

# Геометрія та топологія функцій на многовидах

Інститут математики  
Національної академії наук України

---

---

Збірник праць  
Інституту математики НАН України  
Т. 7    № 4

Головний редактор: *А. М. Самойленко*

Редакційна рада: *Ю. М. Березанський, М. Л. Горбачук,  
А. А. Дороговцев, Ю. А. Дрозд, Ю. Б. Зелінський,  
В. С. Королюк, А. Н. Кочубей, І. О. Луковський,  
В. Л. Макаров, А. Г. Нікітін, В. В. Новицький,  
М. В. Працьовитий, О. А. Ребенко, А. С. Романюк,  
Ю. С. Самойленко, С. Г. Солодкий, П. М. Тамразов,  
В. В. Шарко, О. М. Шарковський*

Інститут математики  
Національної академії наук України

---

---

Геометрія та топологія  
функцій на многовидах

Київ – 2010

УДК 539.12 + 515.146.3 + 515.162.2 + 517.57

**Геометрія та топологія функцій на многовидах /**  
Відп. ред. В. В. Шарко // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2010. — Т. 7, № 4. — 204 с.

Збірник містить нові результати про геометричні та топологічні властивості функцій на многовидах, а також деякі результати з диференціальної геометрії. Вони доповідались на семінарі “Топологія та її застосування” Інституту математики НАН України та на міжнародних конференціях.

Для спеціалістів, що працюють в області топології, теорії функцій та диференціальної геометрії, а також для студентів та аспірантів.

**Видавнича група збірника:**

член-кореспондент НАН України В. В. Шарко (відп. ред.),  
кандидат фіз.-мат. наук С. І. Максименко.

**Рецензенти:**

доктор фіз.-мат. наук, професор В. В. Кириченко  
доктор фіз.-мат. наук, професор Ю. Б. Зелінський

Свідоцтво про державну реєстрацію — серія КВ № 8459,  
видане 19 лютого 2004 р.

---

© Інститут математики НАН України, 2010

## Зміст

<b>Мaksymenko S.</b> Functions with isolated singularities on surfaces ..	7-66
<b>Лычагин В. В., Коновенко Н. Г.</b> О конформной эквивалентности функций .....	67-72
<b>Пришляк А. О., Пришляк Е. А., Вятчанинова Е. Н.</b> О некритическом продолжении функции, заданной на границе трёхмерной области .....	73-86
<b>Кадубовський О. А.</b> Про число топологічно нееквівалентних функцій з однією виродженою критичною точкою типу сідла на двовимірній сфері .....	87-107
<b>Юрчук І. А.</b> Класифікація квадратичних та кубічних комплексних поліномів .....	108-122
<b>Коновенко Н. Г.</b> О метрической эквивалентности функций, заданных на плоскости де Ситтера .....	123-131
<b>Krouglov V.</b> On the extrinsic geometry of contact structures ...	132-145
<b>Эфтехаринасаб К.</b> О гауссовой кривизне гармонических функций .	146-152
<b>Полулях Е. А.</b> О поведении $F$ -функций на замыкании множества своих $S$ -отделенных точек .....	153-168

<b>Malyuta Yu. M., Obikhod T. V.</b>	
Stringy Approach to the Minimal Supersymmetric Standard Model .....	169-177
<b>Шарко В. В.</b>	
$S^1$ -функции Ботта и несингулярные потоки Морса-Смейла на многообразиях .....	178-203

## Functions with isolated singularities on surfaces<sup>1</sup>

*Sergiy Maksymenko*

Let  $M$  be a smooth connected compact surface,  $P$  be either the real line  $\mathbb{R}$  or the circle  $S^1$ , and  $f : M \rightarrow P$  be a smooth mapping. In a previous series of papers for the case when  $f$  is a Morse map the author calculated the homotopy types of stabilizers and orbits of  $f$  with respect to the right action of the diffeomorphisms group of  $M$ . The present paper extends those calculations to a large class of maps  $M \rightarrow P$  with degenerate singularities satisfying certain set of axioms.

### 1. INTRODUCTION

Let  $M$  be a smooth compact connected surface and  $P$  be either the real line  $\mathbb{R}$  or the circle  $S^1$ . Then the group  $\mathcal{D}(M)$  of diffeomorphisms of  $M$  naturally acts from the right on the space  $\mathcal{C}^\infty(M, P)$  by the formula:

$$h \cdot f = f \circ h, \quad h \in \mathcal{D}(M), \quad f \in \mathcal{C}^\infty(M, P).$$

This action is one of the main objects in singularities theory. For the case of surfaces it was extensively studied in recent years, see e.g. [4, 3, 27, 31, 33, 32, 35, 36, 18, 19, 11, 39].

For  $f \in \mathcal{C}^\infty(M, P)$  let  $\Sigma_f$  be the set of critical points of  $f$  and

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(f) &= \{f \circ h \mid h \in \mathcal{D}(M)\}, \\ \mathcal{S}(f) &= \{h \mid f = f \circ h, h \in \mathcal{D}(M)\} \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>This research is partially supported by grant of Ministry of Science and Education of Ukraine, № M/150-2009.

be respectively the orbit and the stabilizer of  $f$ . We will endow  $\mathcal{D}(M)$  and  $\mathcal{C}^\infty(M, P)$  with the corresponding topologies  $\mathcal{C}^\infty$ . Then these topologies induce certain topologies on  $\mathcal{O}(f)$  and  $\mathcal{S}(f)$ . Let  $\mathcal{D}_{\text{id}}(M)$  and  $\mathcal{S}_{\text{id}}(f)$  be the identity path-component of  $\mathcal{D}(M)$  and  $\mathcal{S}(f)$ , and  $\mathcal{O}_f(f)$  the path-component of  $f$  in  $\mathcal{O}(f)$  with respect to topologies  $\mathcal{C}^\infty$ .

In [18, 19] the author calculated the homotopy types of  $\mathcal{S}_{\text{id}}(f)$  and  $\mathcal{O}_f(f)$  for all Morse maps  $f : M \rightarrow P$ . These calculations are essentially based on the description of homotopy types of groups of orbits preserving diffeomorphisms for certain classes of vector fields obtained in [15, 25]. In a series of papers [17, 22, 20, 24] the classes of vector fields were extended and using these results it was then announced in [21] that calculations of [18, 19] can be done for a large class of smooth maps  $M \rightarrow P$  with isolated “homogeneous” singularities.

The aim of this paper is to show that the technique used in [18, 19] can be formalized and thus extended to classes of isolated singularities even larger than homogeneous ones, see Theorems 3 and 4.

We will introduce three types of isolated critical points **S**, **P**, and **N** for a *germ* of smooth maps  $f : M \rightarrow P$ . These points will be discussed in §4 and now we only note that **S**-points are *saddles* while **P**- and **N**-points are local extremes<sup>2</sup>. All these points can be degenerate however they satisfy certain “non-degeneracy” conditions formulated in the terms of shift map of the corresponding local Hamiltonian vector field of  $f$ . In particular, class of **S**-points (**P**-points) have properties similar to non-degenerate saddles (local extremes) of Morse functions and include such points, while **N**-points behave like

---

<sup>2</sup>The symbols **P** and **N** stand for *periodicity* and *non-periodicity* of shift map.



degenerate local extremes of homogeneous polynomials, see Lemma 12. These **N**-points bring new effects in comparison with Morse functions.

Now we put following three axioms on  $f$ :

**Axiom (A1).**  $f$  is constant at each connected component of  $\partial M$  and  $\Sigma_f \subset \text{Int}M$ .

**Axiom (A2).** Every critical point of  $f$  is either an **S**- or a **P**- or an **N**-point.

**Axiom (A3).** The natural map  $p : \mathcal{D}(M) \rightarrow \mathcal{O}(f)$  defined by  $p(h) = f \circ h^{-1}$  is a Serre fibration with fiber  $\mathcal{S}(f)$  in the corresponding topologies  $\mathcal{C}^\infty$ .

The following theorem describes the homotopy types of  $\mathcal{S}_{\text{id}}(f)$  and  $\mathcal{O}_f(f)$  for a generic situation. Detailed formulations are given in Theorems 3 and 4 below.

**Theorem 1.** Suppose  $f$  satisfies axioms (A1)-(A3) and has at least one **S**-point. Let also  $n$  be the total number of critical points of  $f$ . Then  $\mathcal{S}_{\text{id}}(f)$  is contractible,  $\pi_i \mathcal{O}_f(f) = \pi_i M$  for  $i \geq 3$ ,  $\pi_2 \mathcal{O}_f(f) = 0$ , and for  $\pi_1 \mathcal{O}_f(f)$  we have the following exact sequence:

$$1 \rightarrow \pi_1 \mathcal{D}(M) \oplus \mathbb{Z}^k \rightarrow \pi_1 \mathcal{O}_f(f) \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 1,$$

where  $\mathcal{G}$  is a certain finite group and  $k \geq 0$ .

**1.1. Structure of the paper.** The exposition of the paper follows the line of [18]. The principal new feature is that we consider **N**-points. This requires additional arguments almost everywhere, therefore in many places we repeat the arguments of [18] with necessary modifications.

In §2 we recall some results concerning the shift map along the orbits of vector fields. §3 describes two constructions related to a smooth function  $f$  on a surface: foliation  $\Delta_f$  by connected components of level-sets of  $f$  and the Kronrod-Reeb

graph  $\Gamma(f)$  of  $f$ . In §4 we introduce three types of critical points **S**, **P**, and **N**. Further in §5 we formulate main results of the paper Theorems 3 and 4 and also discuss sufficient conditions for axiom (A3). In §§6 we put on the Kronrod-Reeb graph of  $f$  additional data which describe combinatorial behavior of diffeomorphisms  $h \in \mathcal{S}(f)$  near **N**-points. §8 contains the proof of Theorems 3. The proof follows the line of [18, Th. 1.3]. The rest of the paper is devoted to the proof of Theorem 4.

**Remark 1.** I must warn the reader that the paper [18] contains the following “dangerous” places which are also corrected in the present and in previous papers by the author.

1) The calculation of homotopy types of stabilizers given in [18, Th. 1.3] is essentially based on the principal result of another paper of mine [15] which unfortunately contains some mistakes. The corrections to [15] are given in [24, 25], where it is also shown that for the case described in [18] the results of [15] holds true, see Theorem 2. Thus [18, Th. 1.3] remains valid,

2) [18, Eq. (8,6)] is not true in general, see Remark 3 and Example 1 for details. This changes the meaning of the group  $G$  in [18, Th. 1.5]: it remains finite however now it is a group of automorphisms of a more complicated object than the Kronrod-Reeb graph of  $f$ , which takes to account orientations of level-sets of  $f$ , see §6.2. A correct formulation of [18, Eq. (8,6)] is given in Lemma 14.

3) In the proof of [18, Th. 1.5] it was claimed without explanations that *a certain **central** extension of  $\pi_1 \mathcal{D}_{\text{id}}(M)$  with a free abelian group  $\mathcal{J}_0$  is just a direct sum*. In general, central extensions of abelian groups even with free abelian groups are not trivial. We will show in Theorem 6 that in our case that extension is trivial.

**1.2. Notations.** Suppose that  $M$  is a non-orientable surface. Then  $p : \widetilde{M} \rightarrow M$  will always be the oriented double covering of  $M$  and  $\xi : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}$  be a  $C^\infty$  involution generating the group  $\mathbb{Z}_2$  of deck transformations. For a function  $f : M \rightarrow P$  we put  $\widetilde{f} = p \circ f : \widetilde{M} \rightarrow P$ .

## 2. SHIFT MAPS ALONG ORBITS OF FLOWS

**2.1.  $r$ -homotopies.** Let  $M, N$  be smooth manifolds and let  $0 \leq r \leq \infty$ . Say that a map  $\Omega : M \times I \rightarrow N$  is an  $r$ -homotopy if the corresponding map  $\omega : I \rightarrow C^r(M, N)$  defined by  $\omega(t)(x) = \Omega(x, t)$  is continuous from the standard topology of  $I$  to the weak topology  $C^r$  of  $C^r(M, N)$ . In other words, all partial derivatives of  $\Omega$  in  $x \in M$  up to order  $r$  continuously depends on  $t \in I$ . If in addition  $\Omega_t : M \rightarrow N$  is an embedding for every  $t \in I$ , then  $\Omega$  will be called an  $r$ -isotopy, see [20].

Thus a usual homotopy is a 0-homotopy. Moreover, every  $C^r$ -map  $M \times I \rightarrow N$  is an  $r$ -homotopy, but not wise verse.

**2.2. Local flow.** Let  $F$  be a smooth vector field on a smooth manifold  $M$  tangent to  $\partial M$ . Then for every  $x \in M$  its *integral trajectory* with respect to  $F$  is a unique mapping

$$o_x : \mathbb{R} \supset (a_x, b_x) \rightarrow M$$

such that  $o_x(0) = x$  and  $\dot{o}_x = F(o_x)$ , where  $(a_x, b_x) \subset \mathbb{R}$  is the maximal interval on which a map with the previous two properties can be defined. Then the following set

$$\text{dom}(F) = \bigcup_{x \in M} x \times (a_x, b_x),$$

is an open neighbourhood of  $M \times 0$  in  $M \times \mathbb{R}$ , and the *local flow* of  $F$  is defined by

$$\mathbf{F} : M \times \mathbb{R} \supset \text{dom}(F) \longrightarrow M, \quad \mathbf{F}(x, t) = o_x(t).$$

If  $M$  is compact, then  $\mathbf{F}$  is defined on all of  $M \times \mathbb{R}$ , e.g. [29]. The set of zeros of  $F$  will be denoted by  $\Sigma_F$ .

**2.3. Shift map.** A subset  $V \subset M$  will be called a *D-submanifold*, if  $V$  is a *connected* submanifold with boundary (possibly with corners) of  $M$  and  $\dim V = \dim M$ . We will also say that  $V$  is a *D-neighbourhood* for each  $z \in \text{Int}V$ .

Let  $V$  be a *D-submanifold*. Denote by  $\text{func}(F, V)$  the subset of  $C^\infty(V, \mathbb{R})$  consisting of functions  $\alpha$  whose graph

$$\Gamma_\alpha = \{(x, \alpha(x)) : x \in V\}$$

is contained in  $\text{dom}(F)$ . Then we can define the following map:

$$(2.1) \quad \varphi(\alpha)(x) = \mathbf{F}(x, \alpha(x)), \quad \alpha \in \text{func}(F, V), \quad x \in V.$$

We will call  $\varphi$  the *shift map along orbits of  $F$  on  $V$*  and denote its image in  $C^\infty(V, M)$  by  $Sh(F, V)$ .

**Definition 1.** Let  $h : V \rightarrow M$  be a smooth map,  $V' \subset V$  a submanifold and  $\alpha : V' \rightarrow \mathbb{R}$  a smooth function. We will say that  $\alpha$  is a **shift function for  $h$  on  $V'$**  if  $h(x) = \mathbf{F}(x, \alpha(x))$  for all  $x \in V'$ .

**2.4. Shift map at a singular point.** Let  $z \in V \cap \Sigma_F$ . Denote by  $\widehat{\mathcal{D}}(F, z)$  the space of at  $z$  germs of orbit preserving diffeomorphisms  $h : (M, z) \rightarrow (M, z)$ . Thus if  $h$  is defined on some neighbourhood  $W$  of  $z$ , then  $h(W \cap o) \subset o$  for every orbit  $o$  of  $F$ .

Let also  $\mathcal{C}_z^\infty(M)$  denotes the space of germs of  $C^\infty$  functions  $\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}$  at  $z$ . Since  $z$  is a singular point for  $F$  we have a well-defined *shift map*

$$\widehat{\varphi}_z : \mathcal{C}_z^\infty(M) \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}(F, z), \quad \widehat{\varphi}_z(\alpha)(x) = \mathbf{F}(x, \alpha(x)).$$

Denote by  $\widehat{Sh}(F, z) \subset \widehat{\mathcal{D}}(F, z)$  the image of  $\widehat{\varphi}_z$ . Then  $\widehat{Sh}(F, z)$  is a *subgroup* of  $\widehat{\mathcal{D}}(F, z)$ , see [15, Eqs. (8),(9)] or [22, Lm. 3.1].

There is a natural homomorphism

$$J_z(h) : \widehat{\mathcal{D}}(F, z) \rightarrow \text{Aut}(T_z M)$$

associating to each  $h \in \widehat{\mathcal{D}}(F, z)$  the corresponding linear automorphism  $T_z h$  of the tangent space at  $z$ .

Choose local coordinates  $(x_1, \dots, x_n)$  at  $z$ . Then we can regard  $J_z$  as a map  $J_z : \widehat{\mathcal{D}}(F, z) \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R})$  associating to each  $h \in \widehat{\mathcal{D}}(F, z)$  its Jacobi matrix at  $z$ .

Let also  $F = (F_1, \dots, F_n)$  be the coordinate functions of  $F$ . Then the following matrix

$$(2.2) \quad \nabla F(z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(z) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(z) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(z) & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(z) \end{pmatrix}$$

will be called the *linear part* of  $F$  at  $z$ .

It is easy to show, [22, Lm. 5.3], that if  $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R})$  then  $J_z(\varphi_V(\alpha)) = J_z(\mathbf{F}_{\alpha(z)}) = e^{\nabla F(z) \cdot t}$ , whence

$$(2.3) \quad J_z(\widehat{Sh}(F, z)) = J_z(\{\mathbf{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}}) = \{e^{\nabla F(z) \cdot t}\}_{t \in \mathbb{R}}.$$

**2.5. Kernel of shift map.** The set  $\ker(\varphi_V) = \varphi_V^{-1}(i_V)$  will be called the *kernel* of  $\varphi_V$ . It consists of all  $\mathcal{C}^\infty$  functions  $\alpha : V \rightarrow \mathbb{R}$  such that  $\mathbf{F}(x, \alpha(x)) = x$  for all  $x \in V$ .

**Lemma 1.** [15] *Let  $\alpha, \beta \in \text{func}(F, V)$ . Then  $\varphi_V(\alpha) = \varphi_V(\beta)$  iff  $\alpha - \beta \in \ker(\varphi_V)$ . In other words*

$$\mathbf{F}(x, \alpha(x)) \equiv \mathbf{F}(x, \beta(x)) \Leftrightarrow \mathbf{F}(x, \alpha(x) - \beta(x)) \equiv x.$$

*Suppose  $V$  is connected and the set  $\Sigma_F$  of singular points of  $F$  is nowhere dense in  $V$ . Then one of the following conditions holds true:*

**Nonperiodic case:**  $\ker(\varphi_V) = \{0\}$  and the shift map

$$\varphi_V : \text{func}(F, V) \rightarrow Sh(F, V)$$

is a bijection. This holds for instance if  $F$  has at least one non-closed orbit, or for some singular point  $z$  of  $F$  the linear part of  $F$  at  $z$  vanishes, i.e.  $\nabla F(z) = 0$ ; or

**Periodic case:**  $\ker(\varphi_V) = \{n\theta\}_{n \in \mathbb{Z}}$  for some  $\mathcal{C}^\infty$  strictly positive function  $\theta : V \rightarrow (0, +\infty)$ . In this case

- every  $x \in V \setminus \Sigma_F$  is periodic so  $\text{func}(F, V) = \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R})$ ,
- there is an open and everywhere dense set  $Q \subset V \setminus \Sigma_F$  such that  $\theta(x) = \text{Per}(x)$  for all  $x \in Q$ ;
- $\varphi_V^{-1} \circ \varphi_V(\alpha) = \{\alpha + n\theta\}$  for every  $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R})$ .

Let  $\mathcal{E}(F, V)$  be the subset of  $\mathcal{C}^\infty(V, M)$  consisting of maps  $h : V \rightarrow M$  such that

- (i)  $h(\omega) \subset \omega$  for every orbit  $\omega$  of  $F$ ;
- (ii) for every singular point  $z \in \Sigma_F$  the corresponding tangeng map  $T_z h : T_z M \rightarrow T_z M$  is an isomorphism.

Let also  $\mathcal{D}(F, V)$  be the subset of  $\mathcal{E}(F, V)$  consisting of immersions  $V \rightarrow M$ .

For  $0 \leq r \leq \infty$  denote by  $\mathcal{E}_{\text{id}}(F, V)^r$  (resp.  $\mathcal{D}_{\text{id}}(F, V)^r$ ) the path component of the identity inclusion  $i_V : V \subset M$  in  $\mathcal{E}_{\text{id}}(F, V)^r$  (resp.  $\mathcal{D}_{\text{id}}(F, V)^r$ ) with respect to the topology  $\mathcal{C}^r$ . It consists of maps  $h \in \mathcal{E}_{\text{id}}(F, V)^r$  (resp.  $h \in \mathcal{D}_{\text{id}}(F, V)^r$ ) which are  $r$ -homotopic to  $i_V$  in  $\mathcal{E}(F, V)$  (resp.  $\mathcal{D}(F, V)$ ).

If  $V = M$ , we will omit  $V$  from notations. Moreover, we will also often omit superscript  $\infty$  and denote  $\mathcal{E}_{\text{id}}(F, V)^\infty$  and  $\mathcal{D}_{\text{id}}(F, V)^\infty$  simply by  $\mathcal{E}_{\text{id}}(F, V)$  and  $\mathcal{D}_{\text{id}}(F, V)$ .

**Lemma 2.** [15, 24] *Let  $H_t : V \times I \rightarrow M$  be an  $r$ -homotopy such that  $H_0 = i_V$  and  $H_t \in \mathcal{E}(F, V)$ . Then there exists a unique  $r$ -homotopy  $\Lambda : (V \setminus \Sigma_F) \times I \rightarrow \mathbb{R}$  such that  $\Lambda_0 = 0$ ,  $\Lambda_t : V \setminus \Sigma_F \rightarrow \mathbb{R}$  is  $\mathcal{C}^\infty$ , and  $H_t(x) = \mathbf{F}(x, \Lambda_t(x))$  for all  $x \in V \setminus \Sigma_F$  and  $t \in I$ .*

*In particular, for every  $h \in \mathcal{E}_{\text{id}}(F, V)^0$  there exists a smooth shift function on  $V \setminus \Sigma_F$ .*

For  $\alpha \in \text{func}(F, V)$  and  $z \in V$  we will denote by  $F(\alpha)$  the Lie derivative of  $\alpha$  along  $F$  at  $z$ . Then, [15, Theorem 19],  $\varphi_V(\alpha)$  is a local diffeomorphism at  $z$  iff  $F(\alpha)(z) \neq -1$ . Put

$$(2.4) \quad \Gamma_V^+ = \{\alpha \in \text{func}(F, V) : F(\alpha) > -1\}.$$

Evidently,  $\Gamma_V^+$  is  $S^1$ -open and convex subset of  $\text{func}(F, V)$ . It also follows from [15, Theorem 25] that

$$(2.5) \quad \Gamma_V^+ = \varphi^{-1}(\mathcal{D}_{\text{id}}(F, V)^\infty).$$

**Lemma 3.** [20] *The following inclusions hold true:*

$$\begin{aligned} Sh(F, V) &\subset \mathcal{E}_{\text{id}}(F, V)^\infty \subset \cdots \subset \mathcal{E}_{\text{id}}(F, V)^r \subset \cdots \subset \mathcal{E}_{\text{id}}(F, V)^0, \\ \varphi_V(\Gamma_V^+) &\subset \mathcal{D}_{\text{id}}(F, V)^\infty \subset \cdots \subset \mathcal{D}_{\text{id}}(F, V)^r \subset \cdots \subset \mathcal{D}_{\text{id}}(F, V)^0. \end{aligned}$$

If  $Sh(F, V) = \mathcal{E}_{\text{id}}(F, V)^r$ , then  $\varphi_V(\Gamma_V^+) = \mathcal{D}_{\text{id}}(F, V)^r$ .

**2.6. Openness of shift map.** We recall here the principal results obtained in [25], see Theorem 2 below.

**Lemma 4.** *Endow  $\text{func}(F, V)$  and  $Sh(F, V)$  with topologies  $\mathcal{C}^\infty$ . If  $\Sigma_F \cap V = \emptyset$  then the shift map  $\varphi_V$  is locally injective, whence the following conditions are equivalent:*

- (1)  $\varphi_V : \text{func}(F, V) \rightarrow Sh(F, V)$  is an open map.
- (2)  $\varphi_V : \text{func}(F, V) \rightarrow Sh(F, V)$  is a local homeomorphism.

Suppose these conditions hold true. Consider the restriction

$$\varphi_V|_{\Gamma_V^+} : \Gamma_V^+ \rightarrow \varphi_V(\Gamma_V^+).$$

If  $\varphi_V$  is **non-periodic**, then  $\varphi_V$  and  $\varphi_V|_{\Gamma_V^+}$  are homeomorphisms onto their images. In particular,  $Sh(F, V)$  and  $\varphi_V(\Gamma_V^+)$  are contractible.

Suppose  $\varphi_V$  is **periodic**. Then the maps  $\varphi_V$  and  $\varphi_V|_{\Gamma_V^+}$  are  $\mathbb{Z}$ -covering maps onto their images, and  $Sh(F, V)$  and  $\varphi_V(\Gamma_V^+)$  are homotopy equivalent to the circle  $S^1$ .

We will be interesting in establishing (1) and (2) of Lemma 4 for the shift map  $\varphi$ , i.e. for the case  $V = M$ . It is convenient to formulate this as the following condition.

(Z) *The shift map  $\varphi : \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow Sh(F)$  is a local homeomorphism with respect to topologies  $\mathcal{C}^\infty$ .*

We will now recall sufficient conditions for (Z) obtained in [25].

Let  $V$  be a compact  $D$ -submanifold, and  $U$  be an open neighbourhood of  $V$ . Then the restriction  $F|_U$  of  $F$  to  $U$  generates a local flow

$$\mathbf{F}_U : U \times \mathbb{R} \supset \text{dom}(\mathbf{F}_U) \longrightarrow U.$$

The corresponding shift map of  $F|_U$  will be denoted by  $\varphi_{U,V}$ . Thus

$$\varphi_{U,V} : \text{func}(F|_U, V) \rightarrow Sh(F|_U, V).$$

Let us introduce the following conditions for  $V$  and  $U$ .

- (A) *The shift map  $\varphi_V : \text{func}(F, V) \rightarrow Sh(F, V)$  is  $\mathcal{C}^\infty$ -open, that is open between the corresponding topologies  $\mathcal{C}^\infty$ ;*
- (B) *The shift map  $\varphi_{U,V} : \text{func}(F|_U, V) \rightarrow Sh(F|_U, V)$  is  $\mathcal{C}^\infty$ -open.*
- (C) *The set  $Sh(F|_U, V)$  is  $\mathcal{C}^\infty$ -open in  $Sh(F, V)$ .*

Finally for each point  $z \in M$  consider the following properties.

- (A1) *There exists a base  $\beta_z = \{V_j\}_{j \in J}$  at  $z$  consisting of compact  $D$ -neighbourhoods of  $z$  such that every  $V \in \beta_z$  satisfies (A).*



- (B1) *There exist an open neighbourhood  $U$  of  $z$  and a base  $\beta_z = \{V_j\}_{j \in J} \subset U$  at  $z$  consisting of compact  $D$ -neighbourhoods such that every  $V \in \beta_z$  satisfies (B).*
- (C1) *There exists a neighbourhood  $U$  of  $z$  every compact  $D$ -submanifold  $V \subset U$  satisfies (C).*
- (R1)  *$z$  is non-periodic and non-recurrent.*
- (R2)  *$z$  is periodic and the Poincaré return map of the orbit  $o_z$  of  $z$  is the identity.*
- (S1)  *$z \in \Sigma_F$  and there exists an  $F$ -invariant neighbourhood  $W$  of  $z$ .*
- (S2)  *$z \in \Sigma_F$  and there exists a neighbourhood  $W$  of  $z$  with the following property: if  $x \in \partial W = \overline{W} \setminus W$  then there exists a neighbourhood  $\gamma \subset o_x$  of  $x$  in the orbit  $o_x$  such that  $\gamma \cap \partial W = \{x\}$ .*

**Theorem 2.** [25] *The following implications hold true:*

- 1) (A)  $\Leftrightarrow$  (B) & (C);
- 2) (A1) for every  $z \in M \Rightarrow$  (Z);
- 3) (R1)  $\vee$  (R2)  $\Rightarrow$  (A1);
- 4) (S1)  $\vee$  (S2)  $\Rightarrow$  (C1).

*In particular, suppose that every regular point  $z \in M \setminus \Sigma_F$  of  $F$  satisfies either of the conditions (R1), (R2), and every singular point  $z \in \Sigma_F$  of  $F$  satisfies (S1), (S2), and (B1). Then the shift map  $\varphi : \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow Sh(F)$  is either a homeomorphism or a  $\mathbb{Z}$ -covering map between topologies  $\mathcal{C}^\infty$ .*

**Remark 2.** Statement 1) of Theorem 2 in particular implies that if the map  $\varphi_V$  is open (condition (A)), then the map  $\varphi_{U,V}$  is open for *any* open neighbourhood  $U$  of  $V$  (condition (B)).

### 3. FUNCTIONS ON SURFACES

In this section we will assume that  $M$  is a compact surface and  $f : M \rightarrow P$  a  $\mathcal{C}^\infty$  map satisfying the following conditions:

- (i)  $f$  takes constant value on each connected component of  $\partial M$
- (ii) all critical points of  $f$  are isolated and contained in  $\text{Int}M$ .

Let  $z \in \text{Int}M$ . Then in some local charts at  $z$  in  $M$  and at  $f(z)$  in  $P$  we can regard  $f$  as a function

$$(3.1) \quad (M, z) \supset (\mathbb{C}, 0) \xrightarrow{\bar{f}} (\mathbb{R}, 0) \subset (P, f(z))$$

such that  $z = 0 \in \mathbb{C}$  and  $\bar{f}(0) = 0 \in \mathbb{R}$ .

We say that  $z$  is a *local extreme* for  $f$  if it is a local extreme for  $\bar{f}$ . Moreover, if we fix an orientation of  $P$  and restrict ourselves to representations (3.1) in which the embedding  $\mathbb{R} \subset P$  preserves orientation, then  $z$  will be called a *local maximum (minimum)* of  $f$  whenever so is  $0 \in \mathbb{C}$  for  $\bar{f}$ .

**3.1. Isolated critical points.** Suppose that  $z \in \text{Int}M$  is an isolated critical point of  $f$ . Then there exists a germ of a *homeomorphism*  $h : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  such that

$$\bar{f} \circ h(z) = \begin{cases} \pm|z|^2, & \text{if } 0 \text{ is a local extremum, [5],} \\ \text{Re}(z^n) & \text{for some } n \in \mathbb{N}, \text{ otherwise, [33].} \end{cases}$$

If 0 is not a local extreme for  $f$ , then the number  $n$  does not depend on a particular choice of  $h$ , and in this case  $z$  will be called a (*generalized*)  $n$ -*saddle*.

The topological structure of the foliation  $\Delta_f$  near local extremes, 1-, and 3-saddles is illustrated in Figure 3.1. The corresponding critical components of level-set of  $f$  are designed in bold.

**3.2. Foliation  $\Delta_f$  of  $f$ .** Notice that  $f$  defines on  $M$  a certain one-dimensional foliation  $\Delta_f$  with singularities in the following way: *a subset  $\omega \subset M$  is a leaf of  $\Delta_f$  if and only if  $\omega$  is either a critical point of  $f$  or a connected component of the*

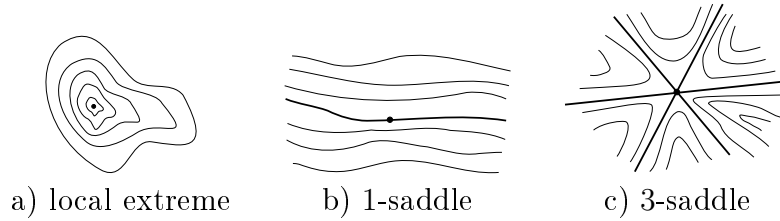


FIGURE 3.1. Isolated critical points

set  $f^{-1}(c) \setminus \Sigma_f$  for some  $c \in P$ . Thus the leaves of  $\Delta_f$  are 1-dimensional submanifolds of  $M$  and singular points of  $f$ .

