-submanifolds of locally conformal Kähler manifolds I* // J. Korean Math. — 1984. — Vol. 21. — P. 49–61.
- [M2] Matsumoto K. *On CR-submanifolds of locally conformal Kähler manifolds II* // Tensor, N. S. — 1987. — Vol. 45. — P. 144–150.
- [M3] Matsumoto K. *Locally conformal Kähler manifolds and their submanifolds* // Memoriile secțiilor științifice. — 1991. — Vol. 14. — P. 1–49.
- [MS1] Matsumoto K., Şentürk Z. *Parallel morphisms in CR-submanifolds in an locally conformal Kaehler manifold*, preprint.
- [MS2] Matsumoto K., Şentürk Z. *Certain submanifolds in a locally conformal Kaehler manifold* // Bull. of the Transilvania Univ. of Brasov, 1-4 Series Math. Informatics, Physics. — III-2008. — Vol. 15(50). — P. 223–232.
- [MS3] Matsumoto K., Şentürk Z. *Pseudo-umbilical submanifolds in an locally conformal Kaehler manifold*, to appear in Sut Journal.
- [MS4] Matsumoto K., Şentürk Z. *Anti-holomorphic submanifolds with a flat normal connection in a locally conformal Kaehler manifold* // Proc. of the 43-th Symposium of Finsler Geometry. — 2008. — P. 27–30.
- [MS5] Matsumoto K., Şentürk Z. *Certain submanifolds in a locally conformal Kaehler manifold II* // Proc. of the 43-th Symposium of Finsler Geometry. — 2008. — P. 31–33.
- [V] Vaisman I. *Locally conformal almost Kähler manifolds* // Israel J, Math., — 1976. — Vol. 24. — P. 338–351.

UDC 512.662.5

Vladimir Sharko*Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kiev**E-mail: sharko@imath.kiev.ua*

Some aspect of non-commutative algebraic topology

In this paper we study crossed chain complexes. We also give applications of this theory to study Morse functions on non-simply connected smooth manifolds with boundary.

1. INTRODUCTION

Non-commutative algebraic topology investigates non-simply connected CW-complexes [1]. An important tools here are crossed modules. The purpose of this paper is to demonstrate that crossed modules occur in a very natural setting, namely if W^n is a non-simply connected manifold with a non-simply connected boundary V^{n-1} , then the second Morse number $\mathcal{M}_2(W^n)$ of W^n can be calculated using second crossed module.

2. G -CROSSED MODULES AND PROJECTIVE CROSSED COMPLEXES

By a **crossed module** we mean a pair of groups (C, G) and a homomorphism $\partial : C \rightarrow G$, together with an action of G on C which satisfies some natural conditions. More precisely:

Definition 1. A *G -crossed module* is a triple (C, ∂, G) , where C and G are groups, $\partial : C \rightarrow G$ is a homomorphism such that G acts on C from the left (the action will be denoted by gc), and the homomorphism ∂ satisfies the following conditions:

- a) $\partial(gc) = g \cdot \partial(c) \cdot g^{-1}$ for all $g \in G, c \in C$,
- b) $c \cdot d \cdot c^{-1} = \partial(c)d$ for all $c, d \in C$.

The following properties are immediate consequences of the definition:

- 1) $K = \text{Ker}\partial$ is contained in the center of C ,

© V. V. Sharko

2) $N = \text{Im}\partial$ is a normal subgroup of G .

Let $Q = G/N$. The action G on C induces a natural $\mathbb{Z}[Q]$ -module structure on the center of C so that $K = \text{Ker}\partial$ is a submodule of this module.

Moreover the action of G on C induces a structure of $\mathbb{Z}[Q]$ -module on $C^{ab} = C/[C, C]$.

Let us mention the following two obvious and important special cases of crossed modules:

- 1) C is a $\mathbb{Z}[G]$ -module (so $\partial = 0$);
- 2) C is a normal subgroup of G (so ∂ is the inclusion).

Definition 2. A *morphism* (α, β) from the crossed module (C, ∂, G) to (C', ∂', G') is a pair of group homomorphisms $\alpha : C \rightarrow C'$ and $\beta : G \rightarrow G'$ such that $\beta \cdot \partial = \partial' \cdot \alpha$ and $\alpha(gc) = \beta(g)\alpha(c)$, ($g \in G, c \in C$).

Let \mathbf{CM} denote the category of crossed modules. If $\beta = \text{Id}$ on $G = G'$, we say that α is a G -**morphism** and denote this category by \mathbf{CM}_G .

An important case of a crossed module is the so-called free crossed module defined by J.H.C. Whitehead [19].

Definition 3. A G -crossed module (C, ∂, G) is called a **free** crossed module with indexed basis $(c_{i \in I}) \subset C$ if it satisfies the following universal property: given a G' -crossed module (C', ∂', G') , an indexed subset $(c'_{i \in I}) \subset C'$, and a homomorphism $f : G \rightarrow G'$ such that

$$f(\partial(c_i)) = \partial'(c'_i)$$

for each $i \in I$, there is a unique homomorphism $g : C \rightarrow C'$ such that $g(c_i) = c'_i$ for each $i \in I$ and the pair (f, g) is a morphism of crossed modules.

The following fundamental theorem is also due to J.H.C. Whitehead [19].

Theorem. Let X be a path-connected CW-complex, and Y be a CW-complex obtained from X by attaching a two-dimensional cell. Then $\pi_2(Y, X, x)$ is a free crossed $\pi_1(X, x)$ -module with basis corresponding to the cells so attached.

Now fix a group G .

Definition 4. A G -crossed module C is said to be **projective** if it is projective in the category \mathbf{CM}_G , that is for any surjective morphism of G -crossed modules $f : A \rightarrow B$ and any $g : C \rightarrow B$ in \mathbf{CM}_G , there is an $h : C \rightarrow A$ in \mathbf{CM}_G such that $f \cdot h = g$.

Let (C, ∂, G) be a crossed module, $N = \text{Im} \partial$, $Q = G/N$, and $C^{ab} = C/[C, C]$. J. G. Ratcliffe proved that (C, ∂, G) is a projective crossed module if and only if $C^{ab} = C/[C, C]$ is a projective module $\mathbb{Z}[Q]$ -module and mapping of the two-dimensional homology groups

$$\partial_* : H_2(C) \rightarrow H_2(N)$$

induced by the homomorphism $\partial : C \rightarrow G$ is trivial [15]. The following important fact is due to M. Dyer [3].

Theorem. Let X be a connected CW-subcomplex of a connected 2-complex Y , where $\pi_1(X, x) = G$ and $x \in X$ is a base point. Then the triple $(\pi_2(Y, X, x), \partial, \pi_1(X, x))$ is a projective crossed module. Here the homomorphism $\partial : \pi_2(Y, X, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$ is taken from the exact homotopy sequence for the pair (Y, X) .

Definition 5. A **projective crossed chain complex** is a sequence of groups and homomorphisms

$$e \leftarrow \pi \xleftarrow{\partial_1} G \xleftarrow{\partial_2} C_2 \xleftarrow{\partial_3} C_3 \leftarrow \dots \xleftarrow{\partial_n} C_n$$

such that:

- a) (C_2, ∂_2, G) is a projective G -crossed module,
- b) for each $i \geq 3$ the module C_i is a projective $\mathbb{Z}[\pi]$ -module, ∂_i is a homomorphism of $\mathbb{Z}[\pi]$ -modules, ∂_2 commutes with the action of the group G and $\partial_3(C_3)$ is a $\mathbb{Z}[\pi]$ -module,
- c) $\partial_i \cdot \partial_{i+1} = 0$.

Obviously, G acts on each of C_i , $i \geq 2$.

A crossed chain complex is said to be of dimension n if $C_i = 0$ for $i > n$.

To any projective crossed chain complex (C_i, ∂_i, G) we can associate the chain complex of projective $\mathbb{Z}[\pi]$ -modules $\xleftarrow{\partial_2^{ab}} C_2^{ab} \xleftarrow{\partial_3} C_3 \leftarrow \dots \xleftarrow{\partial_n} C_n$.