Denote by  $\Delta_f^{\text{reg}}$  the union of all leaves of  $\Delta_f$  homeomorphic to the circle and by  $\Delta_f^{\text{cr}}$  the union of all other leaves. It follows from (i) that  $\partial M \subset \Delta_f^{\text{reg}}$ .

The leaves in  $\Delta_f^{\text{reg}}$  (resp.  $\Delta_f^{\text{cr}}$ ) will be called *regular* (resp. *critical*). Similarly, connected components of  $\Delta_f^{\text{reg}}$  (resp.  $\Delta_f^{\text{cr}}$ ) will be called *regular* (resp. *critical*) components of  $\Delta_f$ .

Evidently, every critical leaf of  $\Delta_f^{\text{cr}}$  is either homeomorphic to an open interval or is a singular point of  $f$ . If  $f$  has at least one critical point or  $\partial M = \emptyset$ , then every regular component of  $\Delta_f$  is diffeomorphic with  $S^1 \times (0, 1)$ .

Denote by  $\mathcal{D}(\Delta_f)$  the group of diffeomorphisms  $h$  of  $M$  such that  $h(\omega) = \omega$  for every leaf  $\omega$  of  $\Delta_f$ , and let  $\mathcal{D}^+(\Delta_f)$  be its subgroup consisting of diffeomorphisms of  $M$  preserving orientations of all 1-dimensional leaves of  $\Delta_f$ .

For each critical point  $z \in \Sigma_f$  we will denote by  $\widehat{\mathcal{D}}(\Delta_f, z)$  the group of germs of diffeomorphisms  $h : (M, z) \rightarrow (M, z)$  at  $z$  preserving leaves of  $\Delta_f$ . More precisely, let  $V$  be a neighbourhood of  $z$  and  $h : V \rightarrow M$  be an embedding such that  $h(z) = z$ . Then  $h \in \widehat{\mathcal{D}}(\Delta_f, z)$  if and only if  $h(\omega \cap V) \subset \omega$  for each leaf  $\omega$  of  $\Delta_f$ .

**Lemma 5.** [18, Lm. 3.4] *If  $f$  satisfies (i) and (ii), then*

$$\mathcal{D}_{\text{id}}^+(\Delta_f)^r = \mathcal{D}_{\text{id}}(\Delta_f)^r = \mathcal{S}_{\text{id}}(f)^r, \quad 0 \leq r \leq \infty.$$

*Proof.* In [18, Lm. 3.4] the proof was actually given for the case  $r = 0$ . However literally the same arguments hold for all  $r$  if we replace everywhere in [18, Lm. 3.4] the word “isotopy” with “ $r$ -isotopy”.  $\square$

**3.3. KR-graph of  $f$ .** Let  $\Gamma(f)$  be the *Kronrod-Reeb graph* (*KR-graph*) of  $f$ , e.g. [12, 3, 35, 18]. This graph is obtained from  $M$  by shrinking every connected component of every level-set of  $f$  to a point, see Figure 3.2. Then we have the following decomposition of  $f$ :

$$f = f_\Gamma \circ p_f : M \xrightarrow{p_f} \Gamma(f) \xrightarrow{f_\Gamma} P,$$

where  $p_f$  is a factor-map and  $f_\Gamma$  is the induced function which will be called *KR-function* for  $f$ . Evidently, the edges (resp. vertexes) of  $\Gamma(f)$  correspond to regular (resp. critical) components of  $\Delta_f$ .

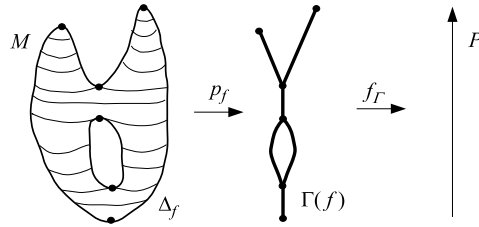


FIGURE 3.2. Foliation  $\Delta_f$  and KR-graph  $\Gamma(f)$  of  $f$

3.4. **The action of  $\mathcal{S}(f)$  on  $\Gamma(f)$ .** Evidently, each  $h \in \mathcal{S}(f)$  interchanges the leaves of  $\Delta_f$  and even yields a homeomorphism of  $\Gamma(f)$ . So we have a natural homomorphism

$$\lambda : \mathcal{S}(f) \rightarrow \text{Aut}(\Gamma(f)).$$

It follows that  $h \in \ker(\lambda)$  iff  $h$  preserves every regular leaf of  $\Delta_f^{\text{reg}}$ . On the other hand it is easy to construct examples when  $h \in \ker(\lambda)$  interchanges critical leaves of  $\Delta_f$ . It follows that

$$\mathcal{D}^+(\Delta_f) \subset \mathcal{D}(\Delta_f) \subset \ker(\lambda).$$

**Remark 3.** I should warn the reader that [18, Eq. (8.6)] wrongly claims that

$$\mathcal{D}^+(\Delta_f) \cap \mathcal{D}_{\text{id}}(M) = \ker(\lambda) \cap \mathcal{D}_{\text{id}}(M).$$

In fact, the presented proof contains a misprint and a mistake: it refers to [18, Lm. 3.6(2)] which does not exist instead of [18, Lm. 3.5(2)].

Nonetheless, [18, Lm. 3.5(2)] is not applicable since it claims about  $h \in \mathcal{S}_{\text{id}}(f)$  but not about  $h \in \mathcal{D}^+(\Delta_f) \cap \mathcal{D}_{\text{id}}(M)$ : the difference is that every  $h \in \mathcal{S}_{\text{id}}(f)$  is isotopic to  $\text{id}_M$  via an  $f$ -preserving isotopy, while  $h \in \mathcal{D}^+(\Delta_f) \cap \mathcal{D}_{\text{id}}(M)$  also preserves  $f$  and is isotopic to  $\text{id}_M$  but the isotopy is not assumed to be  $f$ -preserving. On the other hand, it follows from [18, Lm. 3.5(1)] that [18, Eq. (8.6)] holds for orientable surfaces. The following example shows that a difference between  $\mathcal{D}^+(\Delta_f) \cap \mathcal{D}_{\text{id}}(M)$  and  $\ker(\lambda) \cap \mathcal{D}_{\text{id}}(M)$  appears indeed.

**Example 1.** Let  $f : \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}$  be a Morse function on a projective plane  $\mathbb{R}P^2$  with exactly one minimum  $x$ , one saddle  $y$  and one maximum  $z$ . Regard  $\mathbb{R}P^2$  as a space obtained from unit 2-disk  $D^2$  by identifying the opposite points on its boundary  $\partial D^2$ . The foliation  $\Delta_f$  on  $D^2$  and the KR-graph  $\Gamma(f)$  of  $f$  are shown in Figure 3.3. The vertexes of  $\Gamma(f)$

are denoted by the same letters as the corresponding critical points of  $f$  and the up-down arrows show how to glue the boundary of  $D^2$ .

Let  $h : D^2 \rightarrow D^2$  be a mirror symmetry with respect to the horizontal line passing through  $x$ , see Figure 3.3. Then  $h$  trivially acts on  $\Gamma(f)$  though it changes orientations of all regular leaves. On the other hand, since  $\mathcal{D}(\mathbb{RP}^2)$  is connected, it follows that  $h$  is isotopic to  $\text{id}_{\mathbb{RP}^2}$ . Thus

$$h \in (\ker(\lambda) \setminus \mathcal{D}^+(\Delta_f)) \cap \mathcal{D}_{\text{id}}(\mathbb{RP}^2).$$

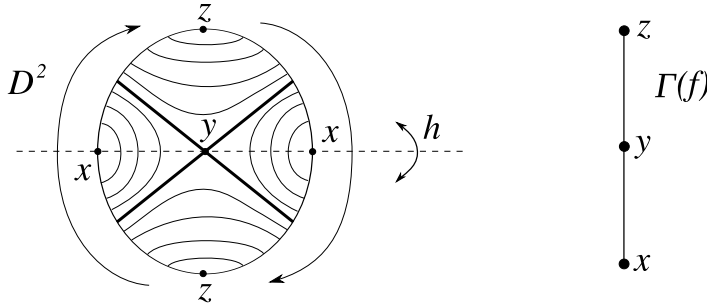


FIGURE 3.3

#### 4. SPECIAL CRITICAL POINTS

In this section we introduce three types of critical point which will play a key role throughout the paper.

**Definition 2.** (*Special critical points*) Let  $z \in \Sigma_f$  be an isolated critical point of  $f$ . We will say that  $z$  is **special** for  $f$  if there exists a neighbourhood  $U$  of  $z$  and a vector field  $F$  on  $U$  with the following properties:

(SP1)  $df(F) \equiv 0$  and  $z$  is a unique singular point of  $F$ ;

(SP2) *there is a base  $\beta_z = \{V_j\}_{j \in J}$  of compact connected  $D$ -neighbourhoods of  $z$  such that for each  $V \in \beta_z$  the shift mapping  $\varphi_V : \text{func}(F, V) \rightarrow \text{Sh}(F, V)$  is a local homeomorphism with respect to topologies  $\mathcal{C}^\infty$ .*

*The corresponding vector field  $F$  will be called **special** as well.*

Let  $z \in \Sigma_f$  be a special critical point of  $f$  and  $F$  be a vector field at  $z$  satisfying (SP1) and (SP2). Then by (SP1) the orbits of  $F$  coincide with the level-curves of  $f$  near  $z$ , whence

$$(4.1) \quad \widehat{D}(F, z) = \widehat{D}(\Delta_f, z).$$

Moreover, it follows from Remark 2 that in Definition 2 a neighbourhood  $U$  can be taken arbitrary small.

**Definition 3** (S-point). *Say that  $z$  is an S-point for  $f$  if  $z$  is not a local extreme for  $f$ , (i.e. a **saddle** point) and it has a vector field  $F$  satisfying (SP1) and (SP2) and such that  $\widehat{\text{Sh}}(F, z) = \widehat{D}(F, z)$ .*

*Such a vector field will be called **special** for  $z$ .*

Now let  $z$  be a local extreme of  $f$ . Then we can assume that  $U$  is connected and  $F$ -invariant, see §3.1. It also follows that all the orbits of  $F$  except for  $z$  are periodic and wrap around  $z$ . Let  $\theta : U \setminus z \rightarrow (0, +\infty)$  be the function associating to each  $x \in U \setminus z$  its period  $\text{Per}(x)$ . Then it easily follows from smoothness of the Poincaré's first return map that  $\theta$  is  $\mathcal{C}^\infty$  on  $U \setminus z$  but it can be even discontinuous at  $z$ . We will call  $\theta$  the *period function* for  $F$ .

It is shown in [26] that after some linear change of coordinates the linear part  $\nabla F(z)$  of  $F$  at  $z$ , see (2.2), can be reduced to one of the following forms:

$$(4.2) \quad a) \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad b) \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad c) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

for some  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . By (2.3) the image  $J_z(\widehat{Sh}(F, z))$  of  $\widehat{Sh}(F, z)$  under  $J_z$  coincides with  $\{e^{\nabla F(z) \cdot t}\}_{t \in \mathbb{R}}$ , whence we obtain the following three possibilities for  $J_z(\widehat{Sh}(F, z))$ :

(4.3)

$$a) SO(2), \quad b) \left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}, \quad c) \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

**Definition 4 (P-point).** Let  $z$  be a special local extreme of  $f$ . Say that  $z$  is a **P-point** for  $f$  if there exists a vector field  $F$  on some neighbourhood  $U$  of  $z$  satisfying (SP1) and (SP2) and such that the corresponding period function

$$\theta : U \setminus z \rightarrow (0, +\infty)$$

smoothly extends to all of  $U$ .

In this case  $F$  will also be called **special**.

**Lemma 6.** [38, 26] Let  $z \in \Sigma_f$  be a local extreme of  $f$ , and  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  be local coordinates at  $z$  in which  $z = 0$ . Let  $F = (F_1, F_2)$  be a  $C^\infty$  vector field near  $z$  such that  $F(f) \equiv 0$  and  $z$  is a unique singular point of  $F$ . Then the following conditions (P1)-(P6) are equivalent.

- (P1)  $z$  is a P-point for  $f$  and  $F$  is the corresponding special vector field for  $z$ ;
- (P2) The eigen values of  $\nabla F(z)$  are non-zero purely imaginary, so  $\nabla F(z)$  can be reduced to the form a) of (4.2).
- (P3) There are germs at  $z$  of  $C^\infty$  functions  $\beta, \bar{X}, \bar{Y} : U \rightarrow \mathbb{R}$  such that  $\beta(z) \neq 0$ , and  $\bar{X}$  and  $\bar{Y}$  are **flat** at  $z$ , and  $F$  is  $C^\infty$  equivalent to the following vector field

$$\beta(x^2 + y^2) \left( -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right) + \bar{X} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{Y} \frac{\partial}{\partial y}.$$

- (P4) There exist a connected smooth 2-submanifold  $V \subset U$  such that  $z \in \text{Int}V$  and the shift map  $\varphi_V$  is periodic, i.e.  $\ker(\varphi_V) \neq \{0\}$ .



(P5) For every connected smooth 2-submanifold  $V \subset U$  the shift map  $\varphi_V$  is periodic.

(P6)  $J_z(\widehat{Sh}(F, z))$  is conjugate in  $GL(2, \mathbb{R})$  to  $SO(2)$ .

In these cases  $\widehat{Sh}(F, z) = \widehat{D}^+(F, z)$ ,  $\ker(\varphi_V) = \{n\theta|_V\}_{n \in \mathbb{Z}}$  for any connected 2-submanifold  $V \subset U$ .

Moreover, there are  $\mathcal{C}^\infty$  germs  $g, \mu : U \rightarrow \mathbb{R}$  at  $z$  such that  $\mu$  is flat at  $z = 0$  and  $f$  is  $\mathcal{C}^\infty$  equivalent to the function  $g(x^2 + y^2) + \mu(x, y)$ .

If either of conditions (P1)-(P6) is violated, then

$$\lim_{x \rightarrow z} \theta(z) = +\infty.$$

*Proof.* Equivalence (P1) $\Leftrightarrow$ (P2) $\Leftrightarrow$ (P3) was established in [26]. In fact F. Takens [38] described normal forms for vector fields satisfying (P2). He proved that there are two types of such forms. The first one is described by (P3). Moreover, it was observed in [26] that vector fields of the second type have non-closed orbits near  $z$ , whence in our case  $F$  can belong only to the first type. This implies (P2) $\Rightarrow$ (P3). The proof of (P3) $\Rightarrow$ (P1) $\Rightarrow$ (P2) is one of the main results of [26].

(P4) $\Rightarrow$ (P1). Suppose  $\ker(\varphi_V) = \{n\nu\}_{n \in \mathbb{Z}}$  for some  $\mathcal{C}^\infty$  function  $\nu : V \rightarrow (0, +\infty)$ . Then by Lemma 1  $\nu = \text{Per} \equiv \theta$  on open and every where dense subset  $Q \subset V \setminus \{z\}$ , whence  $\nu = \theta$  on all of  $V \setminus \{z\}$ , and thus  $\theta$  extends to a  $\mathcal{C}^\infty$  function  $\nu$  near  $z$ .

(P1) $\Rightarrow$ (P5). Suppose  $\theta$  is  $\mathcal{C}^\infty$  on all of  $U$  and let  $V \subset U$  be a 2-submanifold. Then  $\mathbf{F}(x, \theta(x)) = x$  for all  $x \in V$ , whence  $\theta|_V \in \ker(\varphi_V) \neq \{0\}$ . By the previous arguments,  $\ker(\varphi_V) = \{n\theta|_V\}_{n \in \mathbb{Z}}$ .

(P5) $\Rightarrow$ (P4) is evident, and (P2) $\Leftrightarrow$ (P6) follows from (4.3).

All other statements are also proved in [26].  $\square$

**Definition 5 (N-point).** Let  $z$  be a special local extreme of  $f$ . Say that  $z$  is an **N-point** for  $f$  if there exists a vector field  $F$  near  $z$  satisfying (SP1) and (SP2) and such that

- (i) the corresponding period function  $\theta : U \setminus \{z\} \rightarrow (0, +\infty)$  can not be continuously extended to all of  $U$ , so by Lemma 6  $\lim_{x \rightarrow z} \theta(x) = +\infty$ ;
- (ii)  $\ker(J_z) \subset \widehat{Sh}(F, z)$ ;
- (iii) if  $\nabla F(z) = 0$ , then  $J_z(\widehat{\mathcal{D}}(F, z))$  is finite.

Again, such a vector field will be called **special**.

Condition (ii) means that if  $h \in \widehat{\mathcal{D}}(F, z)$  and  $J_z(h) = \text{id}$  then there exists a germ of a  $\mathcal{C}^\infty$  function  $\alpha \in \mathcal{C}_z^\infty(M)$  such that  $h(x) = \mathbf{F}(x, \alpha(x))$  for all  $x$  sufficiently close to  $z$ .

Consider the following subsets of  $\text{GL}(2, \mathbb{R})$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{++} &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}, & \mathcal{A}_{--} &= \left\{ \begin{pmatrix} -1 & t \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}, \\ \mathcal{A}_{+-} &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}, & \mathcal{A}_{-+} &= \left\{ \begin{pmatrix} -1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}, \end{aligned}$$

$$\mathcal{A}_+ = \mathcal{A}_{++} \cup \mathcal{A}_{--}, \quad \mathcal{A} = \mathcal{A}_{++} \cup \mathcal{A}_{--} \cup \mathcal{A}_{-+} \cup \mathcal{A}_{+-}.$$

Then  $\mathcal{A}_+ \subset \mathcal{A}$  are subgroups of  $\text{GL}(2, \mathbb{R})$ ,  $\mathcal{A}_{++}$  is the unity component of both  $\mathcal{A}$  and  $\mathcal{A}_+$ ,

$$\mathcal{A}_+/\mathcal{A}_{++} \approx \mathbb{Z}_2, \quad \mathcal{A}/\mathcal{A}_{++} \approx \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.$$

**Lemma 7.** [23] Let  $z$  be an N-point of  $f$  and  $F$  be a special vector field for  $z$ . Then the following statements hold.

(N1)  $\nabla F(z)$  is nilpotent, whence it is similar to one of the matrices b) or c) of (4.2).

(N2) If  $\nabla F(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , see b) of (4.2), then

$$(4.4) \quad J_z(\widehat{Sh}(F, z)) = \mathcal{A}_{++},$$

$$(4.5) \quad \widehat{Sh}(F, z) = J_z^{-1}(\mathcal{A}_{++}),$$

$$(4.6) \quad J_z(\widehat{\mathcal{D}}^+(F, z)) \subseteq \mathcal{A}_+,$$

$$(4.7) \quad J_z(\widehat{\mathcal{D}}(F, z)) \subseteq \mathcal{A}.$$

So, either  $\widehat{Sh}(F, z) = \widehat{\mathcal{D}}^+(F, z)$  or  $\widehat{\mathcal{D}}^+(F, z)/\widehat{Sh}(F, z) \approx \mathbb{Z}_2$ , and  $\widehat{\mathcal{D}}^+(F, z)/\widehat{Sh}(F, z)$  is a subgroup of  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ .

(N3) If  $\nabla F(z) = 0$ , see c) of (4.2), then  $\ker(J_z) = \widehat{Sh}(F, z)$ , and  $J_z(\widehat{\mathcal{D}}^+(F, z))$  is a finite cyclic subgroup of  $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$  of some order  $n_z$ , so  $\widehat{\mathcal{D}}^+(F, z)/\widehat{Sh}(F, z) \approx \mathbb{Z}_{n_z}$ . If in addition  $\widehat{\mathcal{D}}(F, z) \neq \widehat{\mathcal{D}}^+(F, z)$ , then  $\widehat{\mathcal{D}}^+(F, z)/\widehat{Sh}(F, z)$  is a dihedral group  $\mathbb{D}_{n_z}$ .

*Proof.* (N1) follows from (P6) and Eq. (4.2).

(N2). Eq. (4.4) follows from (2.3). To prove Eq. (4.5) consider  $h \in J_z^{-1}(\mathcal{A}_{++})$ . Since  $J_z(\widehat{Sh}(F, z)) = \mathcal{A}_{++}$ , there exists  $g \in \widehat{Sh}(F, z)$  such that  $J_z(g) = J_z(h)$ . Hence

$$g^{-1} \circ h \in \ker(J_z) \subset \widehat{Sh}(F, z),$$

whence  $h \in \widehat{Sh}(F, z)$  as well.

Eq. (4.7) is proved in [26], whence

$$J_z(\widehat{\mathcal{D}}^+(F, z)) \subset \mathcal{A} \cap \mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R}) = \mathcal{A}_+.$$

This proves Eq. (4.6).

(N3) follows from the well-known fact that every finite subgroup of  $\mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$  is cyclic.  $\square$

Due to (N2) and (N3) of Lemma 7 we will distinguish two types of **N**-points.

**Definition 6.** An  $\mathbf{N}$ -point  $z$  of  $f$  will be called an **NN-point** if  $\nabla F(z)$  is non-zero nilpotent. Otherwise,  $\nabla F(z) = 0$  and we will call  $z$  an **NZ-point**.

4.1. **Examples.** Let  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  be a homogeneous polynomial without multiple linear factors, that is

$$(4.8) \quad f = L_1 \cdots L_a \cdot Q_1^{q_1} \cdots Q_b^{q_b},$$

where  $L_i$ , ( $i = 1, \dots, a$ ), is a non-zero linear function,  $Q_j$ , ( $j = 1, \dots, b$ ), is an irreducible over  $\mathbb{R}$  (definite) quadratic form,  $q_j \geq 1$ ,  $L_i/L_{i'} \neq \text{const}$  for  $i \neq i'$ , and  $Q_j/Q_{j'} \neq \text{const}$  for  $j \neq j'$ . Put

$$D = Q_1^{q_1-1} \cdots Q_b^{q_b-1}.$$

Then  $f = L_1 \cdots L_a \cdot Q_1 \cdots Q_b \cdot D$  and it is easy to see that  $D$  is the greatest common divisor of the partial derivatives  $f'_x$  and  $f'_y$ . The following polynomial vector field on  $\mathbb{R}^2$ :

$$F(x, y) = -(f'_y/D) \frac{\partial}{\partial x} + (f'_x/D) \frac{\partial}{\partial y}$$

will be called the *reduced Hamiltonian* vector field of  $f$ . In particular, if  $f$  has no multiple factors, i.e.  $l_i = q_j = 1$  for all  $i, j$ , then  $D \equiv 1$  and  $F$  is the usual *Hamiltonian* vector field of  $g$ .

Notice that if  $f$  had multiple linear factors, then  $0 \in \mathbb{R}^2$  would not be an isolated critical point.

**Lemma 8.** The origin  $0 \in \mathbb{R}^2$  is a **special** critical point of  $f$  belonging to one of the types **S**, **P**, or **N**, and  $F$  is the corresponding special vector field. More precisely,

- (1) if  $a > 0$ , then  $0$  is an **S-point** for  $f$ ;
- (2) if  $a = 0$  and  $b = 1$ , i.e.  $f = Q_1^{q_1}$ , and thus in some local coordinates  $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{q_1}$ , then  $0 \in \mathbb{R}^2$  is a **P-point** of  $f$ ;
- (3) otherwise, when  $a = 0$  and  $b \geq 2$ , so  $f = Q_1^{q_1} \cdots Q_b^{q_b}$ , then  $0 \in \mathbb{R}^2$  is an **N-point** (even an **NZ-point**) of  $f$ .

*Proof.* The assumption (SP1) of Definition 2 that  $F(f) \equiv 0$  is evident, while (SP2) is proved in [25]. Hence  $0 \in \mathbb{R}^2$  is special.

(1) If  $a > 0$ , then the identity  $\widehat{Sh}(F, z) = \widehat{D}(F, z)$  follows from [17, 22], see [22, Th. 11.1].

(2) Suppose  $a = 0$  and  $b = 1$ . Then we can assume that  $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{a_1}$ , whence  $F(x, y) = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$ . Hence by (P2) of Lemma 6  $0$  is a  $\mathbf{P}$  point for  $f$ . Moreover, the assumption (SP2) of the Definition 2 is independently reproved in [26].

(3) Suppose  $a = 0$  and  $b \geq 2$ . Then (i) of Definition 5 is established in [26], and (ii) and (iii) in [17, 22], see [22, Th. 7.1 & 11.1]. It is also easy to see that  $\nabla F(0) = 0$ , so  $0$  is an  $\mathbf{NZ}$ -point.  $\square$

**4.2. Extension of shift functions.** In this paragraph we prove two lemmas about extensions of shift functions.

**Lemma 9.** *Let  $z$  be a special critical point of  $f$  being a local extreme,  $F$  be the corresponding special vector field defined on some neighbourhood  $U$  of  $z$ ,  $W \subset V$  be two open connected  $F$ -invariant neighbourhoods of  $z$  such that  $\overline{W} \subset V$ , and let  $h : V \rightarrow V$  be a diffeomorphism preserving orientation and orbits of  $F$ .*

(1) *Let  $Y \subset V \setminus \{z\}$  be any open connected subset and  $\alpha : Y \rightarrow \mathbb{R}$  be any shift function for  $h$  on  $Y$ . If  $z$  is a  $\mathbf{P}$ -point for  $f$ , then  $\alpha$  uniquely extends to a unique  $\mathcal{C}^\infty$  shift function for  $h$  on all of  $V$ .*

(2) *Any shift function  $\alpha : W \rightarrow \mathbb{R}$  for  $h$  on  $W$  uniquely extends to a  $\mathcal{C}^\infty$  shift function for  $h$  on all of  $V$ .*

*Proof.* Since  $h$  preserves orientation, it is not hard to show that  $h$  has a  $\mathcal{C}^\infty$  shift function  $\beta : V \setminus \{z\} \rightarrow \mathbb{R}$ , see [26]. Such a function is defined up to a summand  $n\theta$ , ( $n \in \mathbb{Z}$ ). In

particular, any shift function for  $h$  defined on  $Y \subset V \setminus \{z\}$  coincides with  $\beta + n\theta$  for some  $n \in \mathbb{Z}$ .

(1) Suppose  $z$  is a P-point, so  $\theta$  extends to  $\mathcal{C}^\infty$  function on  $V$ . As just noted  $\alpha = \beta + n\theta$  on  $Y$  for some  $n$ .

We claim that  $\beta$  extends to a  $\mathcal{C}^\infty$  function on  $V$ . Indeed, by Lemma 6  $h \in \widehat{\mathcal{D}}(F, z) = \widehat{Sh}(F, z)$ , so  $h$  has a  $\mathcal{C}^\infty$  shift function  $\beta'$  on some neighbourhood of  $z$ . Then  $\beta' = \beta + k\theta$  for some  $k \in \mathbb{Z}$ . Since  $\beta'$  and  $\theta$  are  $\mathcal{C}^\infty$  near  $z$ , so is  $\beta$ .

Hence  $\alpha$  also uniquely extends to a  $\mathcal{C}^\infty$  function  $\beta + n\theta$  on  $V$ .

(2) We have that  $\alpha = \beta + n\theta$  on  $W \setminus \{z\}$  for some  $n$ , though  $\beta$  and  $\theta$  are even not defined at  $z$ . On the other hand they are  $\mathcal{C}^\infty$  on  $V \setminus \{z\}$ , so we define  $\alpha$  on  $V \setminus W$  by  $\alpha = \beta + n\theta$ . Then  $\alpha$  is  $\mathcal{C}^\infty$  on all of  $V$ .  $\square$

**Lemma 10.** *Let  $z \in \Sigma_f$  be a critical point of  $f$  of either of types S or P or N,  $F$  be a special vector field for  $z$  defined on some neighbourhood  $U$  of  $z$  containing no other critical points of  $f$ ,  $V \subset U$  be an open neighbourhood of  $z$ , and  $\widehat{V} = V \setminus \{z\}$ . Let also  $H : V \times I \rightarrow U$  be an  $r$ -homotopy in  $\mathcal{E}(F, V)$  such that  $H_0 = i_V : V \subset U$ , and  $\Lambda : \widehat{V} \times I \rightarrow \mathbb{R}$  be a unique  $r$ -homotopy such that  $\Lambda_0 = 0$  and  $\Lambda_t$  is a smooth shift function for  $H_t$  on  $\widehat{V}$  for every  $t \in I$ , see Lemma 2. If  $z$  is an N-point suppose in addition that  $r \geq 1$ . Then for each  $t \in I$  the function  $\Lambda_t$  extends to a  $\mathcal{C}^\infty$  function on all of  $V$ .*

*Proof.* First we show that  $H_t \in \widehat{Sh}(F, z)$  for each  $t \in I$ , i.e.  $H_t$  has a  $\mathcal{C}^\infty$  shift function  $\alpha_t$  on some neighbourhood  $W$  of  $z$  in  $V$ .

Indeed, since  $H_0 = i_V$ , it follows the germ of  $H_t$  at  $z$  belongs to  $\widehat{\mathcal{D}}^+(F, z)$ . Hence if  $z$  is either an S- or a P-point, then by Definitions 3 and 4  $H_t \in \widehat{Sh}(F, z)$ .

Suppose  $z$  is an **N**-point. Then by assumption  $r \geq 1$ , so the matrix  $J_z(H_t)$  continuously depends on  $t$ . If  $\nabla F(z)$  is non-zero nilpotent, then we get from (N3) of Lemma 7 that  $J_z(H_t)$  belongs to the unity component  $\mathcal{A}_{++}$  of the group  $A$  as well as  $J_z(H_0) = \text{id}$ . Hence  $H_t \in J_z^{-1}(\mathcal{A}_{++}) = \widehat{Sh}(F, z)$ .

Similarly, if  $\nabla F(z) = 0$ , then the set of possible values for  $J_z(H_t)$  is finite, whence  $J_z(H_t) = J_z(H_0) = \text{id}$  for all  $t \in I$ . Therefore by (ii) of Definition 5  $H_t \in \ker(J_z) \subset \widehat{Sh}(F, z)$  as well.

Thus  $\Lambda_t$  and  $\alpha_t$  are shift functions for  $H_t$  on some neighbourhood connected neighbourhood  $W$  of  $z$ , whence

$$\Lambda_t - \alpha_t \in \ker(\varphi_{\widehat{W}}),$$

where  $\widehat{W} = W \setminus \{z\}$ .

If  $z$  is an **S**-point, then  $\widehat{W}$  contains non-closed orbits of  $F$ , whence  $\ker(\varphi_{\widehat{W}}) = \{0\}$ . Therefore  $\Lambda_t = \alpha_t$  is  $\mathcal{C}^\infty$  on  $\widehat{W}$ . Thus if we put  $\Lambda_t(z) = \alpha_t(z)$  then  $\Lambda_t$  will become  $\mathcal{C}^\infty$  on all of  $V$ .

Suppose that  $z$  is a **P**-point. Then  $\ker(\varphi_{\widehat{W}}) = \{n\theta\}_{n \in \mathbb{Z}}$ , so  $\Lambda_t - \alpha_t = n\theta$  for some  $n \in \mathbb{Z}$ . But by Definition 4  $\theta$  smoothly extends to all of  $W$ , whence so does  $\Lambda_t = \alpha_t + n\theta$ .