3. ADDITIVE FUNCTION ON THE CATEGORY OF PROJECTIVE MODULES

Let G be a discrete group. Denote its integer group ring by $\mathbb{Z}[G]$ and the group ring over the field \mathbb{C} by $\mathbb{C}[G]$. In the group ring there exists an augmentation epimorphism: $\varepsilon : \mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z}$, ($\varepsilon : \mathbb{C}[G] \rightarrow \mathbb{C}$) acting by the rule: $\varepsilon(\sum n_i g_i) = \sum n_i$.

In the ring $\mathbb{C}[G]$ there exists an involution: $*$: $\mathbb{C}[G] \rightarrow \mathbb{C}[G]$, $(\sum n_i g_i)* = \sum \bar{n}_i g_i^{-1}$, where \bar{n} denotes the conjugation in \mathbb{C} .

We can define the trace: $tr : \mathbb{C}[G] \rightarrow \mathbb{C}$ according to the rule: $tr(\sum n_i g_i) = n_1$, where n_1 is the coefficient at $g_1 = e$, the identity of the group G .

It is obvious that tr satisfies the following conditions:

- a) tr is a \mathbb{C} -linear mapping;
- b) $tr(r_1 r_2) = tr(r_2 r_1)$;
- c) $tr(rr*) \geq 0$, and if $tr(rr*) = 0$, then $r = 0$.

Unless otherwise stated in what follows a module M over a certain associative ring with identity Λ is assumed to be a left finitely generated Λ -module.

Rings for which the rank of the free module is uniquely defined are called IBN-rings.

It is known that the group rings $\mathbb{Z}[G]$ and $\mathbb{C}[G]$ are IBN-rings. We will consider only IBN-rings.

Denote by $\mu(M)$ the minimal number of generatrices of the module M . We will assume that $\mu(M) = 0$ for zero module M . Then

$$\mu(M \oplus F_n) \leq \mu(M) + n,$$

where F_n is a free module of rank n . There are examples (of stably-free modules) when the strict inequality holds. However in general for two projective modules M and N there are no relation between $\mu(M \oplus N)$ and $\mu(M) + \mu(N)$.

Definition 6. Suppose that a function $d(P)$ is given on the category of projective Λ -modules P (not necessarily over group rings) with values in the set of nonnegative numbers \mathbb{R}_+ . Say that the function $d(P)$ is additive if the following conditions are satisfied:

- a) $d(P) = d(Q)$ if the module P is isomorphic to the module Q ;
- b) $d(P) = 0$ if and only if $P = 0$;
- c) $d(\Lambda) = 1$;

d) $d(P \oplus Q) = d(P) + d(Q)$.

An example of an additive function for projective modules over $\mathbb{Z}[G]$ with values in \mathbb{Z}_+ was constructed by E. Dyer and A. T. Vasquez[2].

Let $\pi : F_n \rightarrow P$ be an epimorphism of the free module F_n of rank n onto the projective module P over the group ring $\mathbb{Z}[G]$. Denote the basis of the module F_n by x_1, x_2, \dots, x_n . Let $s : P \rightarrow F_n$ be a homomorphism such that $\pi \cdot s = Id_P$. Then the homomorphism $e = s \cdot \pi : F_n \rightarrow F_n$ is an idempotent and determines P up to an isomorphism.

Let A be the matrix of the homomorphism e in the basis x_1, x_2, \dots, x_n , i.e., $e(x_i) = \sum_j a_{ij}x_j$, where $a_{ij} \in \mathbb{Z}[G]$. Following Dyer and Vasquez, we set $d(P) = \sum_i tr(a_{ii})$.

For projective $\mathbb{Z}[G]$ -module P the inequality $d(P) \leq \mu(P)$ is true, and the equality is realized if and only if P is a free module.

Remark 1. *By analogy, for the projective modules P over the ring $\mathbb{C}[G]$ one can construct the additive function $d(P) = \sum_i tr(a_{ii})$. This function takes values in \mathbb{R}_+ .*

The following results are obtained in [16].

Definition 7. *Let Y be the range of values of an additive function $d(P)$ defined on the category of projective modules. The function $d(P)$ is called **discrete** if there exists $\varepsilon > 0$ such that for any $y \in Y$ the only point from Y belonging to the interval $(y - \varepsilon, y + \varepsilon)$ is y .*

Definition 8. *Let $d(P)$ be an additive function on the category of projective modules. An epimorphism $f : P_1 \rightarrow M$ of a projective module P_1 is called p -minimal if for any other epimorphism $g : Q \rightarrow M$ of a projective module Q , one has that $d(P_1) \leq d(Q)$.*

In what follows, the number $d(P_1)$ will be denoted by $\mu_p(M)$.

Remark 2. *The number $\mu_p(M)$ is defined not for all modules M .*

Remark 3. *Let $\Lambda = \mathbb{C}[G]$ and let $d(P_1)$ be the additive function from Remark 3.1. Assume that $g \in G$ is an element of order k . Then the element*

$$E = \frac{1}{k}(e + g + \dots + g^{k-1}) \in \mathbb{C}[G]$$

is an idempotent. Therefore, the module $P = \mathbb{C}[G] \cdot (E)$ is a nonzero projective module such that $\mathbb{C}[G] = P \oplus Q$, where $Q = \mathbb{C}[G] \cdot (1 - E)$.

It is obvious that $d(P) = \frac{1}{k}$. Since $\epsilon(E) = 1$, the restriction of the augmentation homomorphism to the module P is an epimorphism onto the field \mathbb{C} regarded as a $\mathbb{C}[G]$ -module.

If the group G contains elements of arbitrarily large order, then it is obvious that the number $\mu_p(\mathbb{C})$ **can not** be defined.

However the following assertions hold true:

- a) if an additive function $d(P)$ on the category of projective modules is discrete, then for any module M the number $\mu_p(M)$ is defined and $\mu(M) \geq \mu_p(M)$;
- b) if P is a projective module and for a module M the number $\mu_p(M)$ is defined, then for the module $M \oplus P$ the number $\mu_p(M \oplus P)$ is also defined and $\mu_p(M \oplus P) = \mu_p(M) + d(P)$;
- c) if P is a projective module and for a module $M \oplus P$ the number $\mu_p(M \oplus P)$ is defined then for the module M the number $\mu_p(M)$ is also defined and

$$\mu_p(M) = \mu_p(M \oplus P) - d(P).$$

Let (C, ∂, G) be a G -crossed module. Suppose that $Q = G/N$. Let $d(P)$ be an additive function on the category of projective modules over a $\mathbb{Z}[Q]$ -module. By definition $d(C, \partial, G) = d(C^{ab})$.

4. PROJECTIVE P-MINIMAL CHAIN COMPLEXES

Assume that an additive function $d(P)$ on the category of projective modules over the ring Λ is given.

Definition 9. A projective chain complex

$$(C, d) : C_0 \xleftarrow{d_1} C_1 \xleftarrow{d_2} \dots \xleftarrow{d_n} C_n$$

is called **p-minimal in dimension i** if, for any projective chain complex

$$(D, \partial) : D_0 \xleftarrow{\partial_1} D_1 \xleftarrow{\partial_2} \dots \xleftarrow{\partial_n} D_n$$

homotopically equivalent to C, d , one has $d(C_i) \leq d(D_i)$, where $d(C)$ is the dimension of the module C .

A projective chain complex (C, d) is called **p-minimal** if it is p-minimal in all dimensions.

Remark 4. *It is obvious that for any free chain complex (C, d) in its homotopic type for any fixed dimension i there always exists a minimal free chain complex in dimension i .*

However, a minimal free chain complex may be absent in the homotopy type of an arbitrary free chain complex (C, d) .

We will give an answer to the following question.

Question. When a projective chain complex (C, d) is p -minimal?

Definition 10. *Let $f : P \rightarrow M$ be an epimorphism of a projective module P . Say that one can select a p -minimal epimorphism from f if there exists a decomposition $P = P_1 \oplus P_2$ such that $f \upharpoonright (P_1 \oplus 0)$ is a p -minimal epimorphism and $f(0 \oplus P_2) = 0$.*

Remark 5. *In general, it is impossible to select a p -minimal epimorphism from an arbitrary epimorphism $f : P \rightarrow M$.*

Definition 11. *Let N be a submodule (not necessarily finitely generated) of a module M . We define $p\text{-rank}(N, M)$ of the pair $M \supseteq N$ as the value of the nonnegative number k such that the submodule N contains a projective module P , $d(P) = k$, that is a direct summand of the module M and for any other projective submodule $Q \subseteq N$ selected a direct summand in M the inequality $d(Q) \leq k$ is true.*

Remark 6. *Note that the $p\text{-rank}(N, M)$ is defined not for all pairs of modules $M \supseteq N$.*

Remark 7. *It is obvious that the following assertions hold true:*

- a) *if the additive function $d(P)$ on the category of projective modules is discrete, then for any pair $M \supseteq N$ its $p\text{-rank}(N, M)$ is defined;*
- b) $p\text{-rank}(N, M) \leq \mu(M)$;
- c) $p\text{-rank}(N, M) = p\text{-rank}(N, M \oplus Q)$.

Definition 12. *Assume that for a submodule $N \subseteq M$ its $p\text{-rank}(N, M)$ is defined. Say that $p\text{-rank}(N, M)$ is **additive** if for any projective module Q we have that $p\text{-rank}(N \oplus Q, M \oplus Q)$ is defined and*

$$p\text{-rank}(N \oplus Q, M \oplus Q) = p\text{-rank}(N, M) + d(Q).$$

Lemma 1. *Let $d(P)$ be a discrete additive function on the category of projective modules. Suppose that N is a submodule (not necessarily*

finitely generated) of a module M . Then there exists a positive number k_0 such that for all projective modules Q with $d(Q) \geq k_0$ we have that $p\text{-rank}(N \oplus Q, M \oplus Q)$ is additive.

The following fact is proved in [16].

Theorem 1. *Let*

$$(C, d) : C_0 \xleftarrow{d_1} C_1 \xleftarrow{d_2} \dots \xleftarrow{d_n} C_n$$

be a projective chain complex over the ring Λ . Then (C, d) is p -minimal if and only if $p\text{-rank}(C_i, d_{i+1}(C_{i+1}))$ is equal to zero and is additive.

5. PROJECTIVE CROSSED p -MINIMAL CHAIN COMPLEXES

Suppose that $d(P)$ is a discrete additive function on the category of $\mathbb{Z}[\pi]$ -projective modules.

Definition 13. *Let*

$$(C_i, \partial_i, G) : e \leftarrow \pi \xleftarrow{\partial_1} G \xleftarrow{\partial_2} C_2 \xleftarrow{\partial_3} C_3 \leftarrow \dots \xleftarrow{\partial_n} C_n$$

be a projective crossed chain complex. A crossed chain complex (C_i, ∂_i, G) is called **p-minimal in dimension i** if, for any projective crossed chain complex

$$(D_i, \bar{\partial}_i, G) : e \leftarrow \pi \xleftarrow{\partial_1} G \xleftarrow{\partial_2} D_2 \xleftarrow{\partial_3} D_3 \leftarrow \dots \xleftarrow{\partial_n} D_n$$

homotopically equivalent to (C_i, ∂_i, G)

- a) for $i \geq 3$ one has $d(C_i) \leq d(D_i)$;
- b) for $i = 2$ one has $d(C_2^{ab}) \leq d(D_2^{ab})$, where $d(C_2^{ab})$ is the dimension of the module (C_2^{ab}) .

A projective crossed chain complex (C, d) is called **p-minimal** if it is p -minimal in all dimensions.

Corollary 1. *Let*

$$(C_i, \partial_i, G) : e \leftarrow \pi \xleftarrow{\partial_1} G \xleftarrow{\partial_2} C_2 \xleftarrow{\partial_3} C_3 \leftarrow \dots \xleftarrow{\partial_n} C_n$$

be a projective crossed chain complex and

$$(C^{ab}, \partial^{ab}) : \xleftarrow{\partial_2^{ab}} C_2^{ab} \xleftarrow{\partial_3} C_3 \leftarrow \dots \xleftarrow{\partial_n} C_n$$

be the associated chain complex of projective $\mathbb{Z}[\pi]$ -modules. Then (C_i, ∂_i, G) is p -minimal if and only if the associated chain complex (C^{ab}, ∂^{ab}) is p -minimal.

6. APPLICATIONS TO MORSE THEORY.

It is known that all chain complexes constructed from cellular decompositions of a non-simply connected manifold W^n have the same homotopy type [9].

Let (W^n, V^{n-1}) be a compact smooth manifold with boundary $\partial W^n = V^{n-1}$ and $\pi = \pi_1(W^n)$ be the fundamental group of W^n . Denote by $p : (\widetilde{W}^n, \widetilde{V}^{n-1}) \rightarrow (W^n, V^{n-1})$ the universal covering map. Here $\widetilde{V}^{n-1} = p^{-1}(V^{n-1})$. Let us choose on W^n an ordered Morse function $f : W^n \rightarrow [0, 1]$ such that $f^{-1}(0) = V^{n-1}$, and a gradient-like vector field ξ . Using the mapping p , lift f and ξ to \widetilde{W}^n , and denote a lifted function and a vector field by \tilde{f} and $\tilde{\xi}$ respectively. Using f and ξ (resp. \tilde{f} and $\tilde{\xi}$) construct chain complexes of abelian groups

$$C_*(W^n, f, \xi) : C_* (W^n, f, \xi) : C_0 \xleftarrow{d_1} C_1 \leftarrow \dots \xleftarrow{d_n} C_n,$$

and

$$(C_*(\widetilde{W}^n, \tilde{f}, \tilde{\xi}) : C_*(\widetilde{W}^n, \tilde{f}, \tilde{\xi}) : \tilde{C}_0 \xleftarrow{\tilde{d}_1} \tilde{C}_1 \leftarrow \dots \xleftarrow{\tilde{d}_n} \tilde{C}_n,$$

where $C_i = H_i(W_i, W_{i-1}, Z)$, $\tilde{C}_i = H_i(\widetilde{W}_i, \widetilde{W}_{i-1}, Z)$ and $\widetilde{W}_i = \tilde{f}^{-1}[0, a_i]$, $W_i = f^{-1}[0, a_i]$ are submanifolds containing all critical points of indices less than or equal to i .

The fundamental group $\pi = \pi_1(W^n)$ acts on manifolds \widetilde{W}^n . Making use of this actions, we can turn the chain group \tilde{C}_i into finitely generated modules over ring $\mathbb{Z}[\pi]$. On manifold (W^n, V^{n-1}) using (f, ξ) construct crossed projective chain complexes

$$C_*^{cr}(W^n, f, \xi) : e \leftarrow \pi \leftarrow \pi_1(V^{n-1}) \xleftarrow{d^2} \leftarrow \pi_2(W_2, V^{n-1}) \xleftarrow{\tilde{d}^{(3)}} \tilde{C}^3 \xleftarrow{\tilde{d}^4} \dots \xleftarrow{\tilde{d}^{(n-1)}} \tilde{C}^{(n)}.$$

Definition 14. *The i -th Morse number $\mathcal{M}_i(W^n)$ of a manifold W^n is the minimal number of critical points of index i taken over all Morse functions on W^n .*

Theorem 2. *Let (W^n, V^{n-1}) ($n \geq 6$) be a compact smooth manifold with boundary $\partial W^n = V^{n-1}$. Suppose that the inclusion $i : V^{n-1} \rightarrow W^n$ indexes the map*

$$i_* : \pi_1(V^{n-1}) \rightarrow \pi_1(W^n)$$

which is an epimorphism. Then the second Morse number $\mathcal{M}_2(W^n)$ of W^n is equal to

$$\mu(\pi_2(W^n, V^{n-1})),$$

where $\mu(\pi)$ denotes the minimal number of generators of the crossed module π .

Proof. The conditions of the theorem guarantee existence of an ordered Morse function $f : W^n \rightarrow [0, 1]$ such that $f^{-1}(0) = V^{n-1}$ and f has no critical points of indexes 0 and 1. The Morse number $\mathcal{M}_2(W^n)$ of W^n can be directly computed as in Lemma 2.1 of [16]. \square

Suppose that the inclusion $i : V^{n-1} \rightarrow W^n$ induces the map

$$i_* : \pi_1(V^{n-1}) \rightarrow \pi_1(W^n)$$

which is not an epimorphism. Then any Morse function $f : W^n \rightarrow [0, 1]$, $f^{-1}(0) = V^{n-1}$ on W^n has at least one critical point of index 1.