Suppose that  $z$  is an **N**-point, so  $\lim_{x \rightarrow z} \theta(x) = +\infty$ . This implies that the shift map  $\varphi_W$  is non-periodic, so  $\alpha_t$  is a unique shift function for  $H_t$  on  $W$ . Notice that by assumption  $r \geq 1$ , so the restriction  $H : W \times I \rightarrow U$  is a 1-homotopy in  $Sh(F, W)$  having a shift function  $\Lambda : \widehat{W} \times I \rightarrow \mathbb{R}$  such that  $\Lambda_0 = 0$  is  $\mathcal{C}^\infty$  on  $W$ . Then the main result of [24] is applicable to this situation and claims that  $\Lambda_t = \alpha_t$  on  $\widehat{W}$  for all other  $t \in I$ . Hence  $\Lambda_t$  smoothly extends to all of  $V$ .  $\square$

## 5. MAIN RESULTS

The sets of S-, P-, and S-points of  $f$  will be denoted by  $\Sigma_f^S$ ,  $\Sigma_f^P$ , and  $\Sigma_f^N$  respectively. The following Theorems 3 and 4 extend the results of [18, 19].

**Theorem 3.** c.f. [18, Th. 1.3]. *Suppose that  $f : M \rightarrow P$  satisfies axioms (A1) and (A2). Then*

$$(5.1) \quad \mathcal{S}_{\text{id}}(f)^\infty = \cdots = \mathcal{S}_{\text{id}}(f)^2 = \mathcal{S}_{\text{id}}(f)^1.$$

Moreover, each of the following conditions implies that

$$\mathcal{S}_{\text{id}}(f)^1 = \mathcal{S}_{\text{id}}(f)^0 :$$

- (a)  $f$  has no critical points of type N, i.e.  $\Sigma_f^N = \emptyset$ ;
- (b)  $M$  is a 2-disk,  $\Sigma_f$  consists of a unique critical point  $z$  which is of type N with  $n_z = 1$ ;
- (c)  $M$  is a 2-sphere,  $\Sigma_f$  consists of exactly two critical points  $z'$  and  $z$  such that  $z'$  is of type P, and  $z$  is of type N with  $n_z = 1$ .

The space  $\mathcal{S}_{\text{id}}(f) := \mathcal{S}_{\text{id}}(f)^\infty$  is contractible if and only if one of the following conditions holds true:

- $f$  has at least one critical point of type S or N;
- $M$  is non-orientable.

In all other cases  $\mathcal{S}_{\text{id}}(f)$  is homotopy equivalent to  $S^1$ .

**Theorem 4.** c.f. [18, Th. 1.5], [19]. *Suppose that  $f : M \rightarrow P$  satisfies axioms (A1)-(A3) and has at least one S-point. Then  $\pi_i \mathcal{O}_f(f) = \pi_i M$  for  $i \geq 3$ ,  $\pi_2 \mathcal{O}_f(f) = 0$ , and for  $\pi_1 \mathcal{O}_f(f)$  we have the following exact sequence:*

$$(5.2) \quad 1 \rightarrow \pi_1 \mathcal{D}(M) \oplus \mathbb{Z}^k \rightarrow \pi_1 \mathcal{O}_f(f) \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 1,$$

where  $\mathcal{G}$  is a certain finite group and  $k \geq 0$ .



**5.1. Discussion of axioms.** Axioms (A1) and (A2) put restrictions only on the foliation  $\Delta_f$  of  $f$ . For instance suppose that  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  satisfies them and has a global minimum  $\min f = 0$ . Then for every  $n \geq 2$  the function  $f^n$  also satisfies these axioms. Replacing  $f$  by its  $n$ -th degree makes that global minimum of  $f$  “more degenerate” but does not changes the foliation  $\Delta_f$ .

On the other hand, if  $f$  satisfies (A3), then usually the orbit  $\mathcal{O}(f^n)$  of  $f^n$  for  $n \geq 2$  has *infinite codimension* in  $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$  and the verification of (A3) for  $f^n$  is not an easy problem, see [30].

**5.2. Sufficient condition for (A3).** Let  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  be a smooth function,  $z \in \mathbb{R}^2$ , and  $f(z) = 0$ . Denote by  $\mathcal{A}$  the algebra of germs of smooth functions  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Then the *Jacobi ideal* of  $f$  at  $z$  is the ideal  $\Delta(f, z)$  in  $\mathcal{A}$  generated by germs partial derivatives  $f'_x(z)$  and  $f'_y(z)$  of  $f$  at  $z$ .

The *codimension*  $\mu_{\mathbb{R}}(f, z)$  of a  $f$  at  $z$  (or a *real Milnor number* of  $z$ ) is the codimension of the Jacobi ideal  $\Delta(f, z)$  in  $\mathcal{A}$ :

$$\mu_{\mathbb{R}}(f, z) = \dim_{\mathbb{R}}[\mathcal{A}/\Delta(f, z)],$$

see [34].

**Lemma 11.** c.f. [34], [18, § 11.30]. *Let  $\mathcal{C}_\partial^\infty(M, P)$  be the subspace of  $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$  consisting of maps satisfying axiom (A1), and let  $f \in \mathcal{C}_\partial^\infty(M, P)$ . Suppose that  $\mu_{\mathbb{R}}(f, z) < \infty$  for each critical point  $z \in \Sigma_f$ . Then  $\mathcal{O}(f)$  is a Fréchet submanifold of  $\mathcal{C}_\partial^\infty(M, P)$  of finite codimension and the natural map*

$$p : \mathcal{D}(M) \rightarrow \mathcal{O}(f), \quad p(h) = f \circ h$$

*is a principal locally trivial  $\mathcal{S}(f)$ -fibration. In particular,  $p$  is a Serre fibration, so  $f$  satisfies (A3).*

**Lemma 12.** c.f. [21]. *Suppose that  $f : M \rightarrow P$  satisfies (A1) and has the following property: for every critical point  $z$  of  $f$  there exists a local presentation  $f_z : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  of  $f$  in which  $z = (0, 0)$  and  $f_z$  is a homogeneous polynomial without multiple factors. Then  $f$  satisfies all other axioms (A2), (A3).*

*Proof.* Axiom (A2) follows from results of [17, 22], see also [25].

For the axiom (A3) it suffices establish finiteness of  $\mu_{\mathbb{R}}(f_z, z)$ . Regard  $f_z$  as a polynomial two complex variables with real coefficients. Since  $f_z$  has no multiple factors, it follows that  $z = (0, 0)$  is an isolated critical point of  $f_z$ , whence the *complex Milnor number* defined analogously with respect to the algebra of germs of analytical functions  $(\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow \mathbb{C}$  is finite:  $\mu_{\mathbb{C}}(f_z, z) < \infty$ , see [2]. It remains to note the following inequality  $\mu_{\mathbb{R}}(f_z, z) \leq 2\mu_{\mathbb{C}}(f_z, z)$ , which can be easily proved.  $\square$

## 6. FRAMINGS

In this section we will assume again that  $f$  satisfies conditions (i) and (ii) at the beginning of §3.2. The results of this section will be used for the proof of Theorem 4 only.

**6.1. Framings for N-points.** Suppose  $z$  is an N-point of  $f$  and let  $F$  be the corresponding special vector field defined on some neighbourhood  $U$  of  $z$ . Recall that the group

$$\mathcal{G}_z = \widehat{\mathcal{D}}^+(F, z) / \widehat{S}h(F, z)$$

is cyclic and we have denoted its order by  $n_z$ .

For each non-zero tangent vector  $v \in T_z M$  put

$$F_z(v) := \{\pm T_z h(v) \mid h \in \widehat{\mathcal{D}}^+(F, z)\}.$$

Thus  $F_z(v)$  is the union of orbits of  $v$  and  $-v$  under the natural action of  $\widehat{\mathcal{D}}^+(F, z)$  on  $T_zM$ . Equivalently, we may put

$$F_z(v) := \{\pm\xi(v) \mid \xi \in J_z(\widehat{\mathcal{D}}^+(F, z))\}.$$

**Definition 7.** *The set  $F_z(v)$  will be called a **framing at  $z$**  if it is finite and invariant with respect to the whole group  $\widehat{\mathcal{D}}(F, z)$ .*

**Lemma 13.** (1) *Framings exist.*

(2) *Let  $F_z(v)$  be any framing. If  $n_z$  is odd (resp. even), then  $F_z(v)$  consists of  $2n_z$  (resp.  $n_z$ ) elements.*

(3) *The kernel of the action of  $\widehat{\mathcal{D}}^+(F, z)$  on any framing  $F_z(v)$  is  $\widehat{Sh}(F, z)$ . Hence  $\widehat{\mathcal{D}}^+(F, z)$  induces a **free** action of  $\mathcal{G}_z$  on  $F_z(v)$ .*

(4) *Let  $F_z(v)$  be a framing at  $z$  and let  $h \in \mathcal{S}(f)$ . Then  $z' := h(z) \in \Sigma_f^N$  and*

$$F_{z'}(v) := T_z h(F_z(v)) \subset T_{z'}M$$

*is a framing at  $z'$ .*

(5) *If  $g \in \mathcal{S}(f)$  is such that  $g(z) = h(z)$ , then*

$$T_z g(F_z(v)) = T_z h(F_z(v)).$$

*Proof.* (1)-(3). First suppose that  $z$  is an NN-point, so we can choose local coordinates at  $z$  in which  $\nabla F(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Then by Lemma 7

$$J_z(\widehat{Sh}(F, z)) = \mathcal{A}_{++}, \quad J_z(\widehat{\mathcal{D}}^+(F, z)) \subset \mathcal{A}_+,$$

$$J_z(\widehat{\mathcal{D}}(F, z)) \subset \mathcal{A}.$$

Let  $v = (a, 0) \in T_zM$  be any vector with respect to these coordinates such that  $a \neq 0$ . Evidently, the orbit of  $v$  with respect to each of the groups  $\mathcal{A}_+$  and  $\mathcal{A}$  is  $\{\pm v\}$ , see Figure 6.1a), while  $\mathcal{A}_{++}$  is the stabilizer of  $v$  with respect to  $\mathcal{A}_+$ .

This implies that  $F_z(v) = \{\pm v\}$ , this set is invariant with respect to  $\widehat{\mathcal{D}}(F, z)$ , and  $\widehat{Sh}(F, z)$  is the kernel of the action of  $\widehat{\mathcal{D}}^+(F, z)$ .

If  $\widehat{Sh}(F, z) = \widehat{\mathcal{D}}^+(F, z)$ , i.e.  $n_z = 1$ , then  $|F_z(v)| = 2 = 2n_z$ . Otherwise,  $\widehat{\mathcal{D}}^+(F, z)/\widehat{Sh}(F, z) = \mathbb{Z}_2$ , so  $n_z = 2 = |F_z(v)|$ .

On the other hand, if  $w \in T_zM$  is another tangent vector which is not collinear to  $v$ , then  $w = (b, c)$  with  $c \neq 0$  and  $F_z(w) = \{(t, \pm c) \mid t \in \mathbb{R}\}$  is a pair of lines. Thus  $F_z(w)$  is not a framing, see Figure 6.1b).

Suppose now that  $z$  is an NZ-point, i.e.  $\nabla F(z) = 0$ . Then by Lemma 7  $\widehat{Sh}(F, z)$  is the kernel of  $J_z$ ,

$$J_z(\widehat{\mathcal{D}}^+(F, z)) = \widehat{\mathcal{D}}^+(F, z)/\widehat{Sh}(F, z) = \mathcal{G}_z$$

is a finite cyclic group of order  $n_z$ . Whence for any non-zero  $v \in T_zM$  the set  $F_z(v)$  is finite and  $\widehat{Sh}(F, z)$  is the kernel of the action of  $\widehat{\mathcal{D}}^+(F, z)$  on  $F_z(v)$ .

It remains to choose  $v$  for which  $F_z(v)$  is invariant with respect to  $\widehat{\mathcal{D}}(F, z)$ . We can assume that  $\widehat{\mathcal{D}}(F, z) \neq \widehat{\mathcal{D}}^+(F, z)$ , so  $J_z(\widehat{\mathcal{D}}(F, z))$  is a dihedral group. Let  $h \in \widehat{\mathcal{D}}(F, z) \setminus \widehat{\mathcal{D}}^+(F, z)$ . Then  $h$  changes orientation at  $z$ , and therefore the linear map  $T_z h$  is a reflection with respect to a line  $\{tv \mid t \in \mathbb{R}\}$  determined by some non-zero vector  $v \in T_zM$ . In particular,  $T_z h(v) = v$ . Now it is evident that  $F_z(v)$  is invariant with respect to  $\widehat{\mathcal{D}}(F, z)$ , so  $F_z(v)$  is a framing, see Figure 6.1c).

Statements (4) and (5) are easy and we leave them for the reader.  $\square$

**Definition 8.** *Say that a family of framings*

$$\{F_z(v_z) : z \in \Sigma_f^N\}$$

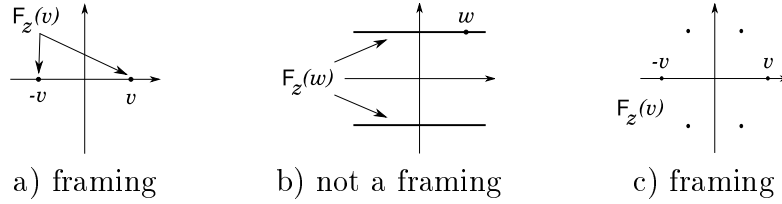


FIGURE 6.1

is **compatible** if it is invariant with respect to  $\mathcal{S}(f)$ , i.e.

$$T_z h(\mathbf{F}_z) = \mathbf{F}_{h(z)}, \quad \forall h \in \mathcal{S}(f).$$

**Corollary 1.** *Compatible framings exist.*

*Proof.* Since  $h(\Sigma_f^{\mathbb{N}}) = \Sigma_f^{\mathbb{N}}$  for every  $h \in \mathcal{S}(f)$ , we can divide  $\Sigma_f^{\mathbb{N}}$  by orbits with respect to  $\mathcal{S}(f)$ . Let  $O = \{z_1, \dots, z_l\} \subset \Sigma_f^{\mathbb{N}}$  be one of these orbits. It suffices to define a compatible framing on  $O$ .

Fix any framing  $\mathbf{F}_{z_1}$  for  $z_1$ . Let  $z_i \in O$  and  $h \in \mathcal{S}(f)$  be such that  $h(z_1) = z_i$ . Then we set  $\mathbf{F}_{z_i} = T_{z_1} h(\mathbf{F}_{z_1})$ . By Lemma 13 this definition does not depend on a particular choice of such  $h$ .  $\square$

**6.2. Framed KR-graph  $\widehat{\Gamma}(f)$  of  $f$ .** Let  $\Gamma(f)$  be the KR-graph of  $f$ ,  $p_f : M \rightarrow \Gamma(f)$  be the factor map, and  $w$  be a vertex of  $\Gamma(f)$ . Say that

- $w$  is a  $\partial$ -vertex if  $p_f^{-1}(w)$  is a connected component of  $\partial M$ ;
- $w$  is an  $\mathbf{S}$ -vertex if  $p_f^{-1}(w)$  contains  $\mathbf{S}$ -points of  $f$  (in this case  $p_f^{-1}(w)$  is a critical component of  $\Delta_f$  being not local extreme of  $f$ );
- $w$  is  $\mathbf{P}$ -vertex (resp.  $\mathbf{N}$ -vertex) if  $p_f^{-1}(w)$  is a  $\mathbf{P}$ -point (resp.  $\mathbf{N}$ -point) of  $f$ .

Let  $w$  be an N-vertex of  $\Gamma(f)$  and  $z = p_f^{-1}(w)$  be the corresponding N-point of  $f$ . Then by *cyclic order* of  $w$  we will call the corresponding cyclic order  $n_z$  of  $z$  and denote it by  $n_w$ , thus  $n_w := n_{p_f^{-1}(w)} = n_z$ .

Let  $k_z$  be the total number of vectors in (any) framing at  $z$ , see Lemma 13. We will denote this number by  $k_z$  and  $k_w$  as well. Thus  $k_z = n_z$  for even  $n_z$  and  $k_z = 2n_z$  for odd  $n_z$ .

To each N-vertex  $w$  let us glue  $k_w$  edges  $e_w(1), \dots, e_w(k_w)$  as shown in Figure 6.2. We will call them *edges tangent to  $w$* . The set of tangent edges to  $w$  will be denoted by  $\mathbb{T}_w$ . They should be thought as “*lying in the plane orthogonal to the edge incident to  $w$* ”.

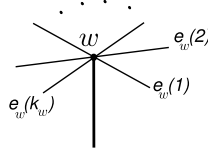


FIGURE 6.2. Tangent edges to a vertex  $w$

Denote the obtained graph by  $\widehat{\Gamma}(f)$  and call it the *framed KR-graph* of  $f$ . Thus  $\Gamma(f)$  is a subgraph of  $\widehat{\Gamma}(f)$  and we can extend the KR-function  $f_\Gamma : \Gamma(f) \rightarrow P$  to all of  $\widehat{\Gamma}(f)$  to be constant on tangent edges:  $f_\Gamma(e_w(i)) = f_\Gamma(w)$ .

**6.3. Automorphisms of  $\widehat{\Gamma}(f)$ .** Let  $E(\Gamma(f))$  be the set of edges of  $\Gamma(f)$ . By an *automorphism* of  $\widehat{\Gamma}(f)$  we will mean a pair  $(\nu, o)$ , where

- $\nu : \widehat{\Gamma}(f) \rightarrow \widehat{\Gamma}(f)$  is a homeomorphism which preserves types of vertexes and the KR-function that is

$$f_\Gamma \circ \nu = f_\Gamma : \widehat{\Gamma}(f) \rightarrow P,$$

(in particular,  $\nu$  sends tangent edges to tangent edges),  
and

- $o : E(\Gamma(f)) \rightarrow \mathbb{Z}_2$  is any function.

Define the composition of automorphisms by:

$$(\nu_1, o_1) \circ (\nu_2, o_2) = (\nu_1 \circ \nu_2, o_1 \circ \nu_2 \cdot o_2),$$

where  $\cdot$  is a multiplication in  $\mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$ .

Then it is easy to see that all the automorphisms of  $\widehat{\Gamma}(f)$  constitute a group. We will denote this group by  $\text{Aut}(\widehat{\Gamma}(f))$ . The unit of  $\text{Aut}(\widehat{\Gamma}(f))$  is  $(\text{id}_{\widehat{\Gamma}(f)}, 1)$ , where  $1 : E(\widehat{\Gamma}(f)) \rightarrow \mathbb{Z}_2$  is a constant map to  $1 \in \mathbb{Z}_2$ , and the inverse of  $(\nu, o)$  is  $(\nu^{-1}, -o \circ \nu^{-1})$ .

**6.4. Action of  $\mathcal{S}(f)$  on  $\widehat{\Gamma}(f)$ .** Suppose  $f$  has at least one critical point. We will now define a certain homomorphism

$$\mu : \mathcal{S}(f) \rightarrow \text{Aut}(\widehat{\Gamma}(f)).$$

First of all fix

- a compatible framing  $\{\mathbb{F}_z : z \in \Sigma_f^{\mathbb{N}}\}$  for  $\mathbb{N}$ -points of  $f$ ,
- for each  $z \in \Sigma_f^{\mathbb{N}}$  a bijection  $\xi_z : \mathbb{F}_z \rightarrow \mathbb{T}_{p_f(z)}$  between the framing  $\mathbb{F}_z$  at  $z$  and the set of tangent edges at the corresponding vertex  $p_f(z)$  of  $\widehat{\Gamma}(f)$  (see Figure 6.3), and
- orientation of connected components of  $\Delta_f^{\text{reg}}$  (this is possible since  $\Sigma_f \neq \emptyset$ , so all regular components of  $\Delta_f$  are diffeomorphic to  $S^1 \times (0, 1)$  and thus they are orientable surfaces).

Now let  $h \in \mathcal{S}(f)$ . We have to associate to  $h$  a pair  $(\nu, o)$ .

Notice that  $h$  yields a certain automorphism  $\nu = \lambda(h)$  of  $\Gamma(f)$ . We will now extend it to the set of tangent edges. Let  $h \in \mathcal{S}(f)$ ,  $z \in \Sigma_f^{\mathbb{N}}$ ,  $z' = h(z)$ ,  $w = p_f(z)$  and  $w' = p_f(z')$  be the corresponding vertexes on  $\widehat{\Gamma}(f)$ . Then  $z' \in \Sigma_f^{\mathbb{N}}$  as well

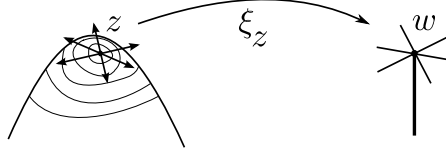


FIGURE 6.3

and  $h$  yields a bijection between the framings  $F_z$  and  $F_{z'}$ . So we define  $\nu : T_\omega \rightarrow T_{\omega'}$  by

$$\xi_{z'} \circ T_z h \circ \xi_z^{-1} : T_\omega \xrightarrow{\xi_z^{-1}} F_z \xrightarrow{T_z h} F_{z'} \xrightarrow{\xi_{z'}} T_{\omega'}.$$

It remains to define a function  $o : E(\Gamma(f)) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ . Let  $e$  be an edge of  $\Gamma(f)$  and  $\gamma = p_f(e)$  be the corresponding connected component of  $\Delta_f^{\text{reg}}$ . Then  $\gamma' = h(\gamma)$  is also a connected component of  $\Delta_f^{\text{reg}}$ . Notice that we fixed orientations of  $\gamma$  and  $\gamma'$ . Therefore we define  $o(e) = +1$  if  $h : \gamma \rightarrow \gamma'$  preserves orientations and  $o(e) = -1$  otherwise.

A direct verification shows that the map

$$\mu : \mathcal{S}(f) \rightarrow \text{Aut}(\widehat{\Gamma}(f)), \quad \mu(h) = (\nu, o)$$

is a well-defined homomorphism.

**6.5. The kernel of  $\mu$  and the group  $\mathcal{D}^{\mathbf{N}}(\Delta_f)$ .** Denote by  $\mathcal{D}^{\mathbf{N}}(M, \Sigma_f)$  the subgroup of  $\mathcal{D}(M)$  consisting of all diffeomorphisms  $h$  of  $M$  such that

- $h(\Sigma_f) = \Sigma_f$ ;
- $h \in \widehat{S}h(F_z, z)$  for each  $\mathbf{N}$ -point  $z \in \Sigma_f^{\mathbf{N}}$  and (any) special vector field  $F_z$  for  $z$ . In other words,  $J_z(h) \in \mathcal{A}_{++}$  if  $\nabla F(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , and  $J_z(h) = \text{id}$  if  $\nabla F(z) = 0$ .

Denote by  $\mathcal{O}^{\mathbf{N}}(f, \Sigma_f)$  the orbit of  $f$  with respect to the action of  $\mathcal{D}^{\mathbf{N}}(M, \Sigma_f)$ . Put

$$\mathcal{D}^{\mathbf{N}}(\Delta_f) = \mathcal{D}^+(\Delta_f) \cap \mathcal{D}^{\mathbf{N}}(M, \Sigma_f).$$



Then it is easy to see that  $\mathcal{D}^{\mathbf{N}}(\Delta_f)$  is a normal subgroup of  $\mathcal{S}(f)$  and

$$\mathcal{D}^{\mathbf{N}}(\Delta_f) \subset \ker(\mu).$$

However in general  $\mathcal{D}^{\mathbf{N}}(\Delta_f) \neq \ker(\mu)$ . The difference is that each  $h \in \mathcal{D}^{\mathbf{N}}(\Delta_f)$  is required to preserve *all 1-dimensional leaves* and their orientations, while each  $g \in \ker(\mu)$  must only preserve *all regular leaves* and their orientation. In fact, it is easy to construct an example of  $f$  and  $h \in \ker(\mu) \setminus \mathcal{D}^{\mathbf{N}}(\Delta_f)$  which interchanges critical leaves of  $\Delta_f$ , see e.g. [16, Lm. 6.9 & Fig. 6.1].

The following lemma repairs [18, Eq. (8.6)], see Remark 3.

**Lemma 14.**  $\mathcal{D}^{\mathbf{N}}(\Delta_f) \cap \mathcal{D}_{\text{id}}(M) = \ker(\mu) \cap \mathcal{D}_{\text{id}}(M)$ .

*Proof.* Let  $h \in \ker(\mu) \cap \mathcal{D}_{\text{id}}(M)$ . Then,  $h$  preserves all regular leaves of  $\Delta_f$  with their orientation and is isotopic to  $\text{id}_M$ . Now by [18, Th. 7.1]  $h$  also preserves all critical leaves with their orientation. Moreover,  $h \in \widehat{S}h(F, z)$  for each  $z \in \Sigma_f^{\mathbf{N}}$ , whence  $h \in \mathcal{D}^{\mathbf{N}}(\Delta_f)$ .  $\square$

## 7. GROUP $\pi_0 \mathcal{D}^{\mathbf{N}}(\Delta_f)$

In this section we calculate the group  $\pi_0 \mathcal{D}^{\mathbf{N}}(\Delta_f)$ . The exposition is similar to [18, Th. 6.2] but we take to account  $\mathbf{N}$ -points.

Let  $\widehat{\Gamma}(f)$  be the framed KR-graph of  $f$ . An edge  $e$  of  $\widehat{\Gamma}(f)$  will be called *external*, if it is either tangent to some  $\mathbf{N}$ -point, or is incident either to a  $\mathbf{P}$ - or to a  $\partial$ -vertex. Otherwise,  $e$  is *internal*.

Moreover, an internal edge  $e$  will be called an  *$\mathbf{N}$ -edge* (resp. an  *$\mathbf{S}$ -edge*) if at least one of its vertexes is an  $\mathbf{N}$ -vertex (resp. both vertexes of  $e$  are  $\mathbf{S}$ -vertexes).

Suppose that  $f : M \rightarrow P$  satisfies (A1) and (A2). Let  $\gamma$  be a regular leaf of  $\Delta_f$ , so  $\gamma$  is homeomorphic to  $S^1$ . Denote

by  $K_\gamma$  the connected component of  $\Delta_f^{\text{reg}}$  containing  $\gamma$ . Then there exists a Dehn twist  $\tau_\gamma$  along  $\gamma$  preserving  $\Delta_f$  and being identity outside arbitrary small neighbourhood  $U_\gamma \subset K_\gamma$  of  $\gamma$  consisting of full leaves of  $\Delta_f$ , see [18, §6] and Figure 7.1. In particular, we have that  $\tau_\gamma \in \mathcal{D}^{\text{N}}(\Delta_f)$ . Notice that the image

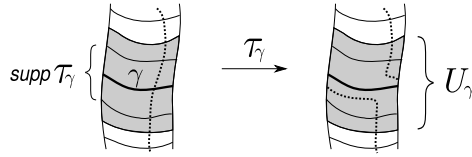


FIGURE 7.1

of  $K_\gamma$  in  $\widehat{\Gamma}(f)$  is a certain edge  $e$ . We will say that  $\gamma$  (as well as  $K_\gamma$ ) is *internal* (*external*) if so is  $e$ , and that  $\tau_\gamma$  is a *twist around*  $e$ .

Now let  $e_1, \dots, e_{\mathbf{k}}$  be all the internal edges of  $\widehat{\Gamma}(f)$ . For each  $i$  choose any internal leaf  $\gamma_i$  corresponding to  $e_i$  and take any Dehn twist  $\tau_i \in \mathcal{D}^{\text{N}}(\Delta_f)$  along  $\gamma_i$ . Put

$$T = \bigcup_{i=1}^{\mathbf{k}} \text{supp } \tau_i.$$

Let  $\mathcal{J} = \langle \tau_1, \dots, \tau_{\mathbf{k}} \rangle \subset \mathcal{D}^{\text{N}}(\Delta_f)$  be a subgroup generated by the internal Dehn twists. Since  $\text{supp } \tau_i \cap \text{supp } \tau_j = \emptyset$  for  $i \neq j$ , we see that  $\mathcal{J}$  is a free abelian group with basis  $\langle \tau_1, \dots, \tau_{\mathbf{k}} \rangle$ , so  $\mathcal{J} \approx \mathbb{Z}^{\mathbf{k}}$ .

**Theorem 5.** c.f. [18, Th. 6.2]. *Suppose that  $f : M \rightarrow P$  satisfies axioms (A1) and (A2), and has at least one critical point of type S. Then the inclusion  $\zeta : \mathcal{J} \subset \mathcal{D}^{\text{N}}(\Delta_f)$  is a homotopy equivalence. In particular, we have an isomorphism*

$$\zeta_0 : \mathcal{J} \cong \pi_0 \mathcal{J} \rightarrow \pi_0 \mathcal{D}^{\text{N}}(\Delta_f),$$

so  $\pi_0 \mathcal{D}^{\mathbf{N}}(\Delta_f) \approx \mathbb{Z}^{\mathbf{k}}$  is freely generated by the isotopy classes of internal Dehn twists.

The proof is similar to [18, Th. 6.2]. It suffices to establish the following statement:

**Lemma 15.** 1) Every  $h \in \mathcal{D}^{\mathbf{N}}(\Delta_f)$  is isotopic in  $\mathcal{D}^{\mathbf{N}}(\Delta_f)$  to a product of internal Dehn twists, whence  $\zeta : \mathcal{J} \rightarrow \pi_0 \mathcal{D}^{\mathbf{N}}(\Delta_f)$  is surjective.

2) If  $h = \tau_1^{m_1} \circ \dots \circ \tau_{\mathbf{k}}^{m_{\mathbf{k}}} \in \mathcal{S}_{\text{id}}(f)$  for some  $m_i \in \mathbb{Z}$ , then  $m_i = 0$  for all  $i$  and thus  $h = \text{id}_M$ , whence  $\zeta : \mathcal{J} \rightarrow \pi_0 \mathcal{D}^{\mathbf{N}}(\Delta_f)$  is a monomorphism.

*Proof.* First suppose that  $M$  is orientable. Let  $F$  be a vector field on  $M$  satisfying assumptions of Lemma 16.

**Claim 1.** For every  $h \in \mathcal{D}^{\mathbf{N}}(\Delta_f)$  there exists a unique  $\mathcal{C}^\infty$  function  $\sigma : M \setminus T \rightarrow \mathbb{R}$  being shift function for  $h$  with respect to  $F$ . If  $h$  is fixed on  $M \setminus T$ , then  $\sigma = 0$  on  $M \setminus T$ .

*Proof.* a) Let  $z$  be an  $\mathbf{N}$ -point of  $f$ . Then

$$h \in \ker(\text{sh}_z) = \widehat{S}h(F, z),$$

so  $h$  has a (unique)  $\mathcal{C}^\infty$  shift function  $\sigma_z$  defined on some  $F$ -invariant closed neighbourhood  $V_z$  of  $z$  containing no other critical points of  $f$ . We can assume that  $V_z \cap V_{z'} = \emptyset$  for  $z \neq z'$ . Then the functions  $\sigma_z$  define a unique shift function  $\sigma_{\mathbf{N}}$  for  $h$  on the following set  $U_{\mathbf{N}} := \bigcup_{z \in \Sigma_f^{\mathbf{N}}} V_z$ .

b) Since  $f$  has at least one  $\mathbf{S}$ -point, there exists a critical component  $K$  of  $\Delta_f$  (that is a connected component of  $\Delta_f^{\text{cr}}$ ) which is not a local extreme. Let  $z \in K \cap \Sigma_f$ . Then  $z$  is an  $\mathbf{S}$ -point of  $f$ . The assumption  $h \in \mathcal{D}^{\mathbf{N}}(\Delta_f)$  means that  $h \in \widehat{S}h(F, z)$ , so there exists a neighbourhood  $V_z$  of  $z$  and a unique  $\mathcal{C}^\infty$  function  $\sigma_z : V_z \rightarrow \mathbb{R}$  such that  $h(x) = \mathbf{F}(x, \sigma_z(x))$

for all  $x \in V_z$ . Since  $K \setminus \Sigma_f$  is a disjoint union of intervals, it follows that the functions  $\{\sigma_z\}_{z \in \Sigma_f}$  extend to a unique  $\mathcal{C}^\infty$  function  $\sigma_K$  defined on some neighbourhood  $V(K)$  of  $K$  such that  $h(x) = \mathbf{F}(x, \sigma_K(x))$  for all  $x \in V(K)$ , see [18, Lm. 6.4].