It is clear that in this situation $\pi_1(W_1) = \pi_1(V^{n-1}) * F_k$, where F_k is a free group of rank k . The number k is equal to the number of critical points of index 1 of Morse function f . Of course, the minimal number of generators of $\pi_1(W_1)$ -crossed module $\pi_1(W^n, W_1)$ will depend on submanifold W_1 .

Lemma 2. *Let (W^n, V^{n-1}) , $n \geq 6$, be a compact smooth manifold with boundary $\partial W^n = V^{n-1}$ and $\pi = \pi_1(W^n)$ be the fundamental group of W^n . Suppose that $f : W^n \rightarrow [0, 1]$ is an ordered Morse function such that $f^{-1}(0) = V^{n-1}$, and $W_1 = f^{-1}[0, a_1]$ are submanifolds containing all critical points of indexes less than or equal to 1. Then the number*

$$D(W^n, W_1) = \mu(\pi_2(W^n, W_1)) - \mu(H_2(W^n, W_1, \mathbb{Z}))$$

does not depend on a particular choice of function f .

Theorem 3. *Let (W^n, V^{n-1}) , $(n \geq 6)$, be a compact smooth manifold with boundary $\partial W^n = V^{n-1}$ and $\pi = \pi_1(W^n)$ be the fundamental group of W^n . Suppose that the inclusion*

$$i : V^{n-1} \rightarrow W^n$$

induces the map $i_* : \pi_1(V^{n-1}) \rightarrow \pi_1(W^n)$ which is not an epimorphism. The second Morse number $\mathcal{M}_2(W^n)$ of W^n is equal to

$$D(W^n, W_1) + \mu(H_2(W^n, V^{n-1}, \mathbb{Z})),$$

where $\mu(H)$ denotes the minimal number of generators of the group H .

Proof. The conditions of the theorem guarantee the existence of an ordered Morse function $f : W^n \rightarrow [0, 1]$ such that $f^{-1}(0) = V^{n-1}$ and f has critical points of index 1 and no critical points of index 0. In this situation estimates for the Morse number $\mathcal{M}_2(W^n)$ of W^n can be directly computed. \square

The estimations of Morse numbers using different approaches were obtained in [4, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 18]. In next papers we shall give the values of Morse numbers for other classes of manifolds.

REFERENCES

- [1] Brown R., Higgins P. J., Sivera R. *Nonabelian algebraic topology. Filtered spaces, crossed complexes, cubical homotopy groupoids* // Europ. Math. Soc.: Tracts in Math. — Vol. 15. — 670 p.
- [2] Dyer E., Vasquez A. T. *An invariant for finitely generated projectives over $\mathbb{Z}[G]$* // Pure Appl. Algebra. — 1976. — Vol. 7, no. 3 — P.241–248.
- [3] Dyer M. *Subcomplexes of two-complexes and projective crossed modules* // “Combinatorial group theory and topology” (Alta, Utah, 1984), Ann. of Math. Stud. — 1987. — Vol. 111. — P. 255–264.
- [4] Damian A. *On stable Morse number of a closed manifold* // Bull. London Math. Soc. — 2002. — Vol. 34. — P. 420–430.
- [5] Eliashberg Y., Gromov M. *Lagrangian intersections and stable Morse theory* // Bollettino U.M.I. — 1997. — Vol. (7) 11-B. — P. 289–326.
- [6] Farber M. *Homological algebra of Novikov-Shubin invariants and Morse inequalities* // Geom. Func. Anal. — 1996. — Vol. 6. — P. 628–665.
- [7] Gromov M., Shubin M. *Near-cohomology of Hilbert complexes and topology of non-simply connected manifolds* // Asterisque. — 1992. — Vol. 210. — P. 283–294.
- [8] Hajduk B. *Comparing handle decomposition of homotopy equivalent manifolds* // Fund. Math. — 1997. — Vol. 95. — P. 35–47.
- [9] Kirby R. C., Siebenmann L. C. *Foundational essays on topological manifolds, smoothings and triangulations* // Ann. of Math. Stud. — 1977. — Vol. 88. — 355 pp.
- [10] Luck W. *L^2 -Invariants: Theory and Applications to Geometry and K-Theory* // Springer, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. — 2002. — Vol. 44. — 620 pp.
- [11] Mathai V., Shubin M. *Twisted L^2 -invariants of non-simply connected manifolds and asymptotic L^2 Morse inequalities* // Russian J. Math. Phys. — 1996. — Vol. 4. — P. 499–526.

- [12] Novikov S. P., Shubin M. A. *Morse inequalities and von Neumann algebras* // Uspekhi Mat. Nauk. — 1986. — Vol. 41. — P. 163–164.
- [13] Novikov S. P., Shubin M. A. *Morse inequalities and von Neumann II_1 -factors* // Soviet Math. Dokl. — 1987. — Vol. 34. — P. 79–82.
- [14] Pajitniou A. *On the asymptotics Morse numbers* // Topology. — 1999. — Vol. 38. — P. 529–541.
- [15] Ratcliffe J. *Free and projective crossed modules* // J. London Math. Soc. — 1980. — Vol. 22. — P. 66–74.
- [16] Sharko V. V. *Additive functions on the category of projective modules* // Ukr. Math. Journ. — 2004. — Vol. 56. — P. 295–304.
- [17] Sharko V. V. *Functions on Manifolds: Algebraic and topological aspects* // Amer. Math. Soc., Translations of Mathematical Monographs. — 1993. — Vol. 131.
- [18] Sharko V. V. *New L^2 -invariants of Chain Complexes and Applications, C^* -algebra and Elliptic Theory*, Trends in mathematics, Birkhauser Verlag Basel, Switzerland, 2006, 291-312 .
- [19] Whitehead J. H. *Combinatorial homotopy II* // Bull. Amer. Math. Soc. — 1949. — Vol. 55. — P. 453-496.

515.162.8

I. N. Tavkhelidze*I. Vekua Institute of Applied Mathematics of Tbilisi State University,
Georgia**E-mail: ilia.tavkhelidze@tsu.ge*

About Connection of the Generalized Möbius–Listing’s surfaces with Sets of Ribbon Knots and Links

In this article are considered Ribbon Knots or Links which appear after cutting the Generalized Möbius - Listing’s surfaces GML_m^n along “parallel” lines of their basic lines.

Keywords: *Ribbon Knot, Ribbon Link, Links classification, Möbius strip*

1. INTRODUCTION

The **Classic** Knots and Links Classifications are well known (see e.g. [7, 8, 9]). In this article we will consider the so-called “**Ribbon**” Knots and Links which appear after cutting the Generalized Möbius–Listing’s surfaces GML_m^n along “parallel” lines of their basic lines. In the previous articles [4, 5, 6] we studied particular cases when GML_2^n surface was “ k -times cutting” along the basic line of this surface. But now we consider the general case when the surface GML_m^n (for any natural m) was “ k -times cutting” along the k (any natural number) different lines, which are “parallel” of the basic line.

2. NOTATIONS

Without loss of generality and for simplify the process of proofing, in this article we use the following definitions, notations and restriction:

- X_1, X_2, X_3 , or x, y, z is the notation for coordinates;

© I. N. Tavkhelidze

- τ, ψ, θ — are space values (local coordinates in parallelogram):

$$\begin{aligned} \tau &\in [\tau_*, \tau^*]; \quad 0 \leq \tau_* \leq \tau^* = \text{const}; \\ \psi &\in [0, 2\pi]; \quad \theta \in [0, 2\pi]; \end{aligned} \quad (2.1)$$

- P_m^* is “**Simple star**” (particular case of “Plane figure with m -symmetry” P_m (see in [6])), which analytic representation is given by following formula

$$\begin{aligned} x &= \tau \sum_{i=0}^{m-1} l_i \cdot \epsilon(\psi - \psi_i) \cos \psi, \\ z &= \tau \sum_{i=0}^{m-1} l_i \cdot \epsilon(\psi - \psi_i) \sin \psi, \end{aligned} \quad (2.2)$$

where the arguments τ and ψ are defined in (2.1); $\tau_* = 0$; $\psi_i = \frac{2\pi i}{m}$ and $l_i \in (0, 1)$ are some constants for each $i = \overline{0, m-1}$ and

$$\epsilon(\psi - \psi_i) = \begin{cases} 0, & \psi = \psi_i, \\ 1, & \psi \neq \psi_i. \end{cases}$$

Remark 1. Plane figure P_m^* is:

- 1) a “**Regular simple star**” with m “wings” or “vertices” when $\tau_* \equiv 0$ and when $l_i \equiv 1, i = \overline{0, m-1}$;
- 2) a set of m segments of straight lines lying on the radii of a circle centered at the origin when $\tau_* > 0$;

- $\tilde{x}, \tilde{z}, \theta$ - are space values (local coordinates or parameters in the Cylinder ($\tau_* = 0$) or in the pipe ($\tau_* > 0$) correspondingly)

$$PR_\infty = \{(\tilde{x} = \tau \cos \psi, \tilde{z} = \tau \sin \psi, \theta) :$$

$$\tau \in [\tau_*, \tau^*]; \psi \in [0, 2\pi]; \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

- PR_m^* is a “cylinder” with cross section simple star, i.e.

$$\begin{aligned} PR_m^* &= \bigcup_{i=0}^{m-1} T_i = P_m^* \times [0, 2\pi] = \bigcup_{i=0}^{m-1} \{I_i \times [0, 2\pi]\} = \\ &= \{(\tilde{x}_i = \tau l_i \cos \psi_i, \tilde{z}_i = \tau l_i \sin \psi_i, \theta) : \tau \in [0, \tau^*]; \\ &\quad \psi_i = \frac{2\pi i}{m}, i = \overline{0, m-1}; \theta \in [0, 2\pi]\}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

• T_i , for each $\overline{i = 0, m - 1}$, is a wing the cylinder PR_m^* which corresponds to the angle ψ_i , i.e.

$$\begin{aligned} T_i &= \{I_i \times [0, 2\pi)\} = \{[0, l_i] \times [0, 2\pi)\} \\ I_i &= [0, l_i] \\ T_i^o &= \{I_i \times \{0\}\} \quad T_i^e = \{I_i \times \{2\pi\}\}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

• I_i , $\overline{i = 0, m - 1}$ is a wing of the plane figure P_m^* , and correspondingly $\tau \cdot l_i$ is a “**Length**” of its.

• OO' – axis of symmetry of the prism PR_m^* ;

Definition 1. Generalized Möbius Listing’s body - shortly GML_m^n - is obtained by identifying the opposite ends of the prism PR_m^* in such a way that:

A) For any integer $n \in \mathbf{Z}$ and $i = 0, \dots, m - 1$ each edge T_i^o coincides with the edge $T_{i+n}^e = T_{\text{mod}_m(i+n)}^e$ correspondingly;

B) The integer $n \in \mathbf{Z}$ denotes the number of rotations of the end of the prism with respect to the axis OO' before the identification. If $n > 0$, the rotations are counter-clockwise, and if $n < 0$ then rotations are clockwise.

General definition and some particular examples of GML_m^n and its graphical realizations can be found in [2, 3].

Remark 2. Number n for each particular case of the GML_m^n body has a different meaning and depends from the number m . One full rotation around of basic line realizes when $n = m$;

• GML_2^1 is classic Möbius strip.

In this article are considered Generalized Möbius Listing’s surfaces GML_m^n with following restriction:

- Radial cross section of this surfaces are “**Regular simple star**”;
- Basic line of these surfaces always plane **circle**;
- Rule of twisting around basic line is a “**regular**” (see [2]).

According to these restrictions it is easy to remark, that analytic representation (6*) in [2] of the GML_m^n surfaces has a form

$$\begin{aligned} X_1(\tau, \psi, \theta) &= \left[R + \tau \sum_{i=0}^{m-1} l_i \cdot \epsilon(\psi - \psi_i) \cos\left(\psi + \frac{n\theta}{m}\right) \right] \cos(\theta), \\ X_2(\tau, \psi, \theta) &= \left[R + \tau \sum_{i=0}^{m-1} l_i \cdot \epsilon(\psi - \psi_i) \cos\left(\psi + \frac{n\theta}{m}\right) \right] \sin(\theta), \\ X_3(\tau, \psi, \theta) &= \tau \sum_{i=0}^{m-1} l_i \cdot \epsilon(\psi - \psi_i) \sin\left(\psi + \frac{n\theta}{m}\right), \end{aligned} \quad (2.5)$$

where τ, ψ, θ are variables in the parallelogram (2.1); Constants l_i and ψ_i for each $i = \overline{0, m-1}$ are defined in Remark 1; m (number of wings) is a arbitrary natural number and n (number of rotation) is a arbitrary integer number.

Analytic representation (2.5) gives us possibility to discover some properties of Generalized Möbius–Listing’s body

Remark 3. 1. For each n if $\psi_i = \frac{2\pi i}{m}$ for $i = \overline{0, m-1}$, formula (2.5) is a one to one correspondence points of the “cylinder” PR_m^* in (2.3) and points of the corresponding Generalized Möbius–Listing’s surfaces GML_m^n with radial cross section simple star;

2. Analytic representation (2.5) is a only “width-preserving” correspondence (proof. see in the article [1]);

3. The line $\{0\} \times [0, 2\pi) \subset PR_m^*$ is a origin (by correspondence (2.5)) of the **basic line** of the GML_m^n surface and it belongs to the each wings T_i in (2.4) when $i = \overline{0, m-1}$.

According to this formulas following identities are holds for each numbers m, n

$$X_k(\tau, \psi, 2\pi) = X_k\left(\tau, \psi + \frac{2\pi n}{m}, 0\right), \quad k = 1, 2, 3; \quad (2.6)$$

or in particularly for each numbers $m, n, i = \overline{0, m-1}$ and $k = \overline{1, 3}$

$$X_k(\tau, \psi_i, 2\pi) = X_k(\tau, \psi_{\text{mod}_m(i+n)}, 0). \quad (2.7)$$

Geometric meaning of (2.7) is: - after bending of the cylinder PR_m^* each line T_i^o coincides with the line $T_{\text{mod}_m(i+n)}^e$. So that we may write

following permutation: for each $i = \overline{0, m-1}$

$$T_i^o \rightarrow T_{\text{mod}_m(n+i)}^e. \quad (2.8)$$

But now according to the theorem such permutation will be constructed with exactly $\mathbf{gcd}(m, \text{mod}_m(n))$ (\mathbf{gcd} is a greatest common divisor) numbers of disjoint cycles; Number of these cycles is a number of different colors in such GML_m^n body’s surface. Each different items of following remark is a simple corollary of the relation (2.6)

Remark 4. Suppose that the generalized Möbius–Listing’s surface GML_m^n has a radial cross section Regular simple star (2.2).

- A. If integer number j - is a greatest common divisor of m and $\text{mod}_m(n)$, then the GML_m^n body has a $2j$ -colored surface;
- B. If $m = 2$ and $j = 1$, then regular simple P_2^* is a segment of straight line and (angle 180^0 may be interpreted - “internal angles don’t exist”) so that only in this case one colored or one sided surface appears(GML_2^1 - classic Möbius strip).
- C. If $n = ml, l = 0, 1, 2, \dots$, then the GML_m^n body has $2m$ -colored surface;

Definition 2. A closed line (similar to the basic or border’s line) which is situated on a GML_m^n and is “parallel” to the basic (or border’s) line of the GML_m^n , i.e. the distance between this line and basic or border’s lines is constant is called a “**Slit line**” or shortly an “**s-line**”.

If the distance between an s-line and the basic line is zero, then this s-line coincides with the basic line (and sometimes is called “**B-line**”).

Definition 3. A domain situated on the surface GML_m^n and such that its border’s lines are slit lines, is called a “**Slit zone**” or shortly an “**s-zone**”.

The distance between the border’s lines of an s-zone is the “**width**” of this s-zone.

If an s-zone’s width equals to zero, then this zone reduces to an s-line.

Definition 4. If the “**B-line**” is properly contained inside a “**Slit zone**” - i.e. his distance to the border’s lines is strictly positive - then this “**Slit zone**” will be called a “**B-zone**”.

Definition 5. The “**process of cutting**” or shortly the “**cutting**” is always realized along some s-lines and produces the vanishing (i.e.

elimination) of the corresponding s -zone (which eventually reduces to an s -line).

- If a GML_m^n surface is cut along an s -line, then the resulting object calls “**slitting** GML_m^n ” and the corresponding vanishing zone will be called an **s -slit**.