We can assume that  $V(K)$  is  $F$ -invariant, so  $\partial V(K)$  consists of regular leaves of  $\Delta_f$ .

Put  $U_S := \cup_K V(K)$ , where  $K$  runs over all critical components of  $\Delta_f$  that are not local extremes. We can also assume that

$$V(K) \cap V(K') = V(K) \cap U_N = \emptyset$$

for distinct critical components  $K$  and  $K'$ . Then the functions  $\sigma_K$  define a unique shift function  $\sigma_S$  for  $h$  on  $U_S$ .

c) Notice that the set  $\overline{M \setminus U_S}$  is a union of cylinders and 2-disks. Moreover, every cylinder contains no critical point of  $f$ , while every 2-disk contains a unique critical point of  $f$  and this point is a local extreme of  $f$ . Let  $B_1, \dots, B_k$  be all the connected components of  $\overline{M \setminus U_S}$  having one or the following properties: either

- $B_i$  is a cylinder such that  $B_i \cap \partial M \neq \emptyset$ , or
- $B_i$  is a 2-disk containing a P-point of  $f$ .

In particular,  $B_i \cap U_N = \emptyset$ . Denote  $U_{\partial, P} = \cup_{i=1}^k B_i$ . We claim that  $\sigma_S$  extends to a  $\mathcal{C}^\infty$  function on  $U_S \cup U_{\partial, P}$ .

Indeed, suppose  $B_i \approx S^1 \times I$  is a cylinder. Then  $B_i \cap U_S$  is a connected  $F$ -invariant neighbourhood of one of the connected components of  $\partial B_i$  and this neighbourhood does not contain another component of  $\partial B_i$ . So we can assume that

$$B_i \cap U_S = S^1 \times [0, \varepsilon].$$

Then the function  $\sigma_S$  on  $B_i \cap U_S$  extends to a  $\mathcal{C}^\infty$  shift function for  $h$  on all of  $B_i$ , see [18, Lm. 4.12(2)]. Denote this function by  $\beta_i : B_i \rightarrow \mathbb{R}$ .

Suppose  $B_i$  is a 2-disk containing a  $\mathbf{P}$ -point  $z$ . Then

$$Y_i := B_i \cap U_{\mathcal{S}}$$

is a neighbourhood of  $\partial B_i$  and by (1) of Lemma 9  $\sigma_{\mathcal{S}}$  extends to a unique  $\mathcal{C}^\infty$  shift function  $\beta_i : B_i \rightarrow \mathbb{R}$  for  $h$  on all of  $B_i$ .

Denote  $U := U_{\mathbf{N}} \cup U_{\mathcal{S}} \cup U_{\partial, \mathbf{P}}$ . Then the functions

$$\sigma_{\mathbf{N}} : U_{\mathbf{N}} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \sigma_{\mathcal{S}} : U_{\mathcal{S}} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \beta_i : B_i \rightarrow \mathbb{R},$$

$i = 1, \dots, \mathbf{k}$ , define a unique  $\mathcal{C}^\infty$  shift function  $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}$  for  $h$ . Notice that  $M \setminus U$  is contained in the union of internal components of  $\Delta_f^{\text{reg}}$ . Therefore we can assume that in fact  $M \setminus U \subset T$ , so  $U \supset M \setminus T$ .

If  $h$  is fixed on  $M \setminus U \subset T$ , then it follows from uniqueness of  $\sigma_{\mathbf{N}}$ ,  $\sigma_{\mathcal{S}}$  and uniqueness of extensions  $\beta_i$  of  $\sigma_{\mathcal{S}}$  to  $U_{\partial, \mathbf{P}}$ , that  $\sigma \equiv 0$ .  $\square$

In order to complete statement 1) it remains to construct an isotopy of  $h$  in  $\mathcal{D}^{\mathbf{N}}(\Delta_f)$  to a diffeomorphism fixed on  $M \setminus T$ . Let  $\mu : M \rightarrow [0, 1]$  be a  $\mathcal{C}^\infty$  function constant on leaves of  $\Delta_f$  and such that  $\mu = 1$  on some neighbourhood of  $U$ . Define the following map:

$$H : M \times I \rightarrow M, \quad H_t(x) = \mathbf{F}(x, t \cdot \mu(x) \cdot \sigma_h(x)).$$

Then  $H$  is  $\mathcal{C}^\infty$ ,  $H_0 = \text{id}_M$ , and  $H_1 = h$  on some neighbourhood of  $U$ , see for details [18, Lemma 4.14]. In particular, every  $H_t \in \mathcal{D}^{\mathbf{N}}(\Delta_f)$ . Hence the following isotopy  $G_t = h \circ H_t^{-1}$  deforms  $G_0 = h$  in  $\mathcal{D}^{\mathbf{N}}(\Delta_f)$  to a diffeomorphism  $G_1$  fixed on some neighbourhood of  $U$ . In other words  $\text{supp } G_1 \subset T$ , whence  $G_1$  is isotopic in  $\mathcal{D}^{\mathbf{N}}(\Delta_f)$  to a product of some internal Dehn twists.

2) Let  $h = \tau_1^{m_1} \circ \dots \circ \tau_{\mathbf{k}}^{m_{\mathbf{k}}} \in \mathcal{S}_{\text{id}}(f)$ . We have to show that  $m_i = 0$  for all  $i = 1, \dots, \mathbf{k}$ . For each  $i$  let  $U_i$  be a cylinder

neighbourhood of  $\gamma_i$  containing  $\text{supp } \tau_i$ , see Figure 7.1. Then  $h|_{U_i} = \tau_i^{m_i}|_{U_i}$ .

Since  $h \in \mathcal{S}_{\text{id}}(f)$  and  $f$  has at least one  $\mathbf{S}$ -point, it follows from (iv) of Lemma 16 that there exists a unique  $\mathcal{C}^\infty$  shift function  $\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}$  for  $h$ , so  $h(x) = \mathbf{F}(x, \alpha(x))$  for all  $x \in M$ . Therefore an isotopy of  $h$  to  $\text{id}_M$  in  $\mathcal{D}^{\mathbf{N}}(\Delta_f)$  can be given by  $h_t(x) = \mathbf{F}(x, t\alpha(x))$ , ( $t \in I$ ).

On the other hand by Claim 1 there exists a unique  $\mathcal{C}^\infty$  function  $\sigma : M \rightarrow \mathbb{R}$  being shift function for  $h$  on  $M \setminus T$ , whence  $\alpha = \sigma$  on  $M \setminus T$ . Moreover, as  $h$  is fixed on  $M \setminus T$ , we have that  $\alpha = \sigma = 0$  on  $M \setminus T$ . Hence  $h_t$  is fixed on  $M \setminus T$  for all  $t \in I$ . This implies that  $h|_{U_i} = \tau_i^{m_i}|_{U_i}$  is isotopic to  $\text{id}_{U_i}$  relatively some neighbourhood of  $\partial U_i$ . But this is possible if and only if  $m_i = 0$ . This proves Theorem 5 for orientable case.

Suppose  $M$  is non-orientable. Let  $p : \widetilde{M} \rightarrow M$  be the oriented double covering of  $M$ , and  $\xi$  be  $p$ -equivariant involution of  $\widetilde{M}$ . Then we have a function  $\widetilde{f} = f \circ p : \widetilde{M} \rightarrow P$ . Since every internal leaf  $\gamma_i$  is two-sided, it follows that  $p^{-1}(\gamma_i)$  consists of two connected components  $\gamma_{i1}$  and  $\gamma_{i2}$  being internal leaves of the foliation  $\Delta_{\widetilde{f}}$  of  $\widetilde{f}$ . Then there are Dehn twists  $\tau_{i1}, \tau_{i2} \in \widetilde{\mathcal{D}}^{\mathbf{N}}(\Delta_{\widetilde{f}})$  along  $\gamma_{i1}$  and  $\gamma_{i2}$  respectively such that  $\tau_{i2} = \xi \circ \tau_{i1} \circ \xi$  and  $\widehat{\tau}_i := \tau_{i2} \circ \tau_{i1}$  is a lifting of  $\tau_i$ . Evidently, each  $\tau_{ij}$  is internal, and by the oriented case the group  $\pi_0 \mathcal{D}^{\mathbf{N}}(\Delta_{\widetilde{f}})$  is generated by  $\tau_{ij}$  for  $i = 1, \dots, \mathbf{k}$  and  $j = 1, 2$ .

Consider the subgroup  $\widetilde{\mathcal{D}}^{\mathbf{N}}(\Delta_{\widetilde{f}})$  of  $\mathcal{D}^{\mathbf{N}}(\Delta_{\widetilde{f}})$  consisting of symmetric  $h$ , i.e.  $h \circ \xi = \xi \circ h$ . Then similarly to [18, Claim 6.5.1] it can be shown that the isotopy classes of  $\widehat{\tau}_i$ , ( $i = 1, \dots, \mathbf{k}$ ) generate  $\pi_0 \widetilde{\mathcal{D}}^{\mathbf{N}}(\Delta_{\widetilde{f}})$ , whence  $\pi_0 \widetilde{\mathcal{D}}^{\mathbf{N}}(\Delta_{\widetilde{f}}) \approx \mathbb{Z}^{\mathbf{k}}$ . Moreover, it follows from (ix) of Lemma 18 that there is a natural homeomorphism between  $\mathcal{D}^{\mathbf{N}}(\Delta_f)$  and  $\widetilde{\mathcal{D}}^{\mathbf{N}}(\Delta_{\widetilde{f}})$ . Hence

$\pi_0 \mathcal{D}^{\mathbf{N}}(\Delta_f) \approx \mathbb{Z}^{\mathbf{k}}$  and this group is generated by the isotopy classes of internal Dehn twists. Theorem 5 is completed.  $\square$

### 8. PROOF OF THEOREM 3

**Orientable case.** Suppose  $M$  is orientable and  $f$  satisfies axioms (A1) and (A2). For each  $z \in \Sigma_f$  let  $F_z$  be the corresponding special vector field defined on some neighbourhood  $U_z$  of  $z$ .

**Lemma 16.** *There exists a vector field  $F$  on  $M$  such that*

- (i)  $df(F) \equiv 0$  and  $F(z) = 0$  iff  $z \in \Sigma_f$ .
- (ii)  $F = \pm F_z$  near  $z$  for every  $z \in \Sigma_f$ .

Moreover, for any vector field  $F$  satisfying (i) and (ii) the following conditions holds true:

- (iii) The shift map  $\varphi : \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Sh}(F)$  is either a homeomorphism or a  $\mathbb{Z}$ -covering map with respect to topologies  $\mathcal{C}^\infty$ . Hence by Lemma 4 so is the restriction

$$\varphi|_{\Gamma^+} : \Gamma^+ \rightarrow \varphi(\Gamma^+),$$

and both spaces  $\text{Sh}(F)$  and  $\varphi(\Gamma^+)$  are either contractible or homotopy equivalent to  $S^1$ .

- (iv)  $\text{Sh}(F) = \mathcal{E}_{\text{id}}(F)^1$  and, by Lemma 3,  $\varphi(\Gamma^+) = \mathcal{D}_{\text{id}}(F)^1$ .
- (v) If  $f$  has no  $\mathbf{N}$ -points then

$$\text{Sh}(F) = \mathcal{E}_{\text{id}}(F)^0, \quad \varphi(\Gamma^+) = \mathcal{D}_{\text{id}}(F)^0.$$

- (vi) Suppose  $f$  has no  $\mathbf{S}$ -points and only one  $\mathbf{N}$ -point  $z$ , though it may have  $\mathbf{P}$ -points. If in addition  $n_z = 1$ , then  $\text{Sh}(F) = \mathcal{E}_{\text{id}}(F)^0$  and  $\varphi(\Gamma^+) = \mathcal{D}_{\text{id}}(F)^0$ . In this case  $f$  satisfies one of the conditions (b) or (c) of Theorem 3.

- (vii)  $\mathcal{D}_{\text{id}}(\Delta_f)^r = \mathcal{D}_{\text{id}}(F)^r = \mathcal{S}_{\text{id}}(f)^r$  for all  $r = 0, \dots, \infty$ .

- (viii) If  $\text{Sh}(F) = \mathcal{E}_{\text{id}}(F)^r$ , then  $\mathcal{D}_{\text{id}}^{\mathbf{N}}(\Delta_f)^r = \mathcal{S}_{\text{id}}(f)^r$ .

Suppose Lemma 16 is proved. Then by (iv) and (vii) we get

$$\varphi(\Gamma^+) = \mathcal{S}_{\text{id}}(f)^\infty = \cdots = \mathcal{S}_{\text{id}}(f)^1,$$

which proves (5.1). Moreover, the case (a) of Theorem 3 corresponds to (v), while (b) and (c) correspond to (vii) of Lemma 16, and in these cases  $\varphi(\Gamma^+) = \mathcal{S}_{\text{id}}(f)^1 = \mathcal{S}_{\text{id}}(f)^0$ .

Further, by (iii) of Lemma 16  $\varphi(\Gamma^+) = \mathcal{S}_{\text{id}}(f)^\infty$  is either contractible or homotopy equivalent to the circle.

If  $f$  has a critical point  $z$  of type S or N, then there exists a neighbourhood  $V$  of  $z$  such that  $\varphi_V$  is non-periodic, hence for each  $h \in \mathcal{S}_{\text{id}}(f)$  there may exist at most one  $\mathcal{C}^\infty$  shift function on  $V$ . This implies that  $\varphi$  is non-periodic as well, whence  $\mathcal{S}_{\text{id}}(f)$  is contractible.

On the other hand, suppose all critical points of  $f$  are of type P. Then  $f$  has at most two critical points and it is not hard to prove that  $\varphi$  is periodic, whence  $\mathcal{S}_{\text{id}}(f)$  is homotopy equivalent to the circle. This case is analogous to [18, Th. 1.9]. Orientable case of Theorem 3 is completed modulo Lemma 16

*Proof of Lemma 16.* (i), (ii). Since  $M$  is orientable, it has a symplectic structure and we can construct the corresponding Hamiltonian vector field  $F'$  of  $f$ . By definition this vector field satisfies (i) and also is parallel to  $F_z$  near each  $z \in \Sigma_f$ . Changing the sign of  $F_z$  (if necessary) we may assume that  $F'$  and  $F_z$  has the same directions near  $z$ . Then using partition unity technique we can glue  $F'$  with all of  $F_z$  so that the resulting vector field  $F$  on  $M$  would satisfy (i) and (ii).

(iii). We should prove that the map  $\varphi : \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow Sh(F)$  is either a homeomorphism or a  $\mathbb{Z}$ -covering map. Due to Theorem 2 it suffices to prove that every regular point  $z \in M \setminus \Sigma_F$  satisfies either of the conditions (R1), (R2), and every singular point  $z \in \Sigma_F$  of  $F$  satisfies (S1), (S2), and (B1).



Let  $z$  be a regular point of  $f$ . Then  $z$  is also non-singular for  $F$ . Denote by  $\omega$  the connected component of a level-set  $f^{-1}f(z)$  containing  $z$ .

If  $\omega$  contains critical points of  $f$ , then the orbit  $o_z$  of  $z$  is either “an arc connecting two critical points” or a “loop at some critical point” of  $f$ , see points  $z_1$  and  $z_2$  in Figure 8.1. In both cases the limit sets of the orbit  $o_z$  of  $z$  is finite, whence  $z$  is non-recurrent, and thus it satisfies (R1).

Otherwise  $\omega$  contains no critical points and therefore is diffeomorphic to  $S^1$ . Hence  $\omega$  is a periodic orbit of  $F$ , see Figure 8.1. Then it is easy to see that the first return map of such orbit is the identity, whence  $z$  has property (R2).

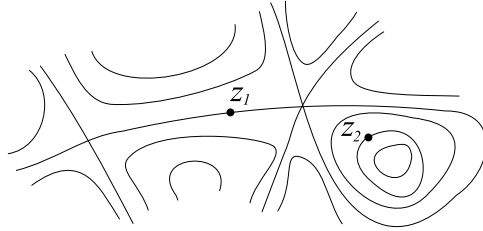


FIGURE 8.1

Let  $z$  be a critical point of  $f$  and  $U$  be a neighbourhood of  $z$  on which  $F = F_z$ . Then by condition (SP2) of Definition 2 there exists a base  $\beta_z = \{V_j\}_{j \in J} \subset U$  of  $D$ -neighbourhoods of  $z$  such that for each  $V \in \beta_z$  the shift map of  $F_z$

$$(8.1) \quad \varphi_{U,V} : \text{func}(F_z|_U, V) \rightarrow Sh(F_z|_U, V)$$

is a local homeomorphism between the corresponding topologies  $\mathcal{C}^\infty$ . Since  $F = F_z$  on  $U$ , the map (8.1) is the same as the following one:

$$\varphi_{U,V} : \text{func}(F|_U, V) \rightarrow Sh(F|_U, V).$$

In particular,  $\varphi_{U,V}$  is open as well. This implies (B1) for  $z$ .

Suppose  $z$  is a *local extreme* of  $f$ , then it has arbitrary small  $F$ -invariant neighbourhoods, see Figure 8.2a), i.e. satisfies (S1).

Suppose  $z$  is a *saddle*. Then there exists arbitrary small 2-disk  $U$  such that  $\partial U$  is smooth and transversal to orbits everywhere except for finitely many points  $x_1, \dots, x_k$ , and for each  $x_i$  there exists an open arc  $\gamma_i$  on  $o_{x_i}$  containing  $x_i$  such that  $\gamma_i \cap \partial U = \{x_i\}$ , see Figure 8.2b). This implies property (S2) for  $z$ .

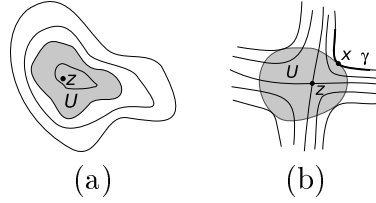


FIGURE 8.2. A neighbourhood  $U$

(iv), (v). We have to identify  $Sh(F)$  with  $\mathcal{E}_{\text{id}}(F)^r$  for  $r = 0$  or 1. Let  $h \in \mathcal{E}_{\text{id}}(F)^r$ . Then there exists an  $r$ -homotopy  $H : M \times I \rightarrow M$  such that  $H_0 = \text{id}_M$ ,  $H_1 = h$ , and  $H_t \in \mathcal{E}(F)$  for all  $t \in I$ . Then by Lemma 2 there exists an  $r$ -homotopy

$$\Lambda : (M \setminus \Sigma_F) \times I \rightarrow \mathbb{R}$$

such that  $\Lambda_0 \equiv 0$  and  $H_t(x) = \mathbf{F}(x, \Lambda_t(x))$  for all  $x \in M \setminus \Sigma_F$ .

If  $r = 1$  or if  $r = 0$  but  $f$  has no N-points, then by Lemma 10 (applied to each  $z \in \Sigma_f$ ) the function  $\Lambda_t$ ,  $t \in (0, 1]$ , extends to a  $C^\infty$  function on all of  $M$ . Hence  $H_t \in Sh(F)$ . In particular,  $h = H_1 \in Sh(F)$ , and so  $Sh(F) = \mathcal{E}_{\text{id}}(F)^1$ .

(vi). Suppose that  $f$  has no S-points and only one N-point  $z$  which also satisfies  $n_z = 1$ . Thus  $f$  has only local extremes

and one of them is  $z$ . Since  $M$  is connected there may exist at most two such points. Thus either  $\Sigma_f = \{z, z'\}$ , where  $z'$  is a P-point,  $M = S^2$ , and  $f$  satisfies (b) of Theorem 3, or  $\Sigma_f = \{z\}$ ,  $M = D^2$ , and  $f$  satisfies (c) of Theorem 3.

Notice that the orbits of  $F$  on  $M \setminus \Sigma_f$  are closed, the shift map  $\varphi_{M \setminus \Sigma_f}$  is periodic, and the function  $\theta : M \setminus \Sigma_f \rightarrow (0, +\infty)$  associating to every  $x \in M \setminus \Sigma_f$  its period  $\text{Per}(x)$  generates the kernel  $\ker(\varphi_{M \setminus \Sigma_f})$ . Moreover, if  $\Sigma_f = \{z, z'\}$  and  $z'$  is a P-point then by Definition 4  $\theta$  smoothly extends to some neighbourhood of  $z'$ . Thus we can assume that  $\theta$  is  $\mathcal{C}^\infty$  on  $M \setminus \{z\}$ .

Now let  $h \in \mathcal{E}_{\text{id}}(F)^0$ . We have to verify that  $h \in \text{Sh}(F)$ .

By Lemma 2 there exists a smooth shift function

$$\alpha : M \setminus \Sigma_f \rightarrow \mathbb{R}$$

for  $h$  on  $M \setminus \Sigma_f$ . Moreover, if  $\Sigma_f = \{z, z'\}$  where  $z'$  is a P-point, then by Lemma 10  $\alpha$  smoothly extends to a  $\mathcal{C}^\infty$  function near  $z'$ . Therefore we can assume that  $\alpha$  is  $\mathcal{C}^\infty$  on  $M \setminus \{z\}$  as well as  $\theta$ . Then for each  $k \in \mathbb{Z}$  the function  $\alpha + k\theta$  is also a  $\mathcal{C}^\infty$  shift function for  $h$  on  $M \setminus \{z\}$ .

By definition  $h$  is a local diffeomorphism at  $z$  and since  $h \in \mathcal{E}_{\text{id}}(F)^0$  it follows that  $h$  preserves orientation at  $z$ , so  $h \in \widehat{\mathcal{D}}^+(F, z)$ . Then the assumption  $n_z = 1$ , means that  $J_z(\widehat{\mathcal{D}}^+(F, z)) = \text{id}$ , so

$$h \in \widehat{\mathcal{D}}^+(F, z) \subset \ker(J_z) \subset \widehat{\text{Sh}}(F, z).$$

Hence there exists a  $\mathcal{C}^\infty$  shift function  $\beta$  for  $h$  on some neighbourhood  $W$  of  $z$ .

Therefore  $\alpha$  and  $\beta$  are  $\mathcal{C}^\infty$  shift functions for  $h$  on  $W \setminus \{z\}$ , whence  $\beta - \alpha = n\theta$  for some  $k \in \mathbb{Z}$ . Hence  $\alpha + n\theta$  is  $\mathcal{C}^\infty$  shift function for  $h$  on all of  $M$ , so  $h \in \text{Sh}(F)$ .

(vii). It follows from (i) that the foliation  $\Delta_f$  coincides with the foliation by orbits of  $F$ , whence  $\mathcal{D}(\Delta_f) = \mathcal{D}(F)$ , and by Lemma 5  $\mathcal{D}_{\text{id}}(\Delta_f)^r = \mathcal{D}_{\text{id}}(F)^r \subset \mathcal{S}_{\text{id}}(f)^r$ .

(viii). Suppose  $Sh(F) = \mathcal{E}_{\text{id}}(F)^r$  for some  $r \geq 0$ . Then

$$\begin{aligned} Sh(F) &= \mathcal{E}_{\text{id}}(F)^r \supset \mathcal{D}_{\text{id}}(F)^r = \\ &= \mathcal{S}_{\text{id}}(f)^r = \mathcal{D}_{\text{id}}(\Delta_f)^r \supset \mathcal{D}_{\text{id}}^{\mathbb{N}}(\Delta_f)^r. \end{aligned}$$

In particular, each  $h \in \mathcal{S}_{\text{id}}(f)^r$  has a  $\mathcal{C}^\infty$  shift function on  $M$  with respect to  $F$ . This implies that  $J_z(h) \in \widehat{Sh}(F, z)$  for each  $\mathcal{S}$ -point  $z$  of  $f$ , whence by definition  $h \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}(\Delta_f)$ . Thus  $\mathcal{S}_{\text{id}}(f)^r \subset \mathcal{D}^{\mathbb{N}}(\Delta_f)$ , and therefore  $\mathcal{S}_{\text{id}}(f)^r \subset \mathcal{D}_{\text{id}}^{\mathbb{N}}(\Delta_f)^r$ .  $\square$

**Non-orientable case.** Suppose that a surface  $M$  is non-orientable. Let  $p : \widetilde{M} \rightarrow M$  be the oriented double covering of  $M$  and  $\xi : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}$  be a  $\mathcal{C}^\infty$  involution generating the group  $\mathbb{Z}_2$  of deck transformations.

A vector field  $F$  on  $\widetilde{M}$  tangent to  $\partial\widetilde{M}$  (as well as its flow  $\mathbf{F}$ ) will be called *skew-symmetric* if  $\xi^*(F) = -F$ , that is

$$F \circ \xi = -T\xi \circ F.$$

This is equivalent to the requirement that  $\mathbf{F}_t \circ \xi = \xi \circ \mathbf{F}_{-t}$  for all  $t \in \mathbb{R}$ .

A smooth map  $\tilde{h} : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}$  will be called *symmetric* if  $\tilde{h} \circ \xi = \xi \circ \tilde{h}$ . Denote by  $\widetilde{\mathcal{D}}^+(\widetilde{M})$  the group of all orientation preserving symmetric diffeomorphisms of  $\widetilde{M}$ .

**Lemma 17.** *For every  $h \in \mathcal{D}(M)$  there exists a unique lifting  $\tilde{h} \in \widetilde{\mathcal{D}}^+(\widetilde{M})$ , so  $p \circ \tilde{h} = h \circ p$ . Moreover, the correspondence  $h \mapsto \tilde{h}$  is a homeomorphism  $\eta : \mathcal{D}(M) \rightarrow \widetilde{\mathcal{D}}^+(\widetilde{M})$  with respect to each topology  $\mathcal{C}^r$ , ( $0 \leq r \leq \infty$ ).*

*Proof.* Notice that each  $h \in \mathcal{D}(M)$  has exactly two symmetric liftings. If  $\tilde{h} \in \tilde{\mathcal{D}}(\tilde{M})$  is a lifting of  $h$ , then another one is given by  $\xi \circ \tilde{h}$ . Since  $\xi$  reverses orientation of  $\tilde{M}$ , we can assume that  $\tilde{h}$  preserves orientation of  $\tilde{M}$ , i.e.  $\tilde{h} \in \tilde{\mathcal{D}}^+(\tilde{M})$ . Then it is easy to see that the correspondence  $\eta : h \mapsto \tilde{h}$  is a bijection between  $\mathcal{D}(M)$  and  $\tilde{\mathcal{D}}^+(\tilde{M})$ . The verification that  $\eta$  is a homeomorphism with respect to the topology  $\mathcal{C}^r$  for each  $0 \leq r \leq \infty$  is direct and we left it for the reader.  $\square$

Suppose  $f$  satisfies axioms (A1) and (A2). Since  $p$  is a local diffeomorphism, it follows that the map  $\tilde{f} = f \circ p : \tilde{M} \rightarrow P$  also satisfies these axioms.

Let  $y \in \Sigma_f$ ,  $G_y$  be a special vector field near  $y$ , and let  $z, z' \in \Sigma_{\tilde{f}}$  be critical points of  $\tilde{f}$  such that  $p^{-1}(y) = \{z, z'\}$ . Define vector fields  $F_z$  and  $F_{z'}$  near  $z$  and  $z'$  respectively as pullbacks of  $G_y$  via  $p$ :

$$F_z = p^*G_y, \quad F_{z'} = -p^*G_y.$$

Let  $F'$  be any vector field on  $\tilde{M}$  satisfying (i) and (ii). Then the vector field  $F = \frac{1}{2}(F' - \xi^*F')$  is skew-symmetric and also satisfies (i) and (ii) and therefore all other statements of Lemma 16, see [18, Lm. 5.1] for details.

**Lemma 18.** c.f. [18, Lm. 4.9 & 5.1]. *The following conditions hold true:*

(ix) *Let  $\tilde{\mathcal{D}}(\Delta_{\tilde{f}}) = \mathcal{D}(\Delta_{\tilde{f}}) \cap \tilde{\mathcal{D}}^+(\tilde{M})$  be the group of symmetric diffeomorphisms preserving foliation  $\Delta_{\tilde{f}}$ . Then*

$$\eta(\mathcal{D}(\Delta_f)) = \tilde{\mathcal{D}}(\Delta_{\tilde{f}}),$$

*see Lemma 17. In particular, for all  $r = 0, \dots, \infty$  we have homeomorphisms  $\mathcal{D}_{\text{id}}(\Delta_f)^r \cong \tilde{\mathcal{D}}_{\text{id}}(\Delta_{\tilde{f}})^r$*

(x) Put  $E_0 = \{\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\widetilde{M}, \mathbb{R}) \mid \alpha \circ \xi = -\alpha\}$ . Then the shift map  $\varphi$  of  $F$  yields a homeomorphism  $\varphi : E_0 \cap \Gamma^+ \rightarrow \widetilde{\mathcal{D}}(\Delta_{\widetilde{f}})$  with respect to topologies  $\mathcal{C}^\infty$ . Since  $E_0 \cap \Gamma^+$  is convex,  $\widetilde{\mathcal{D}}(\Delta_{\widetilde{f}})$  is contractible.

*Proof.* Statement (ix) follows from Lemma 17, and (x) from [18, Lm. 4.9].  $\square$

Now we can complete non-orientable case of Theorem 3. By (x) of Lemma 18

$$\varphi(\Gamma^+ \cap E_0) = \widetilde{\mathcal{D}}_{\text{id}}(\Delta_{\widetilde{f}})^1, \quad \varphi(\Gamma^+ \cap E_0) = \widetilde{\mathcal{D}}_{\text{id}}(\Delta_{\widetilde{f}})^0$$

if  $f$  and therefore  $\widetilde{f}$  have no  $\mathbf{N}$ -points.

Moreover for all  $r = 0, \dots, \infty$  we have the following identifications

$$\widetilde{\mathcal{D}}_{\text{id}}(\Delta_{\widetilde{f}})^r \stackrel{\text{Lm. 17}}{\cong} \mathcal{D}_{\text{id}}(\Delta_f)^r \stackrel{\text{Lm. 5}}{=} \mathcal{S}_{\text{id}}(f)^r.$$

This implies that  $\mathcal{S}_{\text{id}}(f)^\infty = \dots = \mathcal{S}_{\text{id}}(f)^1$  and this space is contractible. Moreover,  $\mathcal{S}_{\text{id}}(f)^1 = \mathcal{S}_{\text{id}}(f)^0$  whenever  $f$  has no  $\mathbf{N}$ -points.

Theorem 3 is proved.  $\square$

## 9. PROOF OF THEOREM 4

Suppose  $f : M \rightarrow P$  satisfies (A1)-(A3) and has at least one  $\mathbf{S}$ -point. Statement about higher homotopy groups of  $\mathcal{O}(f)$  is a simple consequence of Theorem 3 and (A3).

Indeed, choose  $\text{id}_M$  to be a base point in  $\mathcal{S}(f)$  and  $\mathcal{D}(M)$ , and  $f$  to be a base point in  $\mathcal{O}(f)$ . Then axiom (A3) implies that there exists an exact sequence of homotopy groups of the fibration  $p$ :

$$\pi_k \mathcal{S}(f) \xrightarrow{i_k} \pi_k \mathcal{D}(M) \xrightarrow{p_k} \pi_k \mathcal{O}(f) \xrightarrow{\partial_k} \pi_{k-1} \mathcal{S}(f)$$

where  $i_k$  is induced by the inclusion  $i : \mathcal{S}(f) \subset \mathcal{D}(M)$ , and  $\partial_k$  is the boundary homomorphism.

Recall that  $\pi_i \mathcal{D}(M) = \pi_i M$  for  $i \geq 3$ , and  $\pi_2 \mathcal{D}(M) = 0$ , see [6, 7, 8, 10]. Since by Theorem 3  $\mathcal{S}_{\text{id}}(f)$  is contractible, we obtain isomorphisms  $\pi_k \mathcal{O}(f) \approx \pi_k \mathcal{D}(M)$  for  $k \geq 2$  and also the following exact sequence:

$$1 \rightarrow \pi_1 \mathcal{D}(M) \xrightarrow{p_1} \pi_1 \mathcal{O}(f) \xrightarrow{\partial_1} \pi_0(\mathcal{S}(f) \cap \mathcal{D}_{\text{id}}(M)) \rightarrow 1,$$

where  $\pi_0(\mathcal{S}(f) \cap \mathcal{D}_{\text{id}}(M))$  can be regarded as the kernel of the induced map  $i_0 : \pi_0 \mathcal{S}(f) \rightarrow \pi_0 \mathcal{D}(M)$ .

It remains to establish the short exact sequence (5.2) for  $\pi_1 \mathcal{O}(f)$  and show that  $\mathcal{O}_f(f)$  is weakly homotopy equivalent to some finite dimensional CW-complex.

*Proof of (5.2).* The arguments are similar to [18, §9]. Recall that we have a homomorphism  $\mu : \pi_0 \mathcal{S}(f) \rightarrow \text{Aut}(\widehat{\Gamma}(f))$ . Let  $G = \mu(\ker i_0)$  be the image of the subgroup

$$\ker i_0 = \pi_0(\mathcal{S}(f) \cap \mathcal{D}_{\text{id}}(M))$$

of  $\pi_0 \mathcal{S}(f)$  under  $\mu$ , and  $\mathcal{J}_0$  be the kernel of the restriction of  $\mu$  to  $\ker i_0$ . Thus

$$\mathcal{J}_0 := \pi_0(\ker(\mu) \cap \mathcal{D}_{\text{id}}(M)) \stackrel{\text{Lm. 14}}{=} \pi_0(\mathcal{D}^{\mathbf{N}}(\Delta_f) \cap \mathcal{D}_{\text{id}}(M)).$$

Since  $\mathcal{J} = \pi_0(\mathcal{D}^{\mathbf{N}}(\Delta_f)) \approx \mathbb{Z}^{\mathbf{k}}$  is a free abelian group, we see that so is its subgroup  $\mathcal{J}_0$ . Thus  $\mathcal{J}_0 \approx \mathbb{Z}^{\mathbf{l}}$  for some  $\mathbf{l} \geq 0$ .

Then we have the following commutative diagram in which all vertical and horizontal lines are exact:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & 1 & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 1 & \rightarrow & \pi_1 \mathcal{D}_{\text{id}}(M) & \xrightarrow{p} & \mathcal{H} & \xrightarrow{\partial_1} & \mathcal{J}_0 \approx \mathbb{Z}^1 \rightarrow 1 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 1 & \rightarrow & \pi_1 \mathcal{D}_{\text{id}}(M) & \xrightarrow{p} & \pi_1 \mathcal{O}(f) & \xrightarrow{\partial_1} & \ker(i_0) \rightarrow 1 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & G & \equiv & G \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 1 & & 1
 \end{array}$$

where  $\mathcal{H} = \partial_1^{-1}(\mathcal{J}_0)$ . To show that the left vertical sequence coincides with (5.2) we have to prove the following:

**Theorem 6.** *A short exact sequence*

$$(9.1) \quad 1 \rightarrow \pi_1 \mathcal{D}_{\text{id}}(M) \xrightarrow{p_1} \mathcal{H} \xrightarrow{\partial_1} \mathcal{J}_0 \rightarrow 1$$

admits a section  $s : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{J}_0$  such that  $\partial_1 \circ s = \text{id}_{\mathcal{J}_0}$ .

Due to [18, Lm. 2.2.]  $\partial_1$  is a homomorphism and  $p_1(\pi_1 \mathcal{D}(M))$  is contained in the center of  $\pi_1 \mathcal{O}(f)$ , so (9.1) is a *central* extension. Then theorem 6 implies that this sequence splits, so  $\mathcal{H} \approx \pi_1 \mathcal{D}_{\text{id}}(M) \oplus \mathbb{Z}^l$ , which finishes Theorem 4 modulo Theorem 6.

Statement of Theorem 6 was claimed without explanations in the proof of [18, Th. 1.5]. But in general there are central extension that do not split. Therefore in next section we will present a proof of Theorem 6.  $\square$

## 10. PROOF OF THEOREM 6

We have to consider only the cases when  $\pi_1 \mathcal{D}_{\text{id}}(M) = 0$ , which is equivalent to the assumption  $\chi(M) \geq 0$ .



Let  $\{g_\alpha\}_{\alpha \in A}$  be any set of generators for  $\mathcal{J}_0$ . For each  $\alpha \in A$  let  $\omega_\alpha : I \rightarrow \mathcal{D}_{\text{id}}(M)$  be a path such that  $\omega_\alpha(0) = \text{id}_M$  and  $\omega_\alpha(1) = g_\alpha$ , see Figure 10.1a). Since  $g_\alpha \in \mathcal{J}_0 \subset \mathcal{S}(f)$ , we see that the map  $\nu : I \rightarrow \mathcal{O}(f)$  defined by  $\nu(t) = f \circ \omega_\alpha(t)$  is a loop, i.e.  $\nu(0) = \nu(1) = f$ .

Let also  $\mathcal{F}$  be a free group generated by symbols  $\{\hat{g}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ . Then there exists a unique epimorphism  $\eta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{J}_0$  such that  $\eta(\hat{g}_\alpha) = g_\alpha$ , and a unique homomorphism  $\psi : \mathcal{F} \rightarrow \pi_1 \mathcal{O}(f)$  defined by  $\psi(\hat{g}_\alpha) = [f \circ \omega_\alpha]$  for all  $\alpha \in A$ . Moreover we have the following commutative diagram:

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{F} & \\
 \psi \swarrow & \downarrow \eta & \\
 \mathcal{H} & \xleftarrow{s} & \mathcal{J}_0 \\
 \partial_1 \searrow & & \\
 & & 
 \end{array}$$

Evidently, if  $\ker \eta \subset \ker \psi$ , then  $\partial_1$  admits a section

$$s : \mathcal{J}_0 \rightarrow \mathcal{H},$$

whence  $\mathcal{H} \approx \pi_1 \mathcal{D}_{\text{id}}(M) \times \mathcal{J}_0$ . Thus for the proof of Theorem 6 we have to find conditions when  $\ker \eta \subset \ker \psi$ .

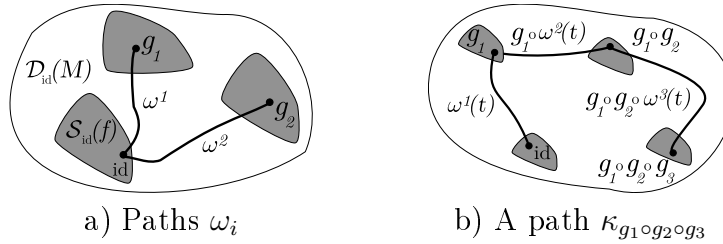


FIGURE 10.1

First we present exact formulas for  $\psi$ . Let

$$\hat{h} = (\hat{g}_1)^{\varepsilon_1} \cdots (\hat{g}_a)^{\varepsilon_a} \in \mathcal{F},$$

where  $\varepsilon_i \in \mathbb{Z}$ . Put  $h = \eta(\hat{h}) = g_1^{\varepsilon_1} \cdots g_a^{\varepsilon_a} \in \mathcal{J}_0$  and define the following path  $\kappa_{\hat{h}} : [0, a] \rightarrow \mathcal{D}_{\text{id}}(M)$  by

$$(10.1) \quad \kappa_{\hat{h}}(t) = \begin{cases} \omega_1(t)^{\varepsilon_1}, & t \in [0, 1], \\ g_1^{\varepsilon_1} \circ \omega_2(t-1)^{\varepsilon_2}, & t \in [1, 2], \\ g_1^{\varepsilon_1} \circ g_2^{\varepsilon_2} \circ \omega_3(t-2)^{\varepsilon_3}, & t \in [2, 3], \\ \dots\dots\dots & \\ g_1^{\varepsilon_1} \circ \dots \circ g_{a-1}^{\varepsilon_{a-1}} \circ \omega_a(t-a+1)^{\varepsilon_a}, & t \in [a-1, a], \end{cases}$$

see Figure 10.1b). Evidently,

$$\kappa_{\hat{h}}(0) = \text{id}_M, \quad \kappa_{\hat{h}}(1) = h \in \mathcal{J}_0 \subset \mathcal{S}(f).$$

Hence the map  $\nu_{\hat{h}} : I \rightarrow \mathcal{O}(f)$  defined by

$$\nu_{\hat{h}}(t) = f \circ \kappa_{\hat{h}}(t)$$

is a loop. Then it is easy to see that  $\psi(\hat{h}) = [\nu_{\hat{h}}]$ .

Suppose  $\hat{h} \in \ker \eta$ , so  $h = \eta(\hat{h}) = \text{id}_M$ . Then  $\kappa_{\hat{h}}$  is a loop in  $\mathcal{D}_{\text{id}}(M)$ .

**Lemma 19.** *Let  $\{g_\alpha\}_{\alpha \in A}$  be a set of generators for  $\mathcal{J}_0$ ,  $\mathcal{F}$  be a free group generated by symbols  $\{\hat{g}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ , and*

$$H = \{\hat{h}_\beta\}_{\beta \in B} \subset \mathcal{F}$$

*be the subset whose normal closure coincides with  $\ker \eta$ , so*

$$\mathcal{J}_0 = \langle \{g_\alpha\}_{\alpha \in A} \mid \{\hat{h}_\beta\}_{\beta \in B} \rangle$$

*is a presentation for  $\mathcal{J}_0$ . For each  $\alpha \in A$  take a path*

$$\omega_\alpha : I \rightarrow \mathcal{D}_{\text{id}}(M)$$

*such that  $\omega_\alpha(0) = \text{id}_M$  and  $\omega_\alpha(1) = g_\alpha$ . Then each of the following conditions implies that  $\ker \eta \subset \ker \psi$ .*

1) *For each  $\beta \in B$  the loop  $\kappa_{h_\beta}$  is null-homotopic in  $\mathcal{D}_{\text{id}}(M)$ .*

2) *There exists a subset  $Q \subset M$  consisting of  $k > \chi(M)$  points and such that  $\omega_\alpha(t)$  is fixed on  $Q$  for all  $\alpha \in A$  and  $t \in I$ .*

*Proof.* Statement 1) is trivial.

2) Let  $x_1, \dots, x_k \in Q$  be  $k$  distinct points,  $\mathcal{D}(M, k)$  be the group of diffeomorphisms of  $M$  that fix each of these points, and  $\mathcal{D}_{\text{id}}(M, k)$  be the identity path component of  $\mathcal{D}(M, k)$ . Then for each  $\hat{h}_\beta$  the loop  $\kappa_{\hat{h}_\beta}$  is contained in  $\mathcal{D}_{\text{id}}(M, k)$ . Since  $\chi(M) < k$ , it follows that  $\mathcal{D}_{\text{id}}(M, k)$  is contractible, whence  $\kappa_{\hat{h}_\beta}$  is null-homotopic in  $\mathcal{D}_{\text{id}}(M, k) \subset \mathcal{D}_{\text{id}}(M)$ . Therefore  $\psi(\hat{h}_\beta) = [f \circ \kappa_{\hat{h}_\beta}]$  is null-homotopic in  $\mathcal{H}$ , so  $\hat{h}_\beta \in \ker \psi$ .  $\square$

Thus for the proof of Theorem 6 it suffices to show that for every surface  $M$  with  $\chi(M) \geq 0$  one of the conditions 1) or 2) of Lemma 19 is satisfied.

**Lemma 20.** *Suppose  $M$  is one of the surfaces  $S^2$ ,  $\mathbb{RP}^2$ ,  $D^2$ ,  $M\ddot{o}$  or  $S^1 \times I$ . Then there exists even infinite subset  $Q \subset M$  such that **every** internal Dehn twist is fixed on  $Q$  and isotopic to  $\text{id}_M$  relatively  $Q$ . In particular, so does every  $h \in \mathcal{J}_0$ , whence by 2) of Lemma 19  $\ker \eta \subset \ker \psi$ .*

*Proof.* Suppose  $M$  is either 2-disk  $D^2$  or Möbius band  $M\ddot{o}$ , or a cylinder  $S^1 \times I$ . Put  $Q = \partial M$  if  $M$  is either  $D^2$  or  $M\ddot{o}$ , and  $Q = S^1 \times 0$  if  $M = S^1 \times I$ . Then every internal Dehn twist is fixed near  $Q$  and is isotopic to  $\text{id}_M$  relatively to  $Q$ , see e.g. [1], [9, Th. 3.4 & 5.2], [37].

Let  $M$  be either 2-sphere  $S^2$  or a projective plane  $\mathbb{RP}^2$ . In this case  $f$  always has a local extreme. Denote this point by  $z$  and let  $Q \subset M \setminus T$  be a closed neighbourhood of  $z$  diffeomorphic to 2-disk. Then  $M \setminus Q$  is either a 2-disk (if  $M = S^2$ ) or a Möbius band (if  $M = \mathbb{RP}^2$ ). Moreover, every

internal Dehn twist  $\tau$  is fixed on some neighbourhood of  $Q$ . Hence  $\tau$  is isotopic to the identity relatively  $Q$ .  $\square$

**Lemma 21.** *Let  $M$  be either a 2-torus  $T^2$  or a Klein bottle  $\mathbb{K}$ . Suppose that every internal leaf  $\gamma_i$ , ( $i = 1, \dots, \mathbf{k}$ ), separates  $M$ . Then there exists a subset  $Q \subset M$  satisfying 2) of Lemma 19.*

*Proof.* Let  $U_i$  be an open neighbourhood of  $\gamma_i$  diffeomorphic to  $S^1 \times (0, 1)$  such that  $\partial U_i$  consists of two regular leaves of  $\Delta_f$  and  $\text{supp } \tau_i \subset U_i$ . Since  $\gamma_i$  separates  $M$ , it follows that  $M \setminus U_i$  consists of two connected components  $B_i$  and  $C_i$ . Moreover, as  $M$  is either a 2-torus  $T^2$  or a Klein bottle  $\mathbb{K}$ , we have that one of the components, say  $B_1$ , is either a 2-disk or a Möbius band.

a) Suppose  $B_1$  is a Möbius band. Then  $M$  is a Klein bottle, and  $C_1$  as well as  $C_1 \cup U_1$  are Möbius bands. Put

$$Q = \partial U_1 \cap B_1.$$

Then  $Q$  is a simple closed curve “parallel” to  $\gamma_1$  and also separating  $M$  into two Möbius bands. Moreover, every internal Dehn twist  $\tau_i$  is fixed on some neighbourhood  $Q$ , and therefore it is isotopic to  $\text{id}_M$  relatively  $Q$ .

b) Suppose that neither  $B_i$  nor  $C_i$  is a Möbius band. Then  $B_i$  is a 2-disk. Renumbering  $\gamma_i$  (if necessary) we can assume that there exists  $r \in \{1, \dots, \mathbf{k}\}$  such that

- if  $i = 1, \dots, r$ , then  $B_i$  is not contained in any of  $B_j$  for  $j = 1, \dots, \mathbf{k}$ , and  $j \neq i$ , so  $B_i$  is “maximal”;
- for  $j = r + 1, \dots, \mathbf{k}$  every  $B_j$  is contained in some  $B_i$  for  $i = 1, \dots, r$ .

Put

$$(10.2) \quad Q := \bigcap_{i=1}^r C_i = \bigcap_{i=1}^r M \setminus (B_i \cup U_i) = M \setminus \bigcap_{i=1}^r (B_i \cup U_i).$$

Then  $Q$  is connected as a complement to a disjoint union of closed 2-disks on a connected surface. It is also easy to see that  $Q$  does not contain any internal curve. Indeed, suppose  $\gamma_j \subset Q$ . Since  $\gamma_j \subset U_j$ , we obtain from (10.2) that  $j \in \{r+1, \dots, \mathbf{k}\}$ , whence  $B_j \subset B_i$  for some  $i = 1, \dots, r$ . On the other hand  $\gamma_j$  separates  $Q$  into two *non-empty* components  $D_j$  and  $D'_j$  such that one of them, say  $D_j$ , is contained in  $B_j$ . Hence  $D_j \subset B_j \subset B_i \subset M \setminus Q$  which contradicts to the assumption that  $D_j \subset Q$ .

Thus  $Q$  contains no internal curves and therefore every  $\tau_i$  is fixed on some neighbourhood of  $Q$ . As  $M \setminus Q$  is a union of 2-disks, we see that  $\tau_i$  is isotopic to the identity relatively  $Q$ . Hence so does every  $g \in \mathcal{J}_0$ .  $\square$

**Lemma 22.** *Let  $M$  be either a 2-torus  $T^2$  or a Klein bottle  $\mathbb{K}$ . Suppose that  $\gamma_1$  does not separate  $M$ .*

- (i) *If  $M$  is a 2-torus  $T^2$ , then there exists a subset  $Q$  satisfying 2) of Lemma 19, whence  $\ker \eta \subset \ker \psi$ .*
- (ii) *If  $M$  is a Klein bottle  $\mathbb{K}$ , then  $\ker \eta \subset \ker \psi$  as well.*

*Proof.* Since all  $\gamma_i$  are mutually disjoint simple closed curves on a 2-torus or a Klein bottle, we can assume that for some  $a = 1, \dots, \mathbf{k}$  the curves  $\gamma_1, \dots, \gamma_a$  are non-separating and isotopic each other, while each of  $\gamma_{a+1}, \dots, \gamma_{\mathbf{k}}$  separate  $M$  so that one of the components of  $M \setminus \gamma_i$  is a 2-disk. It follows that  $\tau_i$  is isotopic to  $\tau_1$  for  $i = 1, \dots, a$ , and to  $\text{id}_M$  for  $i = a+1, \dots, \mathbf{k}$ .

Let  $Q$  be a regular leaf of  $\Delta_f$  contained in  $U_1 \setminus \text{supp } \tau_1$ , see Figure 10.2. Then every  $\tau_j$  is fixed on some neighbourhood of  $Q$  in  $U_1 \setminus \text{supp } \tau_1$ .

Now let  $h \in \mathcal{J}_0$ . Thus  $h = \tau_1^{i_1} \circ \dots \circ \tau_a^{i_a} \circ \tau_{a+1}^{i_{a+1}} \circ \dots \circ \tau_{\mathbf{k}}^{i_{\mathbf{k}}}$  for some  $i_j \in \mathbb{Z}$  and  $h$  is isotopic to  $\text{id}_M$ . Put  $d = i_1 + \dots + i_a$ . Since  $M \setminus Q$  is a cylinder, we see that  $h$  is isotopic to  $\tau_1^d$  relatively to  $Q$ .

(i) Suppose  $M$  is a 2-torus  $T^2$ . As  $h$  is isotopic to  $\text{id}_{T^2}$ , we have that  $d = 0$ , whence  $\tau_1^d$  (and thus  $h$  itself) is isotopic to  $\text{id}_{T^2}$  relatively to  $Q$ .

(ii) Let  $M$  be a Klein bottle  $\mathbb{K}$ . It is well known that  $\tau_1^2$  is isotopic to  $\text{id}_{\mathbb{K}}$ , see [14, Lm. 5]. Moreover, we can assume  $Q$  is invariant (but not fixed!) under such an isotopy, see Figure 10.2. Since  $h$  is isotopic to  $\text{id}_{\mathbb{K}}$ , we obtain that  $d$  is even and  $h$  is also isotopic to  $\text{id}_{\mathbb{K}}$  via an isotopy which leaves  $Q$  invariant.

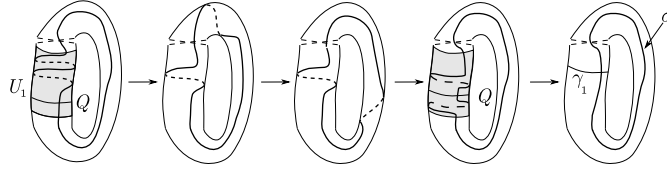


FIGURE 10.2. Isotopy of  $\tau_1^2$  to  $\text{id}_{\mathbb{K}}$

Let  $\{g_\alpha\}_{\alpha \in A}$  be a set of generators for  $\mathcal{J}_0$ ,  $\mathcal{F}$  be a free group generated by symbols  $\{\hat{g}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ , and  $H = \{\hat{h}_\beta\}_{\beta \in B} \subset \mathcal{F}$  be the subset whose normal closure coincides with  $\ker \eta$ .

By the previous arguments for each  $g_\alpha$  there exists a path  $\omega_\alpha : I \rightarrow \mathcal{D}_{\text{id}}(\mathbb{K})$  between  $\text{id}_{\mathbb{K}}$  and  $g_\alpha$  such that  $\omega_\alpha(t)(Q) = Q$  for all  $\alpha \in A$  and  $t \in I$ .

Let  $\beta \in B$  and  $\kappa_{\hat{h}_\beta} : I \rightarrow \mathcal{D}_{\text{id}}(\mathbb{K})$  be the corresponding loop in  $\mathcal{D}_{\text{id}}(\mathbb{K})$ . Then  $\kappa_{\hat{h}_\beta}(t)(Q) = Q$  for all  $t \in I$  as well. Now it is easy to see that  $\kappa_{\hat{h}_\beta}$  is null-homotopic, so the assumption (2) of Lemma 19 holds.

Indeed, let  $\sigma \subset \mathbb{K}$  be a simple closed curve shown in Figure 10.2. Then  $\mathbb{K} \setminus \sigma$  consists of two Möbius bands. It is well-known that  $\pi_1 \mathcal{D}_{\text{id}}(\mathbb{K}) = \mathbb{Z}$  and this group is generated by the isotopy which *rotates*  $\mathbb{K}$  *twice along*  $\sigma$ , see e.g. [10].

In particular, if  $\kappa : I \rightarrow \mathcal{D}_{\text{id}}(\mathbb{K})$  is a loop being not null-homotopic, then  $\kappa(t)(Q) \neq Q$  for some  $t \in I$ . Therefore  $\kappa_{\hat{h}_\beta}$  is null-homotopic for all  $\hat{h}_\beta \in \ker \eta$ .  $\square$

## REFERENCES

- [1] Alexander J. W. On the deformation of  $n$ -cell // *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* — 1923. — V. 9, № 12. — P. 406–407.
- [2] Arnol'd V. I., Guseĭn-Zade S. M., Varchenko A. N. Singularities of differentiable maps. Vol. I. — Boston, MA: Birkhäuser Boston Inc., 1985. — V. 82 of *Monographs in Mathematics*. — P. xi+382. — The classification of critical points, caustics and wave fronts, Translated from the Russian by Ian Porteous and Mark Reynolds.
- [3] Bolsinov A. V., Fomenko A. T. Vvedenie v topologiyu integriruemykh gamiltonovykh sistem (Introduction to the topology of integrable Hamiltonian systems). — Moscow: “Nauka”, 1997. — P. 352.
- [4] Bolsinov A. V., Matveev S. V., Fomenko A. T. Topological classification of integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom. A list of systems of small complexity // *Uspekhi Mat. Nauk.* — 1990. — V. 45, № 2(272). — P. 49–77.
- [5] Dancer E. N. Degenerate critical points, homotopy indices and Morse inequalities. II // *J. Reine Angew. Math.* — 1987. — V. 382. — P. 145–164.
- [6] Earle C. J., Eells J. The diffeomorphism group of a compact Riemann surface // *Bull. Amer. Math. Soc.* — 1967. — V. 73. — P. 557–559.
- [7] Earle C. J., Eells J. A fibre bundle description of Teichmüller theory // *J. Differential Geometry*. — 1969. — V. 3. — P. 19–43.
- [8] Earle C. J., Schatz A. Teichmüller theory for surfaces with boundary // *J. Differential Geometry*. — 1970. — V. 4. — P. 169–185.
- [9] Epstein D. B. A. Curves on 2-manifolds and isotopies // *Acta Math.* — 1966. — V. 115. — P. 83–107.
- [10] Gramain A. Le type d'homotopie du groupe des difféomorphismes d'une surface compacte // *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*. — 1973. — V. 6. — P. 53–66.
- [11] Kadubovs'kiĭ O. A. Topological equivalence of functions on oriented surfaces // *Ukrain. Mat. Zh.* — 2006. — V. 58, № 3. — P. 343–351.

- 
- [12] *Kronrod A. S.* On functions of two variables // *Uspehi Matem. Nauk (N.S.)*. — 1950. — V. 5, № 1(35). — P. 24–134.
  - [13] *Kudryavtseva E. A.* Realization of smooth functions on surfaces as height functions // *Mat. Sb.* — 1999. — V. 190, № 3. — P. 29–88.
  - [14] *Lickorish W. B. R.* Homeomorphisms of non-orientable two-manifolds // *Proc. Cambridge Philos. Soc.* — 1963. — V. 59. — P. 307–317.
  - [15] *Maksymenko S.* Smooth shifts along trajectories of flows // *Topology Appl.* — 2003. — V. 130, № 2. — P. 183–204.
  - [16] *Maksymenko S.* Path-components of Morse mappings spaces of surfaces // *Comment. Math. Helv.* — 2005. — V. 80, № 3. — P. 655–690.
  - [17] *Maksymenko S.* Hamiltonian vector fields of homogeneous polynomials in two variables // *Pr. Inst. Mat. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Zastos.* — 2006. — V. 3, № 3. — P. 269–308, arXiv:math/0709.2511.
  - [18] *Maksymenko S.* Homotopy types of stabilizers and orbits of Morse functions on surfaces // *Ann. Global Anal. Geom.* — 2006. — V. 29, № 3. — P. 241–285.
  - [19] *Maksymenko S.* Homotopy dimension of orbits of Morse functions on surfaces // *Travaux Mathématiques*. — 2008. — V. 18. — P. 39–44.
  - [20] *Maksymenko S.* Connected components of partition preserving diffeomorphisms // *Methods Funct. Anal. Topology*. — 2009. — V. 15, № 3. — P. 264–279.
  - [21] *Maksymenko S.* Functions with homogeneous singularities on surfaces // *Dopovidi Nats. Akad. Nauk Ukraïny*. — 2009. — V. 8. — P. 20–23.
  - [22] *Maksymenko S.*  $\infty$ -jets of diffeomorphisms preserving orbits of vector fields // *Cent. Eur. J. Math.* — 2009. — V. 7, № 2. — P. 272–298.
  - [23] *Maksymenko S.* Symmetries of degenerate center singularities of plane vector fields // *Nonlinear Oscillations*. — 2009. — V. 12, № 4. — P. 507–526. — arXiv:math/0907.0737.
  - [24] *Maksymenko S.* Image of a shift map along the orbits of a flow // *to appear in Indiana Univ. Math. J.* — 2010. — arXiv:math/0902.2418.
  - [25] *Maksymenko S.* Local inverses of shift maps along orbits of flows // *to appear in Osaka Journal of Mathematics* — 2011. — arXiv:math/0806.1502.



- [26] *Maksymenko S.* Symmetries of center singularities of plane vector fields // *Nonlinear Oscillations*. — 2009. — V. 13, № 2. — P. 177–205. — arXiv:math/0907.0359.
- [27] *Oshemkov A. A.* Morse functions on two-dimensional surfaces. Coding of singularities // *Trudy Mat. Inst. Steklov.* — 1994. — V. 205, no. *Novye Rezult. v Teor. Topol. Klassif. Integr. Sistem.* — P. 131–140.
- [28] *Palais R. S.* Natural operations on differential forms // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1959. — V. 92. — P. 125–141.
- [29] *Palis Jr. J., de Melo W.* Geometric theory of dynamical systems. — New York: Springer-Verlag, 1982. — P. xii+198. — An introduction, Translated from the Portuguese by A. K. Manning.
- [30] *Poénaru V.* Un théorème des fonctions implicites pour les espaces d'applications  $C^\infty$  // *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* — 1970. — № 38. — P. 93–124.
- [31] *Prishlyak A. O.* Conjugacy of Morse functions on surfaces with values on the line and circle // *Ukrain. Mat. Zh.* — 2000. — V. 52, № 10. — P. 1421–1425.
- [32] *Prishlyak A. O.* Morse functions with finite number of singularities on a plane // *Methods Funct. Anal. Topology*. — 2002. — V. 8, № 1. — P. 75–78.
- [33] *Prishlyak A. O.* Topological equivalence of smooth functions with isolated critical points on a closed surface // *Topology Appl.* — 2002. — V. 119, № 3. — P. 257–267.
- [34] *Sergeraert F.* Un théorème de fonctions implicites sur certains espaces de Fréchet et quelques applications // *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*. — 1972. — V. 5. — P. 599–660.
- [35] *Sharko V. V.* Smooth and topological equivalence of functions on surfaces // *Ukrain. Mat. Zh.* — 2003. — V. 55, № 5. — P. 687–700.
- [36] *Sharko V. V.* Smooth functions on non-compact surfaces // *Pr. Inst. Mat. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Zastos.* — 2006. — V. 3, № 3. — P. 443–473, arXiv:math/0709.2511.
- [37] *Smale S.* Diffeomorphisms of the 2-sphere // *Proc. Amer. Math. Soc.* — 1959. — V. 10. — P. 621–626.
- [38] *Takens F.* Normal forms for certain singularities of vectorfields // *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*. — 1973. — V. 23, № 2. — P. 163–195. — Colloque International sur l'Analyse et la Topologie Différentielle

(Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, Strasbourg, 1972).

- [39] *Yurchuk I.* Topological classification of functions from class  $F(D^2)$  // *Pr. Inst. Mat. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Zastos.* — 2006. — V. 3, № 3. — P. 474–486.

Sergiy Maksymenko

Topology dept., Institute of Mathematics of NAS of Ukraine,  
Tereshchenkivska st. 3, Kyiv, 01601, Ukraine

`maks@imath.kiev.ua`

УДК 517.956.4

## О конформной эквивалентности функций

*В. В. Лычагин, Н. Г. Коновенко*

В даній роботі наведено класифікацію гладких функцій відносно псевдогрупи конформних перетворень площини

In this paper we give a classification of functions on the plane with respect to conformal pseudogroup. We describe the algebra of conformal differential invariants and find invariant symplectic and metric structures on the algebra. These structures allow us to give a complete classification of orbits.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе приводена классификация регулярных гладких функций на плоскости относительно псевдогруппы конформных преобразований. Вначале получим формальную классификацию функций. Это достигается описанием орбит конформного действия в пространствах джетов и нахождением алгебры конформных дифференциальных инвариантов (ср. [3]). Мы уточняем понятие конформного дифференциального инварианта, понимая под последним функцию на пространствах джетов, полиномиальную вдоль слоев естественных расслоений, а также полиномиальную относительно величины, обратной к квадрату градиента и инвариантную относительно конформных преобразований. Теорема 3 дает описание структуры этой алгебры. Мы находим также инвариантную симплектическую и метрическую структуры на алгебре дифференциальных

инвариантов, используя которые мы строим инвариантные дифференцирования. Найденное описание алгебры дифференциальных инвариантов сводит проблему локальной конформной эквивалентности к разрешимости некоторых систем дифференциальных уравнений третьего порядка (ср. [1]). Выполнение условий дифференциальной сизигии обеспечивает формальную интегрируемость этой системы, а теорема Картана-Келера позволяет дать конформную классификацию вещественных аналитических функций.