- If a GML_m^n surface is cut along its B -line, then the resulting object calls “ **B -slitting** GML_m^n ” and the corresponding vanishing zone will be called a **B -slit**.

- If the vanishing zone after an **s -slit** (a **B -slit**) is given by an “ **s -zone**” (a “ **B -zone**”), then the cutting process will be called an **s -zone-slit** (a **B -zone-slit**).

- If GML_m^n surface is cut $(k + 1)$ -times along $k + 1$ different s -lines, $k = 0, 1, 2, \dots$, and none coincide with B -line (sometimes \rightarrow^{k+1}), then the resulting object calls “ **$(k+1)$ -slitting** GML_m^n ” and the corresponding vanishing zones are **$k+1$ -slits**. In this case the cutting process will be called an **$k+1$ -zones-slit**

- If GML_m^n surface is cut $(k + 1)$ -times along $k + 1$, $k = 0, 1, 2, \dots$ different s -lines and one of this line coincide with B -line (sometimes \rightarrow^{B+k}), then the resulting object calls “ **$B + k$ -slitting** GML_m^n ” and corresponding vanishing zones are **$B+k$ -slits**. In this case the cutting process will be called an **$B+k$ -zones-slit**

Sometimes in this article we use “Link-1” to the notation of “Knot”; But always “Links” in this article are “**Ribbon Links**” or Links with radial cross section “Simple star”;

For each natural number $i \in [0, m - 1]$ the segment I_i in (2.4) are divided by one of the following rules:

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}_{2j}^i &= j \cdot \left(\frac{l_i - \varepsilon_i}{k_i + 1} + \frac{\varepsilon_i}{k_i} \right), & j = 0, 1, \dots, k_i. \\ \tilde{\tau}_{2j+1}^i &= (j + 1) \cdot \frac{l_i - \varepsilon_i}{k_i + 1} + j \cdot \frac{\varepsilon_i}{k_i}, & j = 0, 1, \dots, k_i.\end{aligned}\tag{2.9}$$

or

$$\begin{aligned}\hat{\tau}_{2j}^i &= \frac{j \cdot l_i}{k_i}, & j = 0, 1, \dots, k_i. \\ \hat{\tau}_{2j+1}^i &= \frac{j \cdot l_i + \varepsilon_i}{k_i}, & j = 0, 1, \dots, k_i - 1.\end{aligned}\tag{2.10}$$

where $0 \leq \varepsilon_i < l_i$ and $k_i = 0, 1, \dots$ are some real and natural numbers correspondingly.

- For each multiindex $k = (k_0, k_1, \dots, k_{m-1})$ and vector $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m-1})$

$$\begin{aligned} \tilde{T}_k &= \bigcup_{i=0}^{m-1} \{\tilde{I}_{i,k_i} \times [0, 2\pi)\}, \\ \tilde{T}_k^\varepsilon &= \bigcup_{i=0}^{m-1} \{\tilde{I}_{i,k_i}^{\varepsilon_i} \times [0, 2\pi)\}, \\ PR_m^* &= P_m^* \times [0, 2\pi) = \tilde{T}_k \cup \tilde{T}_k^\varepsilon, \\ \tilde{I}_{i,k_i} &= \bigcup_{j=0}^{k_i} [\tilde{\tau}_{2j}^i, \tilde{\tau}_{2j+1}^i], \quad \tilde{I}_{i,k_i}^{\varepsilon_i} = \bigcup_{j=1}^{2k_i-1} [\tilde{\tau}_{2j-1}^i, \tilde{\tau}_{2j}^i], \end{aligned} \tag{2.11}$$

or

$$\begin{aligned} \hat{T}_{B,k} &= \bigcup_{i=0}^{m-1} \{\hat{I}_{i,B,k_i} \times [0, 2\pi)\} \\ \hat{T}_{B,k}^\varepsilon &= \bigcup_{i=0}^{m-1} \{\hat{I}_{i,B,k_i}^{\varepsilon_i} \times [0, 2\pi)\} \\ PR_m^* &= P_m^* \times [0, 2\pi) = \hat{T}_{B,k} \cup \hat{T}_{B,k}^\varepsilon, \\ \hat{I}_{i,B,k_i} &= \bigcup_{j=1}^{2k_i-1} [\hat{\tau}_{2j-1}^i, \hat{\tau}_{2j}^i], \quad \hat{I}_{i,B,k_i}^{\varepsilon_i} = \bigcup_{j=0}^k [\hat{\tau}_{2j}^i, \hat{\tau}_{2j+1}^i]. \end{aligned} \tag{2.12}$$

- Elimination of the B-zone always means, that corresponding origin domain $\hat{T}_{B,k}^\varepsilon$ (2.12) and $\varepsilon_i = \varepsilon \geq 0$ for every $i = 0, \dots, m - 1$, moor precisely in this case multiindex

$$\varepsilon = (\varepsilon, \varepsilon, \dots, \varepsilon);$$

- For fixed number of cutting k , the width of the eliminated zones (and radius of B-zone) on the GML_m^n surface were always identic;
- For fixed number of cutting k , the width of the remain zones (and radius of corresponding B-zone) on the GML_m^n surfaces were always identic;

3. RELATIONS BETWEEN THE SET OF GENERALIZED MÖBIUS–LISTING’S SURFACES AND THE SETS OF KNOTS AND LINKS

Theorem 1. *If the GML_m^n surface is $(\kappa + 1)$ -times cut along $\kappa + 1$ different non trivial s-lines (i.e. a line which does not coincide with its basic line and $\kappa = 0, 1, \dots$), then for each integer numbers m, n, κ ,*

after an $(\kappa + 1)$ -zones-slit, an object “**Link**-($\kappa + 2$)” appears, whose one component is a GML_m^n surface, and each other components are:

A. $GML_2^{2\omega}$ surfaces - if number $n = m\omega$ (ω -arbitrary integer number), i.e. in this case

$$GML_m^{m\omega} \xrightarrow{\kappa+1} \text{Link} - (\kappa + 2) \\ \text{of one } GML_m^{m\omega} \text{ and } (\kappa + 1) \times GML_2^{2\omega}; \quad (3.1)$$

B. $GML_2^{2\xi(\omega+1)+2(\eta-1)}$ surfaces - if number $n = m\omega + \delta$ and integer numbers m and δ have greatest common divisor equal to the ς ($m = \varsigma \times \xi$ and $\delta = \varsigma \times \eta$), i.e. in this case

$$GML_m^{m\omega+\delta} = GML_m^{\varsigma(\xi\omega+\eta)} \xrightarrow{\kappa+1} \text{Link} - (\kappa + 2) \\ \text{of one } GML_m^{m\omega+\delta} \text{ and } (\kappa + 1) \times GML_2^{2\xi(\omega+1)+2(\eta-1)}. \quad (3.2)$$

Proof. Case A. In this case $n = m\omega$ where ω is an integer number, this means cylinder PR_m^* made ω full rotation before identifying of corresponding wings (see Remark 2.).

• In particular case, when $\kappa = 0$ (GML_m^n surface was cutting along the one s-line), to the slit of the GML_m^n surface corresponds one cycle in the (2.8), but in this case since $n = m\omega$, permutation (2.8) is constructed with m disjoint cycles. In other words origin of the slit (without loss of generality) is a \tilde{T}_1^ε from (2.11), where $\varepsilon = (\varepsilon, 0, \dots, 0)$ and $1 = (1, 0, \dots, 0)$. So that domain of definition of slitting GML_m^n is a

$$\tilde{T}_1 = \bigcup_{i=0}^{m-1} \{[\tilde{\tau}_0^i, \tilde{\tau}_1^i] \times [0, 2\pi)\} \cup \{[\tilde{\tau}_2^0, \tilde{\tau}_3^0] \times [0, 2\pi)\}. \quad (3.3)$$

This domain \tilde{T}_1 consists with two separated domains. First member of the right hand side of the (3.3) has a structure of the cylinder PR_m^* and since the (2.5) it define the GML_m^n surface (“wing number 0 is a little bit short”). Second member of the right hand side of the (3.3) is a strip and since the Remark 2.) and (2.5) it define the $GML_2^{2\omega}$ surface. So that in this particular case ($\kappa = 0$) proposition of the theorem in this case is already proved.