## 2. АЛГЕБРА КОНФОРМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИНВАРИАНТОВ

Алгебра Ли псевдогруппы конформных преобразований плоскости состоит из конформных векторных полей, т.е. полей вида

$$X = A(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial}{\partial y},$$

где функции  $A(x, y)$  и  $B(x, y)$  удовлетворяют системе уравнений Коши-Римана.

Обозначим через  $J^k(\mathbb{R}^2)$  — пространства  $k$ -джетов функций на плоскости, а через

$$(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \dots)$$

канонические координаты в этих пространствах. Каждое конформное векторное поле  $V$  поднимается до векторного поля  $V^{(k)}$  в пространстве  $k$ -джетов (см. [2]). Скажем, что тензор  $\Xi$ , заданный на пространстве  $k$ -джетов  $J^k(\mathbb{R}^2)$ , конформно инвариантен, если  $L_{V^{(k)}}(\Xi) = 0$  для всех конформных векторных полей  $V$ .

**Теорема 1.** *Дифференциальная 2-форма*

$$\Omega = (u_x^2 + u_y^2)(dx \wedge dy)$$

и дифференциальная квадратичная форма

$$\Theta = (u_x^2 + u_y^2)(dx^2 + dy^2),$$

заданные на многообразии 1-джетов, конформно-инвариантны.

Из этой теоремы следует, что каждой функции  $f$  с ненулевым градиентом можно сопоставить метрику на плоскости  $\Theta_f = (f_x^2 + f_y^2)(dx^2 + dy^2)$  и симплектическую форму  $\Omega_f = (f_x^2 + f_y^2)(dx \wedge dy)$ . При этом конформная эквивалентность функций влечет эквивалентность соответствующих метрик и симплектических структур.

Под конформным дифференциальным инвариантом мы понимаем функцию полиномиальную по переменным

$$\left( u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \dots, \frac{1}{u_x^2 + u_y^2} \right)$$

и инвариантную относительно продолженного действия конформной псевдогруппы.

**Теорема 2.** *Каждому дифференциальному инварианту  $I$  соответствуют два инвариантных дифференцирования*

$$\nabla_I = \frac{1}{u_x^2 + u_y^2} \left( \frac{dI}{dx} \frac{d}{dx} + \frac{dI}{dy} \frac{d}{dy} \right),$$

$$\gamma_I = \frac{1}{u_x^2 + u_y^2} \left( \frac{dI}{dy} \frac{d}{dx} - \frac{dI}{dx} \frac{d}{dy} \right),$$

где через  $\frac{d}{dx}$  и  $\frac{d}{dy}$  обозначены соответственно полные производные вдоль  $x$  и  $y$ .

В этой теореме дифференцирование  $\nabla_I$  отвечает градиенту инварианта  $I$  относительно метрики  $\Theta$ , а дифференцирование  $\gamma_I$  соответствует гамильтонову векторному полю с гамильтонианом  $I$  относительно формы  $\Omega$ .

Действие конформной псевдогруппы имеет очевидный дифференциальный инвариант нулевого порядка  $u$ . Ему отвечают два инвариантных дифференцирования  $\nabla_u$  и  $\gamma_u$ , которые мы обозначим через:

$$\gamma = \frac{u_y}{u_x^2 + u_y^2} \frac{d}{dx} - \frac{u_x}{u_x^2 + u_y^2} \frac{d}{dy}$$

и

$$\nabla = \frac{u_x}{u_x^2 + u_y^2} \frac{d}{dx} + \frac{u_y}{u_x^2 + u_y^2} \frac{d}{dy}.$$

Легко проверить, что эти дифференцирования удовлетворяют следующему коммутационному соотношению:

$$(2.1) \quad [\nabla, \gamma] = J \cdot \gamma.$$

В этом соотношении функция

$$J = \frac{u_{xx} + u_{yy}}{u_x^2 + u_y^2}$$

является конформным дифференциальным инвариантом второго порядка.

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 3.** *Алгебра конформных дифференциальных инвариантов на плоскости порождена базисным инвариантом нулевого порядка  $u$ , дифференциальным инвариантом второго порядка  $J$ , а также всеми инвариантными производными  $\nabla^k \gamma^l(J)$ .*

### 3. КОНФОРМНАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ФУНКЦИЙ.

Мы назовем функцию, заданную в некоторой области плоскости *конформно-регулярной*, если значения базисных дифференциальных инвариантов  $u$  и  $J$  на этой функции функционально независимы.

Так например, гармонические функции не являются конформно-регулярными, а функция  $x^3 + y^3$  — конформно-регулярна в соответствующей области.

Для конформно-регулярных функций значения дифференциальных инвариантов  $\nabla(J)$  и  $\gamma(J)$  являются функциями от  $u$  и  $J$ .

Пусть

$$(3.1) \quad \nabla(J) = A(u, J), \quad \gamma(J) = B(u, J),$$

для некоторых функций  $A$  и  $B$ .

Отметим, что эти функции не произвольны, а удовлетворяют условию сизигии:

$$(3.2) \quad J \cdot B - A_J B + B_J A + B_u = 0,$$

которое получается применением коммутационного соотношения (2.1) к функции  $J$ .

Отметим также, что конформно-эквивалентные регулярные функции определяют одни и те же функции  $A$  и  $B$ . Более того, задание функций  $A$  и  $B$  определяет метрику  $\Theta$  и симплектическую форму  $\Omega$ . Обратно, если эти функции выбраны, то соотношения (3.1) можно рассматривать, как систему двух дифференциальных уравнений третьего порядка. Если кроме того выполнено соотношение сизигий, то эта система является формально интегрируемой. Следовательно, в силу теоремы Картана-Келера она интегрируема, если рассматриваемые функции вещественно-аналитичны. Суммируя, получаем следующий результат.

**Теорема 4.** *Для конформно-регулярных вещественно-аналитических функций на плоскости, функции  $A(u, J)$  и  $B(u, J)$ , удовлетворяющие условию сизигии (3.2), локально определяют класс конформной эквивалентности.*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Коновенко Н. Г., Лычагин В. В.* О метрической эквивалентности функций, заданных на плоскости Лобачевского // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2009. — Т. 151, кн. 4. — С. 54–59.
- [2] *Красильщик И. С., Лычагин В. В., Виноградов А. В.* Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений // Москва: Наука. — 1986. — 336 с.
- [3] *Нует М. Р.* Differential Invariants of the 2D conformal Lie algebra action // Acta Applicandae Mathematicae. — 2010. — V. 109, no 1. — P. 61–73.

В. В. Лычагин, Н. Г. Коновенко  
Одесская Национальная Академия Пищевых Технологий,  
ул. Канатная 112, г. Одесса, Украина, 65039,  
тел. +38 048 712-40-05  
lychagin@math.uit.no, konovenko@ukr.net



## О некритическом продолжении функции, заданной на границе трёхмерной области

*Пришляк А. О.<sup>3</sup>, Пришляк Е. А.,  
Вятчанинова Е. Н.*

Исследованы топологические свойства гладких функций на трехмерных ограниченных областях, сужение которых на границу, гладкую поверхность, имеет конечное число критических точек. Получены необходимые условия существования продолжения функции с границы вовнутрь области. Для функций на замкнутой ориентированной поверхности с одним локальным минимумом, одним локальным максимумом и имеющих на каждом критическом уровне по одной критической точке, доказан критерий существования вложения поверхности, при котором функция может быть продлена внутрь области без критических точек.

We consider topological properties of smooth functions on 3-dimensional bounded domains, whose restrictions to the boundary of such domains have finite number of critical points. A necessary condition for existence of an extension of a function from the boundary to all the domain without critical points is obtained. Let  $f$  be a smooth function on an orientable surface  $F$  with only one local minima, one local maxima and having only one critical point at each critical level. We give a criteria for existence of an embdding  $F \subset \mathbb{R}^3$  such that  $f$  extends inside  $F$  without critical points.

---

<sup>3</sup>Дослідження частково підтримані Українсько-Словенським науково-дослідним проектом «Топологія многовидів та її застосування», договір № М/150-2009.

## ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим ограниченную область в трехмерном пространстве, границей которой является гладкая поверхность. Легко построить функцию без критических точек в области. Примером может служить проекция на координатную ось. Однако у ограничения этой функции на поверхность будут критические точки. Если функцию можно представить как проекцию на координатную ось при вложении поверхности в  $\mathbb{R}^3$ , то она естественным образом продолжается на область. Более слабые условия погружения были получены в [2]. Если функция на поверхности является функцией Морса общего положения, то искомое вложение поверхности может быть получено, как граница окрестности графа Конрода-Риба, [1], [6], при его вложении в  $\mathbb{R}^3$ . Для произвольных функций Морса условия существования таких вложений получены в [4]. Под индексом Пуанкаре критической точки функции будем иметь ввиду модуль индекса Пуанкаре ее поля градиента.

Постановка задачи.

Пусть  $U$  — ограниченная область в  $\mathbb{R}^3$ ,  $F = \partial U$  — гладкая поверхность,  $\bar{U} = U \cup F$ ,  $g : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$  — гладкая функция, которая не имеет критических точек как внутри  $U$ , так и на границе  $\partial U$ . Это означает, что функция может быть продолжена до некоторой гладкой функции без критических точек на окрестности  $\bar{U}$ . Пусть  $f : F \rightarrow \mathbb{R}$  — ограничение функции  $g$  на границу. Мы будем рассматривать такие функции  $f$ , у которых один максимум, один минимум, а остальные критические точки — седловые, т.е. изолированные и не являющиеся точками локального экстремума, а значения функции в разных критических точках различны.

Цель этой статьи — исследовать вопрос о том какие функции на  $F$  могут быть продлены до функций без критических точек на  $U$  при некотором вложении поверхности в трехмерное пространство.

### 1. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ БЕЗ КРИТИЧЕСКИХ ТОЧЕК НА ТРЕХМЕРНЫХ ОБЛАСТЯХ

Исследуем вопрос о том, как изменяются уровни функции  $g$  при увеличении значения функции.

**Лемма 1.** *Предположим, что отрезок  $[v_1, v_2]$  не содержит критических значений, тогда  $g^{-1}([v_1, v_2])$  гомеоморфно  $g^{-1}(v_1) \times [0, 1]$ .*

*Доказательство.* Используем векторное поле градиента

$$\text{grad } g = \left\{ \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z} \right\}.$$

Векторное поле  $\text{grad } f$  при этом будет проекцией  $\text{grad } g$  на касательную плоскость в соответствующей точке, а его особые точки будут критическими точками функции  $f$ . Таким образом, по условиям леммы оба поля не имеют особых точек, т.е. нигде не обращаются в 0. Продлим векторное поле  $\text{grad } f$  произвольным образом до гладкого векторного поля на  $U$  и будем это продолжение обозначать также  $\text{grad } f$ .

Ввиду компактности и гладкости поверхности  $F$  для любого достаточно малого  $\varepsilon > 0$  существует гладкая функция  $h : \bar{U} \rightarrow [0, 1]$ , для которой  $h(F) = 1$  и  $h(x, y, z) = 0$  вне  $\varepsilon$ -окрестности  $F$ . Существование такой окрестности доказывается аналогично построению гладкого разбиения единицы компактного многообразия. Рассмотрим векторное поле

$$W = h \text{ grad } f + (1 - h) \text{ grad } g.$$

Поскольку  $\text{grad} f$  есть проекцией  $\text{grad} g$  на  $F$ , то существует такое  $\varepsilon > 0$ , что поле  $W$  не имеет особых точек. Тогда поле  $W$  есть градиентно подобным для функции  $g$  и касательным к  $F$ . Функция  $g$  будет возрастать при движении по интегральным траекториям поля  $W$ . Поскольку через каждую точку проходит интегральная траектория, а каждая траектория пересекает  $g^{-1}(v_1)$  и  $g^{-1}(v_2)$ , то, выбрав в качестве параметра на траектории значение функции в соответствующих точках, мы получим, что каждая точка из  $g^{-1}([v_1, v_2])$  задается парой (точка из  $g^{-1}(v_1)$ , значение  $[v_1, v_2]$ ). Поскольку интегральная траектория является решением дифференциального уравнения, которое непрерывно зависит от начальных условий, имеем, что построенное биективное отображение есть гомеоморфизмом.  $\square$

**Лемма 2.** *Если полуинтервал  $[v_1, v_2)$  содержит одно критическое значение, а соответствующая критическая точка является минимумом, то множество*

$$g^{-1}([v_1, v_2]) = g^{-1}((-\infty, v_2])$$

*гомеоморфно трехмерному полудиску*

$$D_-^3 = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \leq 0\},$$

*а функция  $g$  при этом соответствует функции*

$$g_h(x, y, z) = z.$$

*Доказательство.* Заметим, что в точке минимума поле градиента  $\text{grad} g$  направлено вовнутрь области. Тогда найдется такая окрестность минимума, в которой для каждой точки границы поле градиента также направлено вовнутрь области.

Рассмотрим вначале случай, когда  $f^{-1}([v_1, v_2])$  лежит в этой окрестности. Векторное поле  $\text{grad} f$  имеет одну особую точку — источник во множестве  $f^{-1}([v_1, v_2])$ , и поэтому оно гомеоморфно 2-диску, который гомеоморфен нижней полусфере трехмерного полудиска. Зафиксируем этот гомеоморфизм. Тогда он задает соответствие между траекториями полей градиента функций  $g$  и  $g_h$ . Выбрав гомеоморфизм между областями значений этих функций в рассматриваемой окрестности и параметризовав траектории полей градиента при помощи значений функции, получим искомый гомеоморфизм.  $\square$

Поскольку в седловых критических точках функции  $f$  векторное поле  $\text{grad} g \neq 0$ , а его проекция на касательную плоскость к  $F$  — поле  $\text{grad} f = 0$ , то седловые точки на поверхности  $F$  делятся на два типа:

- 1) положительные, в которых поле градиента функции  $g$  направлено внутрь области  $U$ ;
- 2) отрицательные, в которых поле градиента функции  $g$  направлено вовне, из области  $U$ .

**Лемма 3.** *Предположим, что отрезок  $(v_1, v_2)$  содержит одно критическое значение, соответствующее положительной седловой точке, тогда  $g^{-1}(v_2)$  гомеоморфно*

$$g^{-1}(v_1) \cup h_+,$$

а  $g^{-1}((-\infty, v_2])$  гомеоморфно

$$g^{-1}((-\infty, v_1]) \cup H_+.$$

Здесь  $h_+$  — криволинейный  $2n$ -угольник, пересекающийся с краем  $\partial g^{-1}(v_1)$  по  $n$  сторонам, среди которых нет соседних, индекс Пуанкаре критической точки равен  $n - 1$ , и

$$\text{Inth}_+ \cap \text{Int}g^{-1}(v_1) = \emptyset.$$

При этом  $H_+$  — та полукрестность  $h_+$ , которая пересекается с  $g^{-1}((-\infty, v_1])$ .

*Доказательство.* Известно, см. [5], что в окрестности вырожденной седловой точки функция  $f$  топологически эквивалентна функции

$$f_n(x, y) = \operatorname{Re}(x + iy)^n.$$

Критический уровень в этой окрестности состоит из объединения  $n$  отрезков, у которых одна общая точка — их общий центр. Этот уровень разбивает окрестность на  $2n$  сегментов, в половине из которых значение функции больше критического значения (положительные сегменты), а в остальных — меньше (отрицательные сегменты). При этом отрицательные и положительные сегменты чередуются. Будем рассматривать окрестность критической точки как криволинейный  $2n$ -угольник, вершинами которого являются точки пересечения границы окрестности с критическим уровнем. Сторонами будут пересечения сегментов с границей. Таким образом, стороны, как и сегменты, делятся на два типа — положительные и отрицательные, и чередуются между собой.

При прохождении критического значения к

$$f^{-1}((-\infty, v_2])$$

добавляется критическая точка вместе со своей окрестностью, т.е. приклеивается криволинейный  $2n$ -угольник по отрицательным сторонам.

Оставшаяся часть

$$f^{-1}((-\infty, v_2]) \setminus f^{-1}((-\infty, v_1))$$

может быть рассмотрена как цилиндр (прямое произведение на отрезок) над незаклеенной частью границы. Как и

выше, структура прямого произведения задается при помощи поля градиента. Таким образом, добавление этой части не изменяет топологический тип множества

$$f^{-1}((-\infty, v_2]).$$

Проведем интегральные траектории поля  $\text{grad } g$  в множестве

$$g^{-1}((-\infty, v_2]) \setminus g^{-1}((-\infty, v_1)).$$

Они задают отображение построенного  $2n$ -угольника на приклеиваемый криволинейный  $2n$ -угольник  $h_+$  и гомеоморфизм между оставшимися частями  $g^{-1}(v_1)$  и  $g^{-1}(v_2)$ . При этом объединение траекторий между  $2n$ -угольниками будет образовывать множество  $H_+$ , которое необходимо приклеить к  $g^{-1}((-\infty, v_1])$ , чтобы получить  $g^{-1}((-\infty, v_2])$ . Лемма доказана.  $\square$

**Следствие 1.** *Предположим, что отрезок  $(v_1, v_2)$  содержит одно критическое значение, соответствующее отрицательной седловой точке, тогда эта точка является отрицательной для функции  $-f$  и к этой функции применима лемма 2. При этом  $g^{-1}(v_2)$  гомеоморфно  $g^{-1}(v_1) \setminus h_-$ . Здесь  $h_- \subset g^{-1}(v_1)$  — двумерный диск, пересекающийся с краем  $\partial g^{-1}(v_1)$  по  $n$  дугам из его границ, где  $n$  — индекс Пуанкаре критической точки. Более того, множество  $g^{-1}((-\infty, v_2])$  гомеоморфно  $g^{-1}((-\infty, v_1])$ .*

## 2. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПРОДОЛЖЕНИЯ

**Теорема 1.** *Если существует продолжение функции  $f$  на трехмерную область без критических точек внутри области, то множество седловых критических точек можно разбить на две части так, что суммы индексов Пуанкаре критических точек в каждой из частей равны.*

*Доказательство.* Рассмотрим вначале случай положительной точки индекса Пуанкаре 1. Тогда при ее прохождении к краю уровня приклеивается четырехугольник по паре противоположных сторон, т.е. полоска. Возможны 3 случая такой приклейки.

1) к одной компоненте края. В этом случае число компонент уровня не изменяется, а число компонент края увеличивается на 1, род компонент не изменяется;

2) к разным компонентам края, но одной компоненте уровня. В этом случае род этой компоненты уровня увеличивается на 1, остальных не изменяется, число компонент уровня не изменяется, а род компонент края уменьшается на 1;

3) к разным компонентам уровня. В этом случае число компонент уровня уменьшается на 1, и число компонент края также уменьшается на 1, суммарный род компонент не изменяется.

При прохождении положительной критической точки индекса  $n$  происходит приклейка  $(2n+2)$ -угольника, что равносильно приклейке  $n$  четырехугольников. Таким образом, происходит  $n$  изменений, описанных числа компонент и суммарного рода, касающихся случаев 1)-3).

При прохождении отрицательной точки происходят обратные изменения. Поскольку при прохождении положительной точки невозможно уменьшить род или увеличить число компонент уровня, или уменьшить число компонент края, не изменяя суммарного рода и числа компонент уровня, то общее число изменений 1)-3), производимых положительными точками, равно числу обратных изменений, производимых отрицательными точками. Таким образом, суммы индексов Пуанкаре соответствующих точек равны.  $\square$



**Следствие 2.** У функции с одним седлом, у которого индекс Пуанкаре не равен 0, не существует продолжения.

У функции с двумя седлами продолжение существует, если их индексы равны. Топологическая классификация таких продолжений получена в работе [3].

Существует функция с тремя седловыми точками индексов 2, 4, 2, у которой регулярные уровни связные и которая не имеет продолжения. Для функций Морса все индексы Пуанкаре седловых точек равны 1. Тем не менее, существует функция с 4 седлами, лежащими на одном уровне, которая не может быть продолжена внутрь области. У нее каждая полоса, соответствующая критической точке, соединяет пару диаметрально противоположных точек на окружности.

**Теорема 2.** Пусть функция  $f$  имеет критические точки  $x_i^j$  с индексами Пуанкаре  $p_i^j$  и критическими значениями  $v^j$ , которые упорядочены по возрастанию;  $k^j$  — множество компонент регулярного уровня (окружностей) функции  $f$  между  $v^j$  и  $v^j + 1$ . Пусть  $g$  — продолжение функции  $f$  на трехмерную область  $U$ ,  $K^j$  — множество компонент регулярного уровня (поверхностей) между  $v^j$  и  $v^j + 1$ ,  $g^j$  — суммарный род этих поверхностей. Тогда существует такой набор чисел  $a_i^j \in \{1, -1\}$ , что для всех  $j$  выполнено равенство

$$\sum_{m < j+1} a_i^m p_i^m = k^j + 2g^j - 2K^j + 1,$$

причем точки с разными знаками попадают в разные части, а суммы индексов Пуанкаре критических точек в каждой из частей равны между собой.

*Доказательство.* Предположим, что продолжение существует. Тогда припишем положительным седловым точкам значение  $a_i^j = 1$ , а отрицательным  $-a_i^j = -1$ . Как и при доказательстве теоремы, рассмотрим прохождение положительной точки с индексом Пуанкаре 1. Тогда правая часть равенства в каждом из трех случаев увеличивается на 1. Прохождение точки индекса  $n$  равносильно прохождению  $n$  точек индекса 1. В этом случае правая и левая части равенства увеличиваются на  $n$ . При прохождении отрицательных точек происходит уменьшение правой и левой частей на одинаковое число. Осталось заметить, что вначале, до прохождения седловых точек, поверхность уровня — двухмерный диск ( $k = 1, K = 1, g = 0$ ), т.е. равенство выполняется (левая и правая части равны 0). Это завершает доказательство.  $\square$

**Замечание 1.** Если числа  $k^j$  определяются графом Роба, то числа  $g^j$  и  $K^j$  зависят еще и от знаков  $a_i^j$ . Например,  $g^j$  не превышает половины суммы

$$\sum_{m < j+1} p_i^m$$

положительных седловых точек.  $K^j + 1$  не превышает

$$\sum_{m < j+1} p_i^m$$

отрицательных седловых точек.

### 3. КРИТЕРИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПРОДОЛЖЕНИЯ

Далее рассмотрим функции, у которых на каждом критическом уровне лежит одна критическая точка. Пусть  $z^j$  — произвольные регулярные значения функции такие,

что

$$v^j < z^j < v^{j+1}.$$

Множество компонент прообразов разобьем на подмножества и каждому такому подмножеству припишем неотрицательное целое число, называемое родом подмножества.

Заметим, что компонентам прообраза соответствуют ребра на графе Рибо функции, а критическим точкам  $x^j$  — вершины  $v^j$ . Ориентация ребер графа Рибо производится в соответствии с направлением возрастания функции.

**Теорема 3.** Пусть  $f$  — гладкая функция с изолированными критическими точками на замкнутой ориентированной поверхности  $F$ , у которой один локальный минимум и один локальный максимум. Для того, чтобы существовало вложение  $e : F \rightarrow \mathbb{R}^3$  поверхности в трехмерное евклидово пространство, при котором функция может быть продлена без критических точек на трехмерную область  $U$ ,  $\partial U = e(F)$ , необходимо и достаточно, чтобы существовал такой набор чисел  $a^j \in \{1, -1\}$  и такое разбиение компонент регулярных уровней функции  $f$ , которые изменяются при переходе через критическую точку по правилу:

если точке приписано число  $a^j = 1$ , то при возрастании значений функции все подмножества, у которых есть элементы, соответствующие ребрам, входящим в вершину  $v^j$ , после ее прохождения объединяются в одно подмножество. Род его равен сумме родов объединенных подмножеств плюс половина суммы индекса Пуанкаре и общего числа компонент объединяемых подмножеств за вычетом числа компонент образовавшегося подмножества и числа объединяемых подмножеств. Если точке приписано число  $a^j = -1$ , то выполняется все то же

*самое при убывании значения функции. При этом объединяемым подмножествам будут соответствовать выходящие из вершины ребра.*

*Доказательство. Необходимость.* Пусть  $u$  функции существует продолжение. Тогда, как и выше,  $a^j = 1$  в положительных точках и  $a^j = -1$  в отрицательных. В одно подмножество входят те компоненты, которые образуют край одной компоненты поверхности уровня продления функции.

Рассмотрим положительную седловую точку. Если ее индекс равен числу объединяемых поверхностей, то образуется одна новая поверхность, род которой равен сумме родов, а число компонент края — сумме чисел компонент в каждом подмножестве минус число подмножеств плюс один. Если же индекс больше числа поверхностей, то к объединению поверхностей приклеиваются дополнительные полоски. Каждая такая полоска либо увеличивает число компонент края на 1, не изменяя рода, либо уменьшает число компонент на 1, увеличивая при этом род на 1. Сформулированное правило удовлетворяет всем этим требованиям.

*Достаточность.* Построим некоторое трехмерное тело, гомеоморфное (а значит и диффеоморфное) области  $U$ , и функцию, продолжающую функцию на краю. Будем строить его последовательно, проходя критические значения функции от наименьшего к наибольшему. При прохождении минимума имеем трехмерный полудиск, как и в лемме 2. Далее, при движении к следующему критическому значению приклеиваем цилиндр  $D^2 \times [0, 1]$ . Если следующая точка положительная седловая, то приклеиваем  $H_+$ , как и в лемме 3, если же отрицательная, то просто переразбиваем край полученного объединения, как в следствии. Затем

снова клеим цилиндр и т.д. В конце приклеиваем верхний полудиск, отвечающий точке максимума.

На каждом этапе мы получаем трехмерное тело. Приклейка  $H_+$  увеличивает род, остальные приклейки не изменяют его топологического типа. В окрестностях критических точек функция задается стандартным образом, а на каждом цилиндре — это проекция на второй сомножитель в сумме с подходящей константой. Сгладив функцию на границе склеек, получим функцию на трехмерном теле. Взяв композицию диффеоморфизма области на тело с построенной функцией, получаем искомое продолжение функции с поверхности на трехмерную область.  $\square$

**Выводы.** В работе исследованы закономерности изменений топологических свойств прообраза функции при прохождении критических точек на границе трехмерной области.

Получена формула изменения рода и компонент уровня в зависимости от индекса проходимой точки.

Для функций с одним локальным минимумом, одним локальным максимумом и у которых разные критические точки имеют разные значения доказан критерий существования такого вложения поверхности в  $\mathbb{R}^3$ , что функция может быть продолжена вовнутрь области, ограниченной данной поверхностью, без критических точек.

Полученные результаты могут быть применены как в топологии, так и при решении различных задач математической физики. Авторы надеются, что полученные результаты можно будет обобщить на случай функции с произвольным числом локальных минимумов и максимумов, а также функций, с конечным числом критических точек на каждом критическом уровне.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] *Кронрод А. С.* О функциях двух переменных // Успехи мат. наук. — 1950. — Т. 5(35). — С. 24–134,
- [2] *Кудрявцева Е. А.* Реализация гладких функций на поверхностях в виде функций высоты // Матем. сборник. — 1999. — Т. 190, № 3. — С. 29–88
- [3] *Лукова Н.* Функції без критичних точок на тривимірних багатовидах з межею // Геометрія, топологія та їх застосування: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2004. — Т. 6, № 2. — С. 417–425.
- [4] *Burlet O., Haab V.* Réalisations de fonctions de Morse sur des surfaces, par des immersions et plongements dans l'espace  $\mathbf{R}^3$  // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. — 1985. — V. 300, № 12. — P. 401–406.
- [5] *Prishlyak A. O.* Topological equivalence of smooth functions with isolated critical points on a closed surface // Topol. Appl. — 2002. — V. 119, № 3. — P. 257–267.
- [6] *Reeb G.* Sur les points singuliers d'une forme de Pfaff complètement intégrable ou d'une fonction numérique // C. R. Acad. Sci. Paris. — 1954. — V. 222. — P. 847–849.

Пришляк А. О.  
Киевский национальный университет  
имени Тараса Шевченко  
prishlyak@yahoo.com

Пришляк Е. А.  
Киевский национальный университет  
имени Тараса Шевченко

Вятчанинова Е. Н.  
Киевский национальный университет  
имени Тараса Шевченко

## Про число топологічно нееквівалентних функцій з однією виродженою критичною точкою типу сідла на двовимірній сфері

*Кадубовський О. А.*

В роботі досліджуються гладкі функції з трьома критичними значеннями на двовимірній сфері  $S^2$ , у яких, окрім  $M$  локальних максимумів і  $m$  мінімумів, лише одна (вироджена) критична точка типу сідла. Для функцій із заданим числом максимумів і мінімумів представлено повний топологічний інваріант, за допомогою якого підраховано число топологічно нееквівалентних функцій із вказаного класу, що мають від одного до чотирьох локальних мінімумів (або ж максимумів). У випадку, коли  $M+m-1$  є простим числом, підраховано число топологічно нееквівалентних функцій із вказаного класу.

In this paper we consider smooth functions with three critical values on two-dimensional sphere  $S^2$ , that possess only one saddle critical point (possibly degenerate) in addition to  $M$  local maxima and  $m$  minima. For the case when the number  $M+m-1$  is a prime, we calculate the number of topologically non-equivalent such functions.

### Вступ

Нехай  $(N, \partial N)$  — гладка поверхня з краєм  $\partial N$  ( $\partial N$  може бути порожнім). Позначимо через  $C^\infty(N)$  простір нескінченно диференційовних функцій на  $N$  з краєм

$$\partial N = \partial_- N \cup \partial_+ N,$$

всі критичні точки яких ізольовані та лежать у внутрішності  $N$ , а на компонентах зв'язності краю  $\partial_- N$  (відп.  $\partial_+ N$ ) приймають однакове значення  $a$  (відп.  $b$ ).

Дві функції  $f$  і  $g$  з простору  $C^\infty(N)$  називають *топологічно еквівалентними*, якщо існують гомеоморфізми  $k: N \rightarrow N$  і  $l: R^1 \rightarrow R^1$  такі, що

$$g = l \circ f \circ k^{-1}$$

причому  $l$  зберігає орієнтацію.

В подальшому ми завжди будемо вважати, що  $N$  — *орієнтовна поверхня*. Якщо гомеоморфізм  $k$  зберігає орієнтацію, функції  $f$  і  $g$  будемо називати *O-топологічно еквівалентними*.

Відомо [1], що функція  $f \in C^\infty(N)$  в деякому околі своєї ізольованої критичної точки  $x \in N$ , яка не є локальним екстремумом і у якій топологічний тип ліній рівня змінюється при переході через  $x$ , неперервною заміною координат зводиться до вигляду  $f = \operatorname{Re} z^n + c$ ,  $n \geq 2$ . В подальшому будемо називати її *істотно критичною*. Або до вигляду  $f = \operatorname{Re} z$ , якщо топологічний тип ліній рівня при переході через  $x$  не змінюється.

Число  $k$  істотно критичних точок  $x_i$  функції  $f$  разом зі значеннями  $n_i$  (показниками в представленні  $f$  у формі  $f = \operatorname{Re} z^{n_i} + c_i$  в околах точок  $x_i$ ) називають *топологічним сингулярним типом* функції  $f$ .

В роботі [2] досліджено питання топологічної класифікації функцій з класу  $C^\infty(N)$  й встановлено, що існує лише *скінченне* число топологічно нееквівалентних функцій з фіксованим сингулярним типом. Проте невідомо скільки таких класів еквівалентності. В загальному випадку ця задача виявилась дуже складною і залишається нерозв'язаною до цього часу проблемою.

Якщо ж розглянути клас  $C_{M,m}(N_g)$  гладких функцій (з трьома критичними значеннями на замкненій орієнтованій поверхні  $N_g$  роду  $g \geq 0$ ) у яких, окрім  $M$  локальних



максимумів і  $m$  локальних мінімумів, лише *одна* (вироджена) істотно критична точка  $x_0$  типу сідла, індекс Пуанкаре якої дорівнює  $\text{ind}f(x_0) = 1 - n$ , де  $n = 2g + M + m - 1$ , то задача про підрахунок числа таких топологічно нееквівалентних функцій дещо спрощується.

Так, наприклад, в роботі [1] було встановлено початкові значення числа топологічно нееквівалентних функцій з класу  $C_{1,1}(N_g)$  для поверхонь роду  $g = 1, 2, 3$ .

В роботах [5, 6] для функцій з класу  $C_{M,m}(N_g)$  було побудовано новий інваріант та доведено, що число топологічно нееквівалентних функцій з класу  $C_{M,m}(N_g)$  дорівнює числу неізоморфних  $D_{M,m}^n$ -діаграм з  $n = 2g - 1 + M + m$  хордами. Зокрема, в [6] за допомогою вказаного інваріанту для функцій з класу  $C_{1,1}(N_g)$  поставлена задача розв'язана повністю (для  $g \in \mathbb{N}$ ).

Питання про підрахунок числа топологічно нееквівалентних функцій з класу  $C_{M,m}(N_g)$  при фіксованих  $M, m$  і  $g$  досі залишається *відкритим*.

Якщо ж розглянути клас  $C_{M,m}(N_0) = C_{M,m}(S^2)$ , то поставлена задача значно спрощується, тому що для вказаних функцій на сфері число мінімумів  $M$ , максимумів  $m$  та індекс  $(1 - n)$  істотно критичної точки пов'язані рівністю

$$M + m - n = 1,$$

а питання про підрахунок числа  $O$ -топологічно (топологічно) нееквівалентних таких функцій зводиться до питання про підрахунок числа неізоморфних (нееквівалентних) двокольорових  $D_{M,m}^n$ -діаграм з  $n = M + m - 1$  хордами.

В представлений роботі наведено формули для підрахунку числа топологічно нееквівалентних функцій з класу

$C_{M,n-M+1}(S^2)$  для довільного  $n \geq 1$  та початкових значень  $M = 1 \dots 4$ . Крім того, для простого  $n$  і довільного  $M \in \{1, 2, \dots, n\}$  поставлена задача розв'язана повністю.

### 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ЗАУВАЖЕННЯ

**Означення 1.** *Нехай на площині задане коло і  $2n$  точок на ньому, які є вершинами правильного  $2n$ -кутника. Розіб'ємо ці точки на  $n$  пар і з'єднаємо кожну таку пару хордою. Отриману конструкцію — коло з  $n$  хордами на ній — називають хордовою діаграмою з  $n$  хордами або, коротко,  $n$ -діаграмою.*

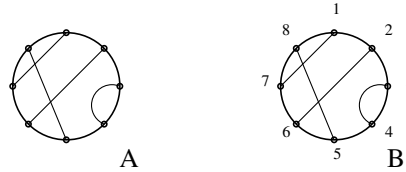


Рис. 1. Хордова 4-діаграма

**Зауваження 1.** *Всі  $n$ -діаграми будуються на основі  $2n$ -шаблону — кола з фіксованою нумерацією  $2n$  точок на ньому, які є вершинами правильного  $2n$ -кутника — рис. 1 (B).*

**Означення 2.** *Циклом  $n$ -діаграми будемо називати послідовність хорд і дуг кола, які утворюють гомеоморфний образ орієнтованого кола, рис. 2.*

**Означення 3.** *Родом хордової  $n$ -діаграми з  $\lambda$  циклами називають ціле додатне число  $g$ , яке визначається співвідношенням  $g = \frac{n-\lambda+1}{2}$ .  $n$ -Діаграму роду  $g = 0$  називають планарною, або ж діаграмою мінімального роду.*

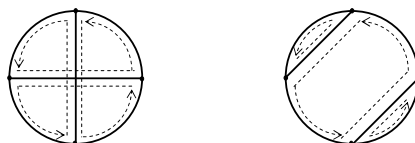


Рис. 2. а) 2-діаграма з 1 циклом; б) 2-діаграма з 3 циклами

Добре відомо, що хордова діаграма є планарною тоді і тільки тоді, коли її хорди не перетинаються.

**Означення 4.** 2-кольоровою хордовою діаграмою будемо називати  $n$ -діаграму, дуги кола якої по черзі розфарбовані у два кольори (чорний і білий) — рис. 3.

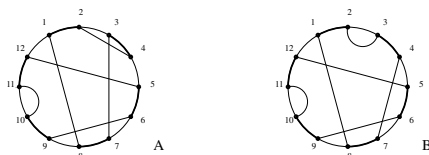


Рис. 3. А — 2-кольорова  $N$ -діаграма; В — 2-кольорова  $O$ -діаграма

**Означення 5.** 2-кольорову  $n$ -діаграму, яка не містить (містить) хорд, що сполучають вершини з номерами однакової парності, будемо називати  $O$ -діаграмою ( $N$ -діаграмою) — рис. 3.

**Означення 6.**  $w$ -циклом ( $w$ -циклом) 2-кольорової діаграми називають послідовність хорд та чорних (білих) дуг, які утворюють гомеоморфний образ (орієнтованого) кола.

**Зауваження 2.** Якщо проігнорувати кольори, то кожен чорний (білий) цикл 2-кольорової  $O$ -діаграми (див. наприклад рис. 3B) співпадає з відповідним циклом звичайної діаграми. Тому природним чином визначається рід 2-кольорової  $O$ -діаграми, а саме

**Означення 7.** Нехай  $\lambda$  — сумарне число чорних та білих циклів 2-кольорової  $O$ -діаграми з  $n$  хордами. Родом діаграми будемо називати ціле число  $g$ , яке визначається співвідношенням

$$(1.1) \quad g = \frac{1 + n - \lambda}{2}.$$

Множину  $O$ -діаграм (з  $n$  хордами) роду  $g = 0$  позначимо через  $L_n^0$ .

**Означення 8.**  $O$ -діаграму (з  $n$  хордами) з  $M$  чорними (білими) та  $m$  білими (чорними) циклами будемо позначати  $D_{M,m}^n$ , а множину всіх таких діаграм —  $L_{M,m}^n$ .

**Означення 9.** Дві хордові діаграми (зокрема двокольорові) називають ізоморфними, якщо їх можна сумістити за допомогою повороту на певний кут (наприклад, за годинниковою стрілкою) навколо спільного центру.

**Означення 10.** Дві хордові діаграми (зокрема двокольорові) називають еквівалентними, якщо їх можна сумістити за допомогою дзеркального відбиття та (або) повороту на певний кут (за годинниковою стрілкою) навколо спільного центру.

Нехай  $M$  — підмножина класу  $L_n$  двокольорових хордових діаграм, побудованих на двокольоровому  $2n$ -шаблоні.

З леми Бернсайда та роботи [6] випливає, що **число неізоморфних двокольорових діаграм з класу  $M$  можна обчислити за допомогою формули**

$$(1.2) \quad d^* = \frac{1}{n} \cdot \left( |M| + \sum_{i|n, i \neq n} \phi\left(\frac{n}{i}\right) \cdot p(i, n) \right), \text{ де}$$

$|M|$  — кількість діаграм множини  $M$ ;  $\phi(q)$  — функція Ейлера;  $p(i, n)$  — число двокольорових діаграм множини  $M$  (побудованих на шаблоні), які суміщаються самі з собою при повороті на кут  $\omega = \frac{2\pi}{2n}2i = \frac{2i\pi}{n}$  (навколо центру шаблону), а підсумовування ведеться за всіма дільниками числа  $n$  за винятком самого  $n$ .

**Означення 11.** Розбиттям  $\pi_{k,n}$  множини

$$[n] = \{1, 2, \dots, n-1, n\}$$

(partition of  $[n]$  with  $k$  blocks) називають сукупність  $k$  непорожніх підмножин  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k$  множини  $[n]$ , які попарно не перетинаються і об'єднання яких становить  $[n]$ . Підмножини  $\pi_i$  називають блоками або ж частинами  $\pi_{k,n}$ . Через  $NSP_n$  позначимо всі розбиття множини  $[n]$ .

Розбиття  $\pi_{k,n}$  множини  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$  подають у вигляді  $\pi = \pi_1/\pi_2/\dots/\pi_k$  та вважають, що всередині кожного блоку елементи розташовані в порядку зростання, а самі блоки розташовуються в порядку зростання їх мінімальних елементів.

**Означення 12.** Розбиття  $\pi_{k,n}$  називають без самоперетинів (non-crossing partition) або ж планарним, якщо не існує елементів  $a < b < c < d$ , з яких  $a$  і  $c$  — в одному,  $a$  і  $d$  — в іншому блоці. Множину таких  $\pi_{k,n}$  позначимо через  $NSP_{k,n}$ .

2. Бієктивність класів  $L_{M,m}^{M+m-1}$  та  $NCP_{M,M+m-1}$ 

Якщо зафіксувати шаблон — коло та  $n$  точок на ньому (що є вершинами правильного  $n$ -кутника), занумерувати їх, наприклад, за годинниковою стрілкою числами від 1 до  $n$ , то кожному, зокрема планарному, розбиттю можна поставити у відповідність кругову діаграму — 4-граф, який в загальному випадку містить ізольовані вершини (петлі) та подвійні ребра. Зауважимо, що планарним розбиттям відповідають кругові діаграми, що не містять хорд (дуг) які перетинаються. Не важко бачити, що якщо кожну з

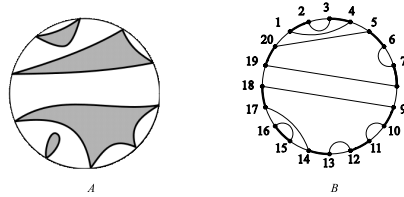


Рис. 1.  $A$  — Представлення планарного розбиття  $\pi = (1, 2)(3, 4, 10)(5, 6, 7, 9)(8)$  на круговій діаграмі з 10 вершинами;  
 $B$  — двокольорова  $O$ -діаграма роду 0, яка побудована на двокольоровому  $2n$ -шаблоні ( $n = 10$ ) та відповідає розбиттю  $\pi$

$n$  точок на круговій діаграмі-шаблоні представлення планарного розбиття  $\pi_{k,n}$  «розширити» до чорної дуги (діючи в напрямку із середини до зовнішності), то одержимо 2-кольорову  $O$ -діаграму саме з  $n$  хордами, яка має точно  $k$  чорних циклів, та не має хорд, що перетинаються.

І навпаки, кожній діаграмі з класу  $L_{M,m}^{M+m-1}$  відповідає єдине представлення (на круговій діаграмі-шаблоні з

$$n = M + m - 1$$

точками) планарного розбиття  $\pi_{M,n} \in NCP_{M,n}$

Таким чином, встановлено бієкцію між елементами множин  $L_{M,m}^{M+m-1}$  та  $NCP_{M,M+m-1}$ .

В подальшому множину діаграм з класу  $L_{M,m}^{M+m-1}$  будемо позначати  $\mathfrak{S}_{M,n}$  ( $n = M + m - 1$ ) або ж  $\mathfrak{S}_{k,n}$ .

### 3. НЕІЗОМОРФНІ $O$ -ДІАГРАМИ МІНІМАЛЬНОГО РОДУ З ФІКСОВАНИМ ЧИСЛОМ ЧОРНИХ (АБО БІЛИХ) ЦИКЛІВ

Використовуючи результати роботи [3], в якій досліджувались розбиття з множини  $NCP_n$ , неважко встановити, що число  $p_n^*$  неізоморфних діаграм з класу  $L_n^0$  можна обчислити за допомогою співвідношення

$$(3.1) \quad p_n^* = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{n+1} \cdot C_{2n}^n + \sum_{i \neq n, i|n} \phi\left(\frac{n}{i}\right) \cdot C_{2i}^i \right).$$

В загальному випадку — при фіксованих  $n$ ,  $M$  і  $m$  (які задовольняють умову  $M+m-n=1$ ) — задача про підрахунок числа неізоморфних діаграм з класу  $L_{M,n+1-M}^n$  ( $\mathfrak{S}_{M,n}$ ) є **нерозв'язаною**.

Якщо ж обмежитися розглядом лише початкових значень  $M \in \{1, 2, 3, 4\}$  (або ж  $M \in \{n, n-1, n-2, n-3\}$ ), то результати є цілком досяжними й одержані в даній роботі.

Введемо далі такі позначення:

$P_{k,n}$  — число діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{k,n}$  (побудованих на шаблоні);  $P_{k,n}^*$  — число неізоморфних діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{k,n}$ .

Оскільки існує бієкція між елементами множин  $NCP_{k,n}$  та  $\mathfrak{S}_{k,n}$ , то має місце твердження.

**Лема 1.** Число двокольорових діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{k,n}$  (побудованих на шаблоні) співпадає з числом Нараяна  $P_{k,n}$

$$(3.2) \quad P_{k,n} = N(k, n) = \frac{1}{n} C_n^k \cdot C_n^{k-1}.$$

**Наслідок 1.** Справедливими є наступні співвідношення

$$(3.3) \quad P_{k,n} = P_{n-k+1,n},$$

$$(3.4) \quad P_{k,n}^* = P_{n-k+1,n}^*.$$

Більш повну інформацію можна знайти, наприклад в [4].

**3.1. Число неізоморфних діаграм з класів  $\mathfrak{S}_{1,n}$  та  $\mathfrak{S}_{2,n}$ .** В роботі [7] встановлено справедливість таких тверджень.

**Твердження 1.**  $P_{1,n}^* = 1$ .

**Твердження 2.** Число неізоморфних діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{2,n}$  можна обчислити за допомогою співвідношень

$$P_{2,n}^* = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{n} C_n^2 C_n^1 + p(2, n) \right), \text{ де } p(2, n) = \begin{cases} 0, & n \neq 2m \\ \frac{n}{2}, & n = 2m. \end{cases}$$

**3.2. Число неізоморфних діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{3,n}$ .**

**Лема 2.** Число неізоморфних діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{3,n}$  можна обчислити за допомогою наступних співвідношень

$$P_{3,n}^* = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{n} C_n^3 C_n^2 + p(3, n) \right),$$

де

$$(3.5) \quad p(3, n) = \begin{cases} 0, & n = 6m \pm 1 \\ \frac{1}{4}n(n-2), & n = 6m \pm 2 \\ \frac{2}{3}n, & n = 6m \pm 3 \\ \frac{1}{12}n(3n+2), & n = 6m. \end{cases}$$



*Доведення.* Всі діаграми з класу  $\mathfrak{S}_{3,n}$  вичерпуються діаграмами двох типів, позначених на рис. 1 як перший і другий. Перші характеризуються наявністю одного «3-дужника» та  $(n-3)$ -х простих циклів, другі — наявністю двох «2-дужників», які не перетинаються та  $(n-4)$ -х простих циклів.

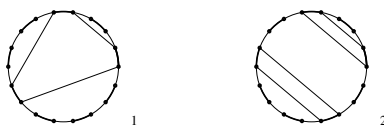


Рис. 1. Всі можливі типи діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{3,n}$

Позначимо через  $A_n$  і  $B_n$  кількість діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{3,n}$  (побудованих на шаблоні) першого і другого типу відповідно.

Нехай далі  $A_n^*$  ( $B_n^*$ ) — число неізоморфних діаграм першого (другого) типу. Тоді очевидно, що  $P_{3,n}^* = A_n^* + B_n^*$ .

Обчислимо окремо число неізоморфних діаграм кожного з двох можливих типів. Неважко бачити, що  $A_n = C_n^3$ ,  $B_n = 2C_n^4$ . Крім того, справджується рівність

$$(3.6) \quad A_n + B_n = C_n^3 + 2C_n^4 = \frac{1}{n} C_n^3 C_n^2.$$

Діаграми першого типу, які суміщаються самі з собою при повороті на кут  $\omega = \frac{2\pi}{2n} \cdot 2i$ ,  $i = 1, \dots, n-1$  (за годинниковою стрілкою) є такими, що 3-дужник також переходить у себе. Це можливо лише за умови коли  $n$  ділиться на 3, а поворот здійснюється на кут, кратний куту  $\omega = \frac{2\pi}{3}$  (при  $i = \frac{n}{3}$ ).

Тому загальна кількість діаграм першого типу, які само суміщаються при повороті на кут, кратний  $\frac{2\pi}{3}$ , становить

$A_{n, \frac{n}{3}} = \phi(3) \cdot a_{n,3}$ , де

$$(3.7) \quad a_{n,3} = \begin{cases} 0, & n \neq 3k \\ \frac{1}{3}n, & n = 3k. \end{cases}$$

Тоді за лемою Бернсайда число неізоморфних діаграм першого типу можна обчислити за допомогою співвідношень

$$A_n^* = \frac{1}{n} (C_n^3 + 2 \cdot a_{n,3}) = \begin{cases} \frac{1}{n} C_n^3, & n \neq 3k \\ \frac{1}{n} C_n^3 + \frac{2}{3}, & n = 3k. \end{cases}$$

Діаграми другого типу, які суміщаються самі з собою при повороті на кут  $\omega = \frac{2\pi}{2n} \cdot 2i$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , є такими, що 2-дужники переходять один в інший. Це можливо лише за умови коли  $n$  ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту  $\omega = \pi$  (при  $i = \frac{n}{2}$ ). Тому загальна кількість діаграм другого типу, які суміщаються самі з собою при повороті на кут, кратний  $\pi$ , становить  $B_{n, \frac{n}{2}} = \phi(2) \cdot b_{n,2}$ , де

$$(3.8) \quad \begin{aligned} b_{n,2} &= \begin{cases} 0, & n \neq 2l \\ \frac{1}{2} (C_n^2 - \frac{n}{2}), & n = 2l \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & n \neq 2l \\ \frac{n(n-2)}{4}, & n = 2l. \end{cases} \end{aligned}$$

І тому за лемою Бернсайда число неізоморфних діаграм другого типу можна обчислити за допомогою співвідношень

$$B_n^* = \frac{1}{n} (2C_n^4 + b_{n,2}) = \begin{cases} \frac{2}{n} C_n^4, & n \neq 2l \\ \frac{2}{n} C_n^4 + \frac{1}{4}(n-2), & n = 2l. \end{cases}$$

Оскільки

$$P_{3,n}^* = A_n^* + B_n^* = \frac{1}{n} ((C_n^3 + 2C_n^4) + (2 \cdot a_{n,3} + b_{n,2})),$$

то, з урахуванням (3.6)–(3.8), маємо (3.5).  $\square$

3.3. Число неізоморфних діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{4,n}$ .

**Лема 3.** Число неізоморфних діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{4,n}$  можна обчислити за допомогою наступних співвідношень:

$$P_{4,n}^* = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{n} C_n^4 \cdot C_n^3 + p(4, n) \right),$$

$$p(4, n) =$$

$$(3.9) \quad = \begin{cases} 0, & n = 6m \pm 1 \\ \frac{1}{16}n(n-2)^2, & n = 12m \pm 2 \\ \frac{2}{9}n(n-3), & n = 12m \pm 3 \\ \frac{1}{16}n((n-2)^2 + 8), & n = 12m \pm 4 \\ \frac{1}{144}n(9(n-2)^2 + 32(n-3)), & n = 12m \pm 6 \\ \frac{1}{144}n(9(n-2)^2 + 32(n-3) + 72), & n = 12m. \end{cases}$$

*Доведення.* Всі діаграми з класу  $\mathfrak{S}_{4,n}$  вичерпуються діаграмами чотирьох типів, позначених на рис. 2 як перший, другий, третій і четвертий: перші характеризуються наявністю одного «4-дужника» та  $(n-4)$ -х простих циклів; другі — наявністю одного «3-дужника», одного «2-дужника» та  $(n-5)$ -ти простих циклів; треті — наявністю трьох «2-дужників» (кожні два з яких розташовані по різні боки від третього), та  $(n-6)$ -ти простих циклів; четверті — наявністю трьох «2-дужників» (кожні два з яких розташовані по один бік від третього), та  $(n-6)$ -ти простих циклів. Позначимо через  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $E_n$  і  $F_n$  кількість діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{4,n}$  (побудованих на шаблоні) першого, другого, третього і четвертого типу відповідно.

Нехай далі  $A_n^*$ ,  $B_n^*$ ,  $E_n^*$  і  $F_n^*$  — число неізоморфних діаграм першого, другого, третього і четвертого типу відповідно. Тоді  $P_{4,n}^* = A_n^* + B_n^* + E_n^* + F_n^*$ .

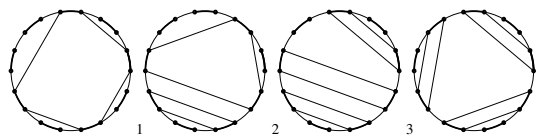


Рис. 2. Всі 4 можливі типи діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{4,n}$

Обчислимо окремо число неізоморфних діаграм кожного з чотирьох можливих типів.

Очевидно, що  $A_n = C_n^4$ ,  $B_n = 5C_n^5$ ,  $E_n = 3C_n^6$ ,  $F_n = 2C_n^6$ . Крім того, справджується рівність

$$(3.10) \quad C_n^4 + 5C_n^5 + 5C_n^6 = \frac{1}{n} \cdot C_n^4 C_n^3$$

Діаграми першого типу, які суміщаються самі з собою при повороті на кут  $\omega = \frac{2\pi}{n} \cdot 2i$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , (за годинниковою стрілкою) є такими, що 4-дужник також переходить у себе. Це можливо лише за умови коли  $n$  ділиться на 2 або ж на 4, а поворот здійснюється на кут, кратний куту  $\omega = \pi$  (при  $i = \frac{n}{2}$ ), або ж на кут, кратний куту  $\omega = \frac{\pi}{2}$  (при  $i = \frac{n}{4}$ ) відповідно. Загальна кількість діаграм першого типу, які суміщаються самі з собою при повороті на кут, кратний  $\frac{\pi}{2}$  становить  $A_{n, \frac{n}{4}} = \phi(4) \cdot a_{n,4}$ , де

$$(3.11) \quad a_{n,4} = \begin{cases} 0, & n \neq 4l \\ \frac{1}{4}n, & n = 4l. \end{cases}$$

Загальна кількість діаграм першого типу, які суміщаються самі з собою при повороті на кут, кратний  $\pi$ , становить  $A_{n, \frac{n}{2}} = \phi(2) \cdot a_{n,2}$ , де

$$(3.12) \quad a_{n,2} = \begin{cases} 0, & n \neq 2l \\ \frac{1}{4} \left( C_n^2 - \frac{n}{2} \right), & n = 2l \end{cases} \\ = \begin{cases} 0, & n \neq 2l \\ \frac{n(n-2)}{8}, & n = 2l. \end{cases}$$

Тому число неізоморфних діаграм першого типу можна обчислити за допомогою співвідношень

$$A_n^* = \frac{1}{n} \left( C_n^4 + 2 \cdot a_{n,4} + a_{n,2} \right) \\ = \begin{cases} \frac{1}{n} C_n^4, & n \neq 2l \\ \frac{1}{n} C_n^4 + \frac{n}{8} (n-2), & n = 4l \pm 2 \\ \frac{1}{n} C_n^4 + \frac{n}{8} (n+2), & n = 4l. \end{cases}$$

Оскільки серед діаграм другого типу немає таких, що суміщаються самі з собою при повороті на певний кут  $\omega = \frac{2\pi}{2n} \cdot 2i$ ,  $i = 1, \dots, n-1$  (за годинниковою стрілкою), то  $B_n^* = \frac{5}{n} \cdot C_n^5$

Діаграми третього типу, які суміщаються самі з собою при повороті на кут  $\omega = \frac{2\pi}{2n} \cdot 2i$ ,  $i = 1, \dots, n-1$  (за годинниковою стрілкою), є такими, що два 2-дужники переходять один в інший, третій сам у себе. Це можливо лише за умови коли  $n$  ділиться на 2, дуги одного з 2-дужників є діаметрально протилежними, а поворот здійснюється на кут, кратний куту  $\omega = \pi$  (при  $i = \frac{n}{2}$ ). Тому загальна кількість діаграм третього типу, які суміщаються самі з собою при

повороті на кут, кратний  $\pi$ , становить  $E_{n, \frac{n}{2}} = \phi(2) \cdot e_{n,2}$ , де

$$(3.13) \quad \begin{aligned} e_{n,2} &= \begin{cases} 0, & n \neq 2l \\ \frac{n}{2} C_{\frac{n-2}{2}}^2, & n = 2l \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & n \neq 2l \\ \frac{n}{16} (n-2)(n-4), & n = 2l. \end{cases} \end{aligned}$$

Отже, число неізоморфних діаграм третього типу можна обчислити за допомогою співвідношень

$$\begin{aligned} E_n^* &= \frac{1}{n} (3C_n^6 + e_{n,2}) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{n} 3C_n^6, & n \neq 2l \\ \frac{1}{n} 3C_n^6 + \frac{1}{16} (n-2)(n-4), & n = 2l. \end{cases} \end{aligned}$$

Діаграми четвертого типу, які суміщаються самі з собою при повороті на кут  $\omega = \frac{2\pi}{2n} \cdot 2i$ ,  $i = 1, \dots, n-1$  (за годинниковою стрілкою), є такими, що три 2-дужники переходять один в інший. Це можливо лише за умови коли  $n$  ділиться на 3, а поворот здійснюється на кут, кратний куту  $\omega = \frac{2\pi}{3}$  (при  $i = \frac{n}{3}$ ). Тому загальна кількість діаграм четвертого типу, які суміщаються самі з собою при повороті на кут кратний  $\frac{2\pi}{3}$  становить  $F_{n, \frac{n}{3}} = \phi(3) \cdot f_{n,3}$ , де

$$(3.14) \quad \begin{aligned} f_{n,3} &= \begin{cases} 0, & n \neq 3l, \\ \frac{1}{3} n \cdot \left(\frac{n}{3} - 1\right), & n = 3l \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & n \neq 3l, \\ \frac{n(n-3)}{9}, & n = 3l. \end{cases} \end{aligned}$$

І тому

$$F_n^* = \frac{1}{n} \cdot (2C_n^6 + 2f_{n,3}) = \begin{cases} \frac{1}{n} \cdot 2C_n^6, & n \neq 3l \\ \frac{1}{n} \cdot 2C_n^6 + \frac{2}{9}(n-3), & n = 3l. \end{cases}$$

З іншого боку, оскільки

$$\begin{aligned}
 P_{4,n}^* &= \frac{1}{n} (C_n^4 + 2a_{n,4} + a_{n,2}) + \\
 &+ \frac{5}{n} C_n^5 + \frac{1}{n} (3C_n^6 + e_{n,2}) + \frac{1}{n} (2C_n^6 + 2f_{n,3}) = \\
 &= \frac{1}{n} \left( \frac{1}{n} C_n^4 C_n^3 + (2 \cdot a_{n,4} + a_{n,2} + e_{n,2} + 2f_{n,3}) \right),
 \end{aligned}$$

то, з урахуванням (3.10) – (3.14), маємо (3.9). □

**3.4. Число неізоморфних діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{k,n}$  у випадку простого  $n$ .** Оскільки  $|\mathfrak{S}_{k,n}| = \frac{1}{n} C_n^k \cdot C_n^{k-1}$ , то формулу (1.2) для простого  $n$  можна подати у вигляді

$$(3.15) \quad P_{k,n}^* = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{n} C_n^k \cdot C_n^{k-1} + (n-1) \cdot p(k, n, 1) \right),$$

де  $p(k, n, 1)$  – число діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{k,n}$  (побудованих на шаблоні), які суміщаються самі з собою при повороті на кут  $\omega = \frac{2\pi}{n}$ .

Якщо  $k = 1$  (або  $k = n$ ), то  $p(k, n, 1) = 1$ , тобто що існує єдина діаграма на шаблоні, яка суміщається сама з собою при повороті на кут  $\omega = 2\pi/n$  – рис. 3.

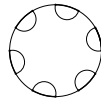


Рис. 3. Єдина діаграма з класу  $\mathfrak{S}_{1,6}$ , яка суміщається сама з собою при повороті на кут  $\omega = \frac{2\pi}{6}$

В інших випадках  $p(k, n, 1) = 0$ . Тому має місце лема.

**Лема 4.** Для простого  $n$  число неізоморфних діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{k,n}$  може бути обчислене за допомогою співвідношень

$$(3.16) \quad P_{k,n}^* = \begin{cases} \frac{1}{n^2} C_n^k C_n^{k-1} + \frac{n-1}{n}, & k = 1; n, \\ \frac{1}{n^2} C_n^k C_n^{k-1}, & k \neq 1; n. \end{cases}$$

**Наслідок 2.** Для простого  $n$  число  $O$ -топологічно нееквівалентних функцій з класу  $C_{k,n+1-k}(S^2)$  можна обчислити за допомогою співвідношення (3.16).

**3.5. Число нееквівалентних діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{k,n}$ .** За лемою Бернсайда число нееквівалентних діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{k,n}$  може бути обчислене за допомогою співвідношень

$$P_{k,n}^{**} = \frac{1}{2} \left( P_{k,n}^* + \frac{1}{n} \cdot P_{\text{sym}} \right),$$

де  $P_{\text{sym}}$  — загальна кількість симетричних діаграм з  $\mathfrak{S}_{k,n}$ , тобто діаграм, які є симетричними відносно однієї з осей симетрії двокольорового  $2n$ -шаблону. Причому

$$P_{\text{sym}} = \begin{cases} n \cdot p_0(n, k), & n = 2m \pm 1 \\ \frac{n}{2} \cdot (p_1(n, k) + p_2(n, k)), & n = 2m, \end{cases}$$

де  $p_0(n, k)$  — число діаграм з  $\mathfrak{S}_{k,n}$ , симетричних відносно фіксованої осі симетрії, що проходить через середини діаметрально протилежних чорної та білої дуг шаблону, а  $p_1(n, k)$  ( $p_2(n, k)$ ) — число діаграм з  $\mathfrak{S}_{k,n}$ , симетричних відносно фіксованої осі симетрії, що проходить через середини діаметрально протилежних чорних (білих) дуг шаблону.

Добре відомо (див. напр. [4]), що існує бієкція між елементами множини  $NC P_{k,n}$  (а тому і  $\mathfrak{S}_{k,n}$ ) та елементами множини, відомими як «Dyck  $n$ -paths with exactly  $k$  peaks».



Крім того, як випливає з робіт [3, 8], величина

$$T(n, k) = \frac{1}{n} \cdot P_{\text{sym}}$$

співпадає з числом об'єктів, відомих як «symmetric Dyck paths of semi-length  $n$  with  $k$  peaks». Зокрема в [8] показано, що

$$(3.17) \quad T(n, k) = C_{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \cdot C_{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor},$$

де  $\lfloor \cdot \rfloor$  — ціла частина числа, а  $\lceil \cdot \rceil$  — функція «стеля» — округлення до найближчого більшого цілого числа.

Таким чином, має місце твердження.