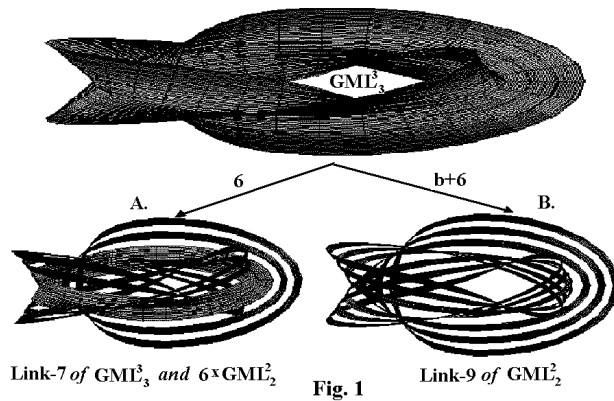
• In general case, when κ is an arbitrary natural number we may separate the process of proving by following steps:

- First step - after (first) one slitting appears previous situation - link 2 to the $GML_m^{m\omega}$ and $GML_2^{2\omega}$ surfaces.

- Second step - second slitting is a slitting $GML_m^{m\omega}$ or slitting $GML_2^{2\omega}$. If the second slitting is a slitting $GML_m^{m\omega}$, then we have previous situation and so that appear Link-2 of the $GML_m^{m\omega}$ and $GML_2^{2\omega}$. In the other hand, if the second slitting is a slitting of the $GML_2^{2\omega}$, then according to the Theorem 2 case A in the [4], after cutting appear link-2 of two $GML_2^{2\omega}$ surfaces. So that, after second cutting in both cases appear link-3 where one surface is a $GML_2^{\omega m}$ and two others are $GML_2^{2\omega}$ surfaces.

- Third step - each following $\kappa + 1$ cutting is a cutting of the $GML_2^{\omega m}$ surface or one of the κ surfaces $GML_2^{2\omega}$. But in this case arguments are identical to the previous point.

- So that case A. of the Theorem already proved. Particular case when $m = 3, n = 3$ and $k + 1 = 6$ see in Fig.1 case A.



Case B. In this case number ω define number of full rotations and δ define the permutation (2.8).

• Let consider the particular case, when $\kappa = 0$. According to the definition 4. formulas (2.8), (2.11) and Remark 4 A.) to the slit (without loss of generality we start to the number 0) corresponds the origin (with respect to the (2.5)) domain

$$\tilde{T}_{|\xi|}^\varepsilon = \bigcup_{i=0}^{\xi-1} \left\{ \tilde{T}_{\zeta_{i,1}}^\varepsilon \times [0, 2\pi) \right\}, \tag{3.4}$$

where $n = m\omega + \delta$; $\mathbf{gcd}(m, \delta) = \varsigma$; $m = \varsigma \times \xi$; $\delta = \varsigma \times \eta$; ς is a number of disjoint cycles in corresponding permutation (2.8) and ξ is a number of elements in these cycles. Multiindexes $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{m-1})$ have a following structure

$$\varepsilon_i = \begin{cases} \varepsilon, & i = q\varsigma, q = 0, 1, \dots, \\ 0, & i \neq q\varsigma. \end{cases}$$

So that after elimination of domain $\tilde{T}_{|\xi|}^\varepsilon$ (3.4) in the cylinder PR_m^* appear new domain of definitions of the (2.5)(or slitting $GML_m^{m\omega+\delta}$)

$$\tilde{T}_{|\xi|}^\varepsilon = \bigcup_{i=0}^{m-1} \{[\tilde{\tau}_0^i, \tilde{\tau}_1^i] \times [0, 2\pi)\} \bigcup_{i=0}^{\xi-1} \{[\tilde{\tau}_2^i, \tilde{\tau}_3^i] \times [0, 2\pi)\}. \quad (3.5)$$

So that domain (3.5) is consists with $\xi + 1$ separated parts. First part of the right hand side of the expression (3.5) is a similar to the cylinder PR_M^* and according to the (2.5), it define $GML_m^{m\omega+\delta}$ surface. But, second terms in right hand side in the (3.5)(ξ - times disjointed strips) according to the (2.5) and (2.8) define $GML_2^{2\xi(\omega+1)+2(\eta-1)}$ surface.

So that appear link-2 when one component is a $GML_m^{m\omega+\delta}$ surface and second is a $GML_2^{2\xi(\omega+1)+2(\eta-1)}$ surface (we may rewrite unit normal vector of the corresponding surface have form similar to the formula (12) in the [4]. Unit normal vector make $2\xi(\omega+1)+2(\eta-1)$ rotations around the new basis line) .

• In general case, when κ is an arbitrary natural number we may separate the process of proving by following steps:

First step - after (first) one slitting appears previous situation - link 2 to the $GML_m^{m\omega+\delta}$ and $GML_2^{2\xi(\omega+1)+2(\eta-1)}$ surfaces.

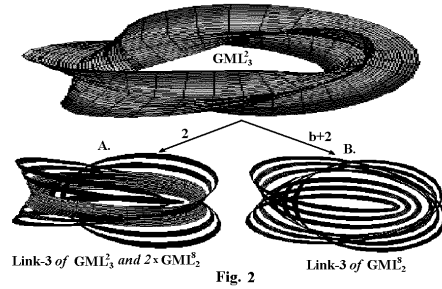
Second step - second slitting is a slitting $GML_m^{m\omega+\delta}$ or slitting $GML_2^{2\xi(\omega+1)+2(\eta-1)}$. If the second slitting is a slitting $GML_m^{m\omega+\delta}$, then we have previous situation and so that appear Link-2 of the $GML_m^{m\omega+\delta}$ and $GML_2^{2\xi(\omega+1)+2(\eta-1)}$.

On the other hand, if the second slitting is a slitting of the $GML_2^{2\xi(\omega+1)+2(\eta-1)}$, then according to the Case A of Theorem 2 in [4], after cutting appear link-2 of two $GML_2^{2\xi(\omega+1)+2(\eta-1)}$ surfaces.

So that, after $GML_m^{m\omega+\delta}$ and two others are $GML_2^{2\xi(\omega+1)+2(\eta-1)}$ surfaces.

Third step - each following $\kappa + 1$ cutting is a cutting of the $GML_m^{m\omega + \delta}$ surface or one of the k surfaces $GML_2^{2\xi(\omega+1)+2(\eta-1)}$. But in this case arguments are identical to the previous point.

- So that case B. of the Theorem already proved. Particular case when $m = 3, n = 2$ and $k + 1 = 2$ see in Fig.2 case A.



Theorem 2. If the GML_m^n surface is $(B + \kappa)$ -times cut along $\kappa + 1$ different s-lines and some coincide with the basic line (i.e. $\kappa = 0, 1, \dots$), then for each integer numbers m, n, κ , after a $(B + \kappa)$ -zones-slit:

A. if $n = m\omega$ an object “**Link**-($\kappa + m$)” appears, whose each components are $GML_2^{2\omega}$ surfaces; i.e. for each $\omega \geq 0$,

$$GML_m^{m\omega} \xrightarrow{b+\kappa} \text{Link} - (\kappa + m) \text{ of } (\kappa + m) \times GML_2^{2\omega}; \tag{3.6}$$

B. if $n = m\omega + \delta$, and greatest common divisor of the numbers m and δ is a ς ($m = \varsigma \times \xi$ and $\delta = \varsigma \times \eta$), then an object “**Link**-($\kappa + \varsigma$)” appears, whose each components are $GML_2^{2\xi(\omega+1)+2(\eta-1)}$ surfaces; i.e. for each $\omega \geq 0$,

$$GML_m^{m\omega + \delta} = GML_m^{\varsigma(\xi\omega + \eta)} \xrightarrow{b+\kappa} \text{Link} - (\kappa + \varsigma) \text{ of } (\kappa + \varsigma) \times GML_2^{2\xi(\omega+1)+2(\eta-1)}. \tag{3.7}$$

Proof. Case A. In this case $n = m\omega$. At first let us consider a particular case, when $\kappa = 0$ (GML_m^n surface was cutting along the B-line), to the B-slit of the GML_m^n since the (2.12) and corresponding restriction about B-slit

$$\widehat{T}_{B,0}^\varepsilon = \bigcup_{i=0}^{m-1} \left\{ \widehat{T}_{i,B,0}^\varepsilon \times [0, 2\pi) \right\}, \tag{3.8}$$

where, $\varepsilon = (\varepsilon, \varepsilon, \dots, \varepsilon)$. So that domain of definition of the B-slitting GML_m^n surface is

$$\widehat{T}_{B,0} = \bigcup_{i=0}^{m-1} \left\{ \widehat{I}_{i,B,0} \times [0, 2\pi) \right\} = \bigcup_{i=0}^{m-1} \left\{ [\widehat{\tau}_1^i, \widehat{\tau}_2^i] \times [0, 2\pi) \right\} \quad (3.9)$$

and correspondingly it consists to the m separated strips. But according to the (3.1), in this case each strip define $GML_2^{2\omega}$ surface. So that B-slitting $GML_m^{m\omega}$ is a link- m of the m disjointed $GML_2^{2\omega}$ surfaces (ω number of full rotations).

• In general case, when κ is an arbitrary natural number we may separate the process of proving by following steps:

- First step - after (first) one B-slitting appears previous situation - link- m to the m different $GML_2^{2\omega}$ surfaces.

- Second step - second slitting is a slitting of the one of $GML_2^{2\omega}$. But in this case according to the Theorem 2 case A in the [4], appear link-2 of the surfaces with similar structure. So that after $(B+1)$ -slitting of the $GML_m^{m\omega}$ is a link- $(m+1)$ of the $m+1$ different $GML_2^{2\omega}$ surfaces.

- Third step - we must to repeat second step in k -times. So that $(B+\kappa)$ -slitting $GML_m^{m\omega}$ surface is a link- $(m+\kappa)$ of the $(m+\kappa)$ different $GML_2^{2\omega}$ surfaces.

- So that case A. of Theorem 2 already proved. Particular case when $m=3, n=3$ and $k=6$ see in Fig.1 case B.

Case B.

• Let consider the particular case, when $\kappa=0$. To the B-slit corresponds the domain (3.8). But now, according to formulas (2.8), (2.12) and (2.5) domain ((3.9) define ς different

$$GML_2^{2\xi(\omega+1)+2(\eta-1)}$$

surfaces (number of disjoint cycles in corresponding permutation). number of rotations around basic line is a similar to the case A 2.

• In general case, when κ is an arbitrary natural number we may separate the process of proving by following steps:

- First step - after (first) one B-slitting appears previous situation - link- ς to the ς different $GML_2^{2\xi(\omega+1)+2(\eta-1)}$ surfaces.

- Second step - second slitting is a slitting of the one of

$$GML_2^{2\xi(\omega+1)+2(\eta-1)}$$

surface. But in this case according to the Theorem 2 case A in the [4], appear link-2 of the surfaces with similar structure. So that after $(B + 1)$ -slitting of the $GML_m^{m\omega+\delta}$ is a link- $(\zeta + 1)$ of the $\zeta + 1$ different

$$GML_2^{2\xi(\omega+1)+2(\eta-1)}$$

surfaces.

- Third step - we must to repeat second step in k -times. so that $(B + \kappa)$ -slitting $GML_m^{m\omega+\delta}$ surface is a link- $(\zeta + \kappa)$ of the $\zeta + \kappa$ different $GML_2^{2\xi(\omega+1)+2(\eta-1)}$ surfaces.

- So that case B Theorem 2 already proved. Particular case when $m = 3, n = 2$ and $k = 2$ see in Fig.2 case **B**.

Remark 5. Both the previous Theorems still hold when the basic line is a closed space line.

• Sometime, when $m = 2$ and $k = 0$, we may calculate precise classic topological indexes of Link-1 or Link-2 which appear after s -slit or B -slit (see. [4],[5]);

In particularly after B -slit:

a. Link-2 $\{(n)_1^2\}$ (standard classification see. [8] or [7]) appear, when n is even number (see. Theorem 1.A in [4]);

b. Link-1 $\{(n)_1\}$, (except $n = 1$, standard classification see. [9] or [7]) appear, when n is odd number (see. Theorem 1.B in [4]);

4. ACKNOWLEDGEMENTS

The author is deeply grateful to the Organizing Committee of Ukrainian Mathematical Congress - 2009 (dedicated to the Centennial of Nikolai N.Bogoliubov) 27-29-VIII. 2009 for possibility participate of this very important scientific meeting. The author is deeply grateful to Prof. P.E. Ricci and Prof. P.-V.Checcherrini for useful discussions about the problem considered in this article. This article was concluded during the visit of Prof. Dr. I. Tavkhelidze, supported by “Contratto di Collaborazione Coordinata e Continuativa” of the University of Roma “La Sapienza”.

For constructing figures in this article we used Matlab 7.0 - # 212817 - P.E. Ricci - “La Sapienza”.

REFERENCES

- [1] Tavkhelidze I. *On the some properties of one class of geometrical figures and lines* // Reports of Enlarged Sessions of the Seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathematics. — 2001. — Vol. 16, № 1. — P. 35–38.
- [2] Tavkhelidze I., Ricci P.E. *Classification of a wide set of Geometric figures, surfaces and lines (Trajectories)* // Rendiconti Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL, Memorie di Matematica e Applicazioni. — 2006. — 124^o, Vol. XXX, fasc. 1. — P. 191–212.
- [3] Tavkhelidze I. *Classification of a wide set of geometric figures* // Lecture Notes of TICMI, Tbilisi. — 2007. — Vol. 8. — P. 53–61.
- [4] Tavkhelidze I., Cassisa C. *About some geometric characteristic of the generalized Möbius–Listing’s surfaces* // Computer Science and Telecommunications. — 2009. — Vol. 21, № 4. — P. 54–84.
- [5] Ricci P.E., Tavkhelidze I. *About some geometric characteristic of the generalized Möbius Listing’s surfaces* // Georgian Mathematical Journal. — 2009. — in print.
- [6] Tavkhelidze I. *About some geometric characteristic of the generalized Möbius Listing’s surfaces* // Bulletin of St. Andrew the First-Called Georgian University of the Patriarchy of Georgia, Tbilisi. — 2009. — Vol. 2. — P. 89–98.
- [7] Weisstein E. W. *The CRC concise Encyclopedia of Mathematics* (Second edition), Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL. — 2003.
- [8] Doll H., Hoste J. *A tabulation of oriented links* // Math. Comput. — 1991. — Vol. 57. — P. 747–761.
- [9] Kupenberg G. *Quadriseccants of knots and links* // J. Knot Theory Ramifications. — 1994. — Vol. 3. — P. 41–50.

Зміст

Абдуллаев Ф., Довгошей А. А., Кучукаслан М. Касательные пространства к метрическим пространствам. Секвенциальный подход	5-20
Атаманюк О. Б., Атаманюк Б. В. Збереження геометричних властивостей динамічних систем при топологічному спряженні	21-28
Власенко И. Ю. Фактор-гомеоморфизм внутреннего эпиморфизма. .	29-37
Дискант В. И. Точность оценок ширины опорного слоя изопериметрика геометрии Минковского	38-48
Коновенко Н. Г. Проективные структуры и уравнения Шредингера .	49-64
Хоменко М. П., Виврот Т. М. Структура графів окремих класів довільної k- класифікації графів	65-79
Dikranjan D., Repovš D. Topics in uniform continuity	80-116
Kisil A. V. Gromov Conjecture on Surface Subgroups: Computational Experiments	117-134
Malyuta Yu. M., Obikhod T. V. Stringy Approach to the Minimal Supersymmetric Standard Model	135-143
Matsumoto K., Şentürk Z. Certain Anti-holomorphic Submanifolds in a Locally Conformal Kaehler Manifold	144-164
Sharko V. V. Some aspect of non-commutative algebraic topology ..	165-176
Tavkheldze I. N. About Connection of the Generalized Möbius-Listing's surfaces with Sets of Ribbon Knots and Links	177-190

Наукове видання

Український Математичний Конгрес – 2009
Секція 2. Топологія і геометрія

Комп'ютерна верстка та підготовка оригінал-макету
С. І. Максименко.

Редактор В. Е. Гонтковська

Підп. до друку 5.12.2011. Формат 60x84/16. Папір офс. Офс. друк.
Фіз. друк. арк. 12,3. Ум. друк. арк. 11,4. Зам. 119. Тираж 300 пр.

Ін-т математики НАН України
01601 Київ-4, МСП, вул. Терещенківська, 3