**Лема 5.** *Число нееквівалентних діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{k,n}$  може бути обчислене за допомогою співвідношення*

$$(3.18) \quad P_{k,n}^{**} = \frac{1}{2} \left( P_{k,n}^* + C_{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \cdot C_{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \right).$$

**Наслідок 3.** *Число топологічно нееквівалентних функцій з класу  $C_{k,n+1-k}(S^2)$  можна обчислити за допомогою співвідношення (3.18).*

### ВИСНОВКИ

В даній роботі встановлено критерій топологічної еквівалентності функцій з класу  $C_{M,m}(S^2)$  в термінах двокольорових  $O$ -діаграм мінімального роду з  $n = m + M - 1$  хордами, які мають  $M$  (або  $m$ ) циклів певного кольору. За допомогою таких діаграм вдалося встановити формули для підрахунку числа топологічно нееквівалентних функцій з класу  $C_{M,n-M+1}(S^2)$  для довільного  $n \geq 1$  та початкових  $M = 1; 2; 3; 4$  або ж  $M = n; n - 1; n - 2; n - 4$ .

Крім того, для простого  $n$  і довільного  $M \in \{1, 2, \dots, n\}$  поставлена задача розв'язана повністю.

$n \setminus k$	1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	1						
3	1	1	1					
4	1	2	2	1				
5	1	2	4	2	1			
6	1	3	10	10	3	1		
7	1	3	15	25	15	3	1	
8	1	4	26	64	64	26	4	1

ТАБЛ. 1. Початкові значення числа  $O$ -топологічно нееквівалентних функцій з класу  $C_{k,n+1-k}(S^2)$

$n \setminus k$	1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	1						
3	1	1	1					
4	1	2	2	1				
5	1	2	4	2	1			
6	1	3	8	8	3	1		
7	1	3	12	17	12	3	1	
8	1	4	19	41	41	19	4	1

ТАБЛ. 2. Початкові значення числа топологічно нееквівалентних функцій з класу  $C_{k,n+1-k}(S^2)$

На думку автора, дослідження в цьому напрямку доцільно продовжити, узагальнивши одержані результати для довільного  $n$  і кожного  $M \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Одержані в роботі результати можуть бути ефективно використані при підрахунку числа нееквівалентних об'єктів, відомих як «non-crossing partition of  $[n]$  with  $k$  blocks».

## ЛІТЕРАТУРА

- [1] *Prishlyak A. O.* Topological equivalence of smooth functions with isolated critical points on a closed surface // *Topol. Appl.* — 2002. — V. 119, № 3. — P. 257–267.
- [2] *Шарко В. В.* Гладкая и топологическая эквивалентность функций на поверхностях // *Укр. мат. журн.* — 2003. — Т. 55, № 5. — С. 687–700.
- [3] *Callan D., Smiley L.* Non-crossing Partitions under Rotation and Reflection // <http://arxiv.org/abs/math.CO/0510447>, 2005.
- [4] *Stanley R.* Catalan Addendum // 6 June, 2010.
- [5] *Кадубовський О.* Топологічна еквівалентність функцій на орієнтованих поверхнях // *Укр. мат. журн.* — 2006. — Т. 58, № 3. — С. 343–351.
- [6] *Кадубовський О.* Про один клас хордових діаграм максимального роду // *Вісник Київ. ун-ту Серія: фізико-математичні науки.* — 2006. — Вип. 1. — С. 17–27.
- [7] *Кадубовський О. А.* Топологічна класифікація градієнтноподібних векторних полів з однією сідловою особливістю // «Проблеми топології та суміжні питання», Зб. праць Ін-ту математики НАН України, 2006. — Т. 3, № 3. — С. 163–179.
- [8] *Barry P.* On Integer-Sequence-Based Constructions of Generalized Pascal Triangles // *J. Integer Sequences.* — 2006. — V. 9, № 2. — Article 06.2.4, 34 pp. (electronic)

Кадубовський О. А.

Слов'янський державний педагогічний університет

`kadubovs@imath.kiev.ua`

## Класифікація квадратичних та кубічних комплексних поліномів

*Юрчук І. А.*

В роботі проведена класифікація квадратичних та кубічних комплексних поліномів з точністю до топологічної еквівалентності та спряженості.

Let  $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  be a complex polynomial degree  $n$  (we will consider cases  $n = 2, 3$ ). We study necessary and sufficient conditions for the polynomials to be topologically equivalent and conjugate.

### ВСТУП

Вперше задача топологічної класифікації комплексних поліномів була сформульована в 19 ст. А. Гурвицем (1891) та ін. З розвитком математики виникло декілька різних підходів до розв'язання даної задачі, основними є: вивчення дії групи кіс на деякому комбінаторному об'єкті (кактусі) [1, 2, 5, 4], класифікація розгалужених покриттів двовимірної сфери, (доведено, що між поліномами та покриттями існує взаємнооднозначна відповідність), і третій, на даному етапі найперспективніший, — підхід В. Арнольда до класифікації комплексних поліномів за допомогою відображення Ляшко-Лойєнгі в теорії особливостей та алгебраїчній геометрії [7].

В даній роботі ми розв'язуємо дві задачі: підрахунок числа топологічно нееквівалентних квадратичних та кубічних комплексних поліномів за інваріантом, що побудований в роботі О. Звонкіна [2], та знаходження необхідних та достатніх умов на коефіцієнти при змінних поліному,

за яких квадратичні (кубічні) комплексні поліноми будуть топологічно спряженими.

Зауважимо, що роботи О. Звонкіна [2, 5] належать до першого з вище вказаних підходів. Автор фіксує число критичних значень полінома і проводить класифікацію в межах розглядуваного класу, ми ж фіксуємо степінь (квадратичні або кубічні) і серед поліномів даного степеня проводимо топологічну класифікацію.

### 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ

Нехай  $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  деякий комплексний поліном, тобто

$$P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n,$$

де  $a_i \in \mathbb{C}$ . Точка  $z \in \mathbb{C}$  називається *критичною*, якщо  $P'(z) = 0$ , а значення  $w = P(z)$  полінома в критичній точці  $z$  наведемо критичним значенням.

Скажемо, що критична точка  $z \in \mathbb{C}$  має порядок  $k$ , якщо

$$P'(z) = P''(z) = \dots = P^{(k-1)}(z) = 0, \quad P^{(k)}(z) \neq 0.$$

Оскільки,  $P'(z)$  - це поліном степеня  $(n - 1)$ , то поліном  $P(z)$  має  $(n - 1)$  критичну точку та стільки ж критичних значень, серед яких можуть бути такі, що співпадають. Наприклад, розглянемо  $P_1(z) = z^3$  та  $P_2(z) = z^5 + i$ , для кожного з них множина критичних точок складається з  $z = 0$ , проте, зрозуміло, що для першого випадку кратність  $z = 0$  дорівнює трьом, а у другому — п'яти. Дані поліноми є різними з точки зору топологічної еквівалентності.

Два поліноми  $P, Q : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  називаються *топологічно еквівалентними (спряженими)*, якщо існують гомеоморфізми  $h_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  та  $h_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  (гомеоморфізм  $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ), що зберігають орієнтацію, такі, що  $P = h_2^{-1} \circ Q \circ h_1$  (такий, що  $P = h^{-1} \circ Q \circ h$ ).

Якщо  $f(z)$  — деяка функція комплексної змінної, то модуль її похідної  $|f'(z)|$  геометрично означає коефіцієнт розтягу довжин дуг в точці  $z$  при відображенні  $f$ .

Число  $z_0$  називається нулем поліному, якщо  $P(z_0) = 0$ . Нагадаємо фундаментальну теорему алгебри.

**Теорема 1.** [3, ст.22]. *Кожний поліном  $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$  степеня  $n$  має єдине представлення у вигляді*

$$P(z) = c \prod_{k=1}^n (z - z_k),$$

де  $c$  — константа відмінна від нуля, а числа  $z_k$  — нулі полінома  $P$ .

## 2. ТОПОЛОГІЧНА ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ

Для розглядуваного класу поліномів, кількість критичних значень не більше 2. Наведемо конструкцію, яка дасть змогу класифікувати квадратичні та кубічні комплексні поліноми з точністю до топологічної еквівалентності [2, 3].

Нехай  $P : Z \rightarrow W$  — комплексний поліном степеня  $n$ , де  $Z, W$  — комплексні площини. Розглянемо довільні комплексні числа  $c_0, c_1 \in W$  та з'єднаємо їх прямолінійним відрізком в  $W$ , який позначимо через  $s(c_0, c_1)$ . Якщо припустити, що  $s(c_0, c_1)$  не містить жодного критичного значення поліному  $P$ , то  $P^{-1}(s(c_0, c_1)) \subset Z$  є незв'язним об'єднанням  $n$  різних множин площини  $Z$ , кожна з яких гомеоморфна відріzkу (необов'язково прямолінійному). У випадку, коли  $s(c_0, c_1)$  не містить жодного критичного значення, а один з кінців або обидва є критичними,

$$P^{-1}(s(c_0, c_1)) \subset Z$$

має менше ніж  $n$  компонент зв'язності (виникають склейки відрізко-подібних множин). Пофарбувавши точки  $c_0$  та  $c_1$  у різні кольори, множина  $P^{-1}(s(c_0, c_1)) \subset Z$  буде гомеоморфною двоколірному планарному дереву (інцидентні вершини мають різні кольори). Теорема 1.1. [2] стверджує, що між множиною плоских двоколірних дерев та класами топологічно еквівалентних поліномів, що мають не більше ніж два критичних значення, існує взаємно однозначна відповідність.

*Випадок 1.*  $P(z) = az^2 + bz + c$ , де  $a \neq 0$  і  $a, b, c \in \mathbb{C}$ . Обчислимо  $P'(z) = 2az + b$  і знайдемо точки  $z$  для яких  $P'(z) = 0$ , отже це єдина критична точка  $z = -\frac{b}{2a}$  кратності 2. Покладемо  $c_0 = P(-\frac{b}{2a})$ , яке буде єдиним критичним значенням, а в ролі  $c_1$  візьмемо довільне регулярне значення, що не дорівнює  $c_0$ .  $P^{-1}(s(c_0, c_1))$  гомеоморфна планарному дереву з двома вершинами валентності 1 та однією вершиною валентності 2 (рис.1).



Рис. 2.1. Двоколірне дерево, що відповідає квадратичному поліному.

Конструкція, яка зображена на рисунку 1, єдино можлива, а це означає, що всі квадратичні комплексні поліноми є топологічно еквівалентними.

*Випадок 2.*  $P(z) = az^3 + bz^2 + cz + d$ , де  $a \neq 0$  і  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ . Аналогічно, обчислимо  $P'(z) = 3az^2 + 2bz + c$  та знайдемо  $z$  для яких  $P'(z) = 0$ , оскільки ми отримали квадратичний поліном, то можливо два випадки:

- (і) якщо  $b^2 - 3ac = 0$ , то існує єдина критична точка  $z = -\frac{b}{3a}$  кратності 3 ( $P''(z) = 6az + 2b$  і  $P'''(z) = 6a$ );

- (ii) якщо  $b^2 - 3ac \neq 0$ , то існує дві різних критичних точки  $z_{1,2} = \frac{-2b \pm 2\sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$ , кожна з яких має кратність 2.

По аналогії з випадком квадратичного поліному, побудуємо топологічний інваріант – двоколірне дерево для кубічного поліному, враховуючи наступні зауваження: у випадку (i) покладемо  $c_0 = P(-\frac{b}{3a})$ , а  $c_1 = z'$ , де  $z'$  таке, що  $z' \neq P(-\frac{b}{3a})$ , а у випадку (ii) –  $c_0 = P(\frac{-2b - 2\sqrt{b^2 - 3ac}}{3a})$ , а  $c_1 = P(\frac{-2b + 2\sqrt{b^2 - 3ac}}{3a})$ .

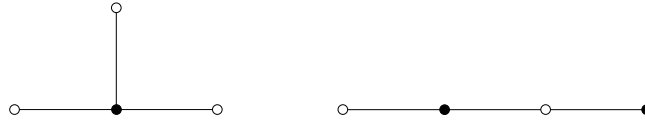


РИС. 2.2. Двоколірні дерева, що відповідають кубічним поліномам

Отже, існує два класи топологічно еквівалентних кубічних комплексних поліномів.

### 3. ТОПОЛОГІЧНА СПРЯЖЕНІСТЬ

Класифікацію з точністю до топологічної спряженості комплексних поліномів степеня 1 можна знайти в [6].

**Квадратичні комплексні поліноми.** Нехай

$$P(z) = az^2 + bz + c,$$

де  $a, b, c \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq 0$ .

Знайдемо умови на коефіцієнти поліному за яких він буде мати різні топологічні характеристики – кількість нерухомих точок (розв'язків рівнянь  $P(z) = z$ ) та набори критичних точок, врахованих з їх порядками.



Оскільки  $P'(z) = 2az + b$ , то існує точка  $z^* = -\frac{b}{2a}$  така, що  $P'(z^*) = 0$  і  $P''(z^*) \neq 0$ .

Розглянемо множину точок  $|z - z^*| = 1$ , де  $z \in \mathbb{C}$ , та запишемо

$$\begin{aligned} |P'(z)| &= |2az + b| = \left| 2a\left(z + \frac{b}{2a}\right) \right| = \\ &= |2a| \left| z - \left(-\frac{b}{2a}\right) \right| = 2|a| |z - z^*|, \quad a \neq 0. \end{aligned}$$

Тому, при  $|a| < \frac{1}{2}$  відбувається стиск (образом одиничного кола буде коло меншого радіуса), а при  $|a| > \frac{1}{2}$  – розтяг. У випадку, коли  $|a| = \frac{1}{2}$  – коло відображається саме в себе.

Наступний крок – це знаходження нерухомих точок в залежності від коефіцієнтів поліному. Розв'яжемо рівняння  $P(z) = z$ . Запишемо  $az^2 + bz + c = z$ , звідки

$$az^2 + (b - 1)z + c = 0.$$

Розглянемо випадки:

*Випадок 1:* Якщо  $D = (b - 1)^2 - 4ac = 1$ , то у відображенні  $P(z)$  є дві різні нерухомі точки  $\widehat{z}_1 = \frac{-b}{2a}$  та  $\widehat{z}_2 = \frac{-b+2}{2a}$ , причому  $\widehat{z}_1 = z^* = -\frac{b}{2a}$ . Відмітимо також, що для рівнянь  $P(z) = \widehat{z}_1$  та  $P(z) = \widehat{z}_2$  існують ще два розв'язки –  $\widetilde{z}_1$  та  $\widetilde{z}_2$  такі, що  $\widetilde{z}_2 \in \mathbb{C}$ ,  $P(\widetilde{z}_1) = \widehat{z}_1$ ,  $P(\widetilde{z}_2) = \widehat{z}_2$  і  $\widetilde{z}_1 \neq \widehat{z}_1$ ,  $\widetilde{z}_2 \neq \widehat{z}_2$ .

*Випадок 2:* Якщо  $D = (b - 1)^2 - 4ac \neq 0$  і  $D \neq 1$ , то у  $P(z)$  є дві різні нерухомі точки  $\widehat{z}_{1,2} = \frac{-b+1 \pm \sqrt{D}}{2a}$ . Знову, для кожного з рівнянь  $P(z) = \widehat{z}_1$  та  $P(z) = \widehat{z}_2$ , крім  $\widehat{z}_1$  та  $\widehat{z}_2$ , існують  $\widetilde{z}_1$  та  $\widetilde{z}_2$  такі, що  $\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_2 \in \mathbb{C}$ ,  $P(\widetilde{z}_1) = \widehat{z}_1$  і  $P(\widetilde{z}_2) = \widehat{z}_2$ .

*Випадок 3:* Якщо  $D = (b - 1)^2 - 4ac = 0$ , то існує єдина нерухома точка відображення  $P(z)$ , причому  $\widehat{z} = \frac{-b+1}{2a}$ . Зауважимо, що  $\widehat{z} \neq z^* = -\frac{b}{2a}$ , якими б не були коефіцієнти  $a$  та  $b$  (за умовою  $a \neq 0$ ). Проте, у випадку, коли  $b - 1 = 0$  та  $c = 0$  нерухома точка має кратність 2.

**Кубічні комплексні поліноми.** Нехай

$$P(z) = az^3 + bz^2 + cz + d,$$

де  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq 0$ . Тоді

$$P'(z) = 3az^2 + 2bz + c, \quad P''(z) = 6az + 2b.$$

При знаходженні критичних точок ( $P'(z) = 0$ ) розглянемо два випадки:

$$(3.1) \quad D = 4(b^2 - 3ac) = 0 \quad \text{або} \quad b^2 = 3ac,$$

та

$$(3.2) \quad D = 4(b^2 - 3ac) \neq 0 \quad \text{або} \quad b^2 \neq 3ac.$$

*Випадок 1.* Якщо виконується (3.1), то існує єдина точка  $z^* = -\frac{b}{3a}$  така, що  $P''(z^*) = 0$ ,  $P'''(z^*) \neq 0$ . Оскільки  $P'(z)$  є квадратичним поліномом, а  $z^* = -\frac{b}{3a}$  є його нулем, то згідно теореми 1  $P'(z)$  можна представити у вигляді  $P'(z) = 3a(z + \frac{b}{3a})^2$ . Розглянемо множину точок  $|z - z^*| = 1$ , де  $z \in \mathbb{C}$ , та запишемо

$$|P'(z)| = |3a(z + \frac{b}{3a})^2| = 3|a||z + \frac{b}{3a}|^2 = 3|a||z - z^*|^2, \quad a \neq 0.$$

Тому, при  $|a| < \frac{1}{3}$  відбувається стиск,  $|a| > \frac{1}{3}$  – розтяг, а при  $|a| = \frac{1}{3}$  – коло відображається саме в себе.

*Випадок 2.* Якщо виконується (3.2), то існують точки

$$z_{1,2}^* = \frac{-2b \pm \sqrt{D}}{6a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$$

такі, що  $P'(z_{1,2}^*) \neq 0$ . Оскільки,  $P'(z)$  є квадратичним поліномом, а точки  $z_{1,2}^*$  є його нулями, то згідно теореми 1  $P'(z)$  можна представити у вигляді  $P'(z) = 3a(z - z_1^*)(z - z_2^*)$  та розглянувши множини точок  $|z - z_1^*| = 1$  та  $|z - z_2^*| = 1$ , де  $z \in \mathbb{C}$ , при  $|a| < \frac{1}{3}$  відбувається стиск,  $|a| > \frac{1}{3}$  – розтяг, а при  $|a| = \frac{1}{3}$  – коло відображається саме в себе.

Розв'яжемо рівняння  $P(z) = z$ , тобто

$$az^3 + bz^2 + cz + d = z,$$

звідки  $az^3 + bz^2 + (c - 1)z + d = 0$ . Відомо, що нулі кубічних рівнянь знаходять за допомогою формул Кардано. Виконуючи заміну  $z = z' - \frac{b}{3a}$ , отримаємо поліном

$$az'^3 + c'z' + d' = 0,$$

де  $c' = c - \frac{b^2}{3a} - 1$ ,  $d' = \frac{2b^3 + 9b(1-c) + 27a^2d}{27a^2}$ . За умовою  $a \neq 0$ , запишемо еквівалентне рівняння

$$(3.3) \quad z'^3 + c''z' + d'' = 0,$$

де  $c'' = \frac{3a(c-1)-b^2}{3a^2}$ ,  $d'' = \frac{2b^3+9b(1-c)+27a^2d}{27a^3}$ . У випадку, коли

$$(3.4) \quad D^* = \left(\frac{c''}{3}\right)^3 + \left(\frac{d''}{2}\right)^2 \neq 0$$

поліном має три різних нуля. Якщо ж

$$(3.5) \quad D^* = \left(\frac{c''}{3}\right)^3 + \left(\frac{d''}{2}\right)^2 = 0$$

та

$$(3.6) \quad c'' = d'' = 0,$$

то поліном має єдиний нуль кратності 3. Якщо виконується тільки формула (3.5) – два різних нуля (один з яких має кратність 2).

*Нехай виконується одна з формул (3.1) або (3.2). Чи можуть коефіцієнти поліному також задовольняти одну з умов (3.4)–(3.6)? Якщо так, то які топологічні властивості має такий поліном?*

Припустимо, що  $b^2 = 3ac$ , тоді  $c'' = -\frac{1}{a}$  і рівняння (3.3) набере вигляду  $z'^3 - \frac{1}{a}z' + d'' = 0$ . Оскільки  $c'' \neq 0$ , то

формула (3.6) не виконується при жодному наборі коефіцієнтів. А це означає, що єдина критична точка поліному не може бути його нерухомою точкою.

Запишемо формулу (3.5) через коефіцієнти:

$$(3.7) \quad -108a^3 = (2b^3 + 9b(1-c) + 27a^2d)^2.$$

З іншого боку, це означає, що існує два нулі  $z_0$  та  $z_1$  такі, що  $z'^3 - \frac{1}{a}z' + d'' = (z' - z_0)^2(z' - z_1)$ . Прирівнявши коефіцієнти при змінних у правій та лівій частинах, отримуємо систему:

$$\begin{cases} z_1 = -2z_0, \\ z_0^2 = \frac{1}{3a}, \\ 2z_0^3 = \frac{2b^3 + 9b(1-c) + 27a^2d}{27a^3}. \end{cases}$$

Підставивши друге рівняння системи в третє та використавши формулу (3.7), отримуємо рівність  $2 = \sqrt{-4}$ , що не вірно. Зі сказаного вище слідує, що не суперечливим є лише випадок, коли одночасно виконуються формули (3.1) та (3.4), а це означає, що існує три різні нерухомі точки, кожна з яких не є критичною, тобто для кожної з них в прообразі, крім самої себе, є ще дві інші точки.

Зрозуміло, що співвідношення (3.2) та (3.4) не є суперечливими, а з точки зору топологічних характеристик, це означає, що існує три різні нерухомі точки, які відрізняються від двох критичних. Знайдемо умови за яких, одна з нерухомих буде співпадати з критичною точкою. Запишемо

$$z'^3 + c''z' + d'' = \left(z' - \frac{\sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}\right)(z' - z_0)(z' - z_1),$$

де  $c'' = \frac{3a(c-1)-b^2}{3a^2}$ ,  $d'' = \frac{2b^3+9b(1-c)+27a^2d}{27a^3}$ ,  $z_0 \neq z_1$ ,  $z_0 \neq \frac{\sqrt{b^2-3ac}}{3a}$ ,  $z_1 \neq \frac{\sqrt{b^2-3ac}}{3a}$ . Прирівнюємо коефіцієнти при однакових показниках степеня та одержимо наступну умову:

$$2(b^2 - 3ac)^{\frac{3}{2}} + 9c\sqrt{b^2 - 3ac} = 2b^3 + 9(1 - c) + 27a^2d.$$

Перевіримо за яких умов на коефіцієнти, співвідношення (3.2) та (3.6) виконуються одночасно. Рівняння (3.3) набере вигляду  $z'^3 = 0$ , перейшовши до змінної  $z$  отримаємо, що  $z = -\frac{b}{3a}$ . Нагадаємо, що  $P''(-\frac{b}{3a}) = 0$  і  $z = -\frac{b}{3a}$  є нулем кратності 3 для  $az^3 + bz^2 + (c-1)z + d = 0$ , або що те ж саме, нерухомою точкою для поліному  $P(z)$ . А сказане вище, рівносильне умовам

$$\begin{cases} 3a(c-1) - b^2 = 0 \\ 2b^3 + 9b(1-c) + 27a^2d = 0. \end{cases}$$

І останнє, перевіримо коли виконуються (3.2) та (3.5). Співвідношення (3.5) набирає вигляду

$$\left(\frac{3a(c-1) - b^2}{9a^2}\right)^3 = -\left(\frac{2b^3 + 9b(1-c) + 27a^2d}{54a^3}\right)^2$$

та існують дві різні нерухомі точки поліному  $P(z)$ , одна з яких є нулем кратності 2 для (3.5). Знайдемо умови за яких критична точка (не обмежуючи загальності, для прикладу візьмемо  $z = \frac{-b+\sqrt{b^2-3ac}}{3a}$ ) буде нерухомою точкою кратності 2 та 1. Нагадаємо, що тоді  $z' = \frac{\sqrt{b^2-3ac}}{3a}$ , та запишемо

$$(3.8) \quad z'^3 + c''z' + d'' = \left(z' - \frac{\sqrt{b^2-3ac}}{3a}\right)^2 (z' - z_0),$$

де  $c'' = \frac{3a(c-1)-b^2}{3a^2}$ ,  $d'' = \frac{2b^3+9b(1-c)+27a^2d}{27a^3}$ ,  $z_0 \neq \frac{\sqrt{b^2-3ac}}{3a}$ , та

$$(3.9) \quad z'^3 + c''z' + d'' = \left( z' - \frac{\sqrt{b^2-3ac}}{3a} \right) (z' - z_0)^2,$$

де  $c'' = \frac{3a(c-1)-b^2}{3a^2}$ ,  $d'' = \frac{2b^3+9b(1-c)+27a^2d}{27a^3}$ ,  $z_0 \neq \frac{\sqrt{b^2-3ac}}{3a}$ . Міркуючи по аналогії з попередніми випадками, отримаємо: умова (3.8) є суперечливою, оскільки  $a \neq 0$ , а (3.9) виконується при  $ac - 3b^2 = 4a$ .

Нехай  $\mathbb{C}$  та  $\mathbb{W}$  — дві площини такі, що  $P(\mathbb{C}) = \mathbb{W}$ .

Побудуємо наступний комбінаторний інваріант, який відповідає многочлену  $P(z)$ :

(1) На площині  $\mathbb{W}$  відмітимо всі критичні значення  $P(z_1^*) = w_1^*$  та  $P(z_2^*) = w_2^*$  та всі нерухомі точки. З'єднаємо точки  $w_1^*$  та  $w_2^*$  прямолінійним відрізком в площині  $\mathbb{W}$ , а у випадку однієї точки  $w^*$  — з'єднаємо її попарно з нерухомими точками прямолінійними відрізками в  $\mathbb{W}$ . Зрозуміло, що на  $\mathbb{W}$  ми побудували граф зі скінченним числом компонент зв'язності, який позначимо через  $G_W^{P(z)}$ .

(2) Розглянемо множину  $P^{-1}(G_W^{P(z)})$  і позначимо її через  $G_C^{P(z)}$ . Впорядковану пару графів  $(G_C^{P(z)}, G_W^{P(z)})$ , що відповідає многочлену  $P(z)$ , будемо називати його топологічним інваріантом, який надалі будемо позначати через  $\mathbb{G}(P(z))$ .

(3) Нехай вершинам  $v_1, v_2 \in \mathbb{G}(P(z))$  відповідають деякі комплексні числа  $z_1$  та  $z_2$  будь-то з площини  $\mathbb{C}$  чи  $\mathbb{W}$ . Пофарбуємо вершини інваріанту  $\mathbb{G}(P(z))$  у різні кольори за наступним правилом: вершини  $v_1$  та  $v_2$  одного й того ж кольору тоді і тільки тоді, коли  $z_1 = z_2$ . В протилежному випадку вершини мають різні кольори.

Позначимо через  $V(G)$  множину вершин деякого графу  $G$ , а через  $V_s(G)$  – множину вершин одного кольору.

**Означення 1.** Скажемо, що  $\mathbb{G}(P(z))$  ізоморфний  $\mathbb{G}(Q(z))$  ( $\mathbb{G}(P(z)) \sim \mathbb{G}(Q(z))$ ), де  $P(z)$  та  $Q(z)$  – деякі многочлени, якщо

- 1)  $\#V(G_C^{P(z)}) = \#V(G_C^{Q(z)})$  і  $\#V(G_W^{P(z)}) = \#V(G_W^{Q(z)})$ ;
- 2)  $\#V_s(G_C^{P(z)}) = \#V_s(G_C^{Q(z)})$  і  $\#V_s(G_W^{P(z)}) = \#V_s(G_W^{Q(z)})$ .

**Теорема 2.** Многочлени  $P(z)$  та  $Q(z)$  степеня  $n$ , де  $n = 2, 3$ , топологічно спряжені тоді і тільки тоді, коли

$$\mathbb{G}(P(z)) \sim \mathbb{G}(Q(z)) \text{ та } \begin{cases} |a_1| < \frac{1}{n}, \\ |a_2| < \frac{1}{n}, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} |a_1| > \frac{1}{n}, \\ |a_2| > \frac{1}{n}, \end{cases} \text{ або } |a_1| = |a_2| = \frac{1}{n}.$$

$\#G_C^{P(z)}$	$\#G_W^{P(z)}$	$P(z) = az^2 + bz + c$
2	2	$b = 1, c = 0$
3	2	$(b - 1)^2 = 4ac, b \neq 1, c \neq 0$
4	2	$(b - 1)^2 - 4ac = 1$
5	3	$(b - 1)^2 \neq 4ac, (b - 1)^2 - 4ac \neq 1$

ТАБЛ. 3.1. Залежність типу графу від коефіцієнтів квадратичного поліному.

**Приклад:** Розглянемо поліноми

$$P(z) = z^2 + z, \quad Q(z) = z^2 + 3i.$$

Для першого –  $a = 1, b = 1, c = 0$ , а для другого –  $a = 1, b = 0, c = 3i$ . З таблиці 1 видно, що  $\mathbb{G}(P(z)) = (2; 2)$ , а  $\mathbb{G}(Q(z)) = (5; 3)$ . А це означає, що  $P(z)$  та  $Q(z)$  не є топологічно спряженими.

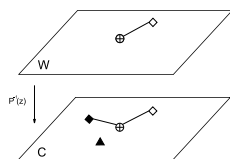


Рис. 3.1. Випадок 1: через  $\diamond$  позначено нерухому точку,  $\oplus$  – критичне значення, яке одночасно є і нерухомою точкою,  $\blacklozenge$  та  $\blacktriangle$  – прообрази нерухомих точок.

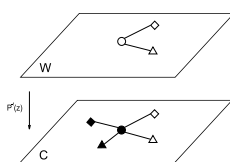


Рис. 3.2. Випадок 2: через  $\diamond$  та  $\Delta$  позначено нерухомі точки,  $\circ$  – критичне значення,  $\bullet$  – критичну точку,  $\blacklozenge$  та  $\blacktriangle$  – прообрази нерухомих точок.

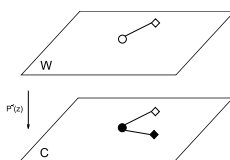


Рис. 3.3. Випадок 3: через  $\diamond$  позначено нерухому точку,  $\circ$  – критичне значення,  $\bullet$  – критичну точку,  $\blacklozenge$  – прообраз нерухомої точки.

*Коментарі до рисунків 3.1-3.3:* Різними фігурами зображено різні точки, коли ж точка є нерухомою, то її зображення в двох площинах співпадає. Для наочності, однаковою



формою фігур, але з різною зафарбованістю, позначені точки, які є прообразами однієї й тієї ж точки.

$\#G_C^{P(z)}$	$\#G_W^{P(z)}$	$P(z) = az^3 + bz^2 + cz + d$
10	4	$b^2 = 3ac,$ $(\frac{3a(c-1)-b^2}{9a^2})^3 \neq -(\frac{2b^3+9b(1-c)+27a^2d}{54a^3})^2$
13	5	$b^2 \neq 3ac,$ $(\frac{3a(c-1)-b^2}{9a^2})^3 \neq -(\frac{2b^3+9b(1-c)+27a^2d}{54a^3})^2,$ $2(b^2 - 3ac)^{\frac{3}{2}} + 9c\sqrt{b^2 - 3ac} \neq$ $\neq 2b^3 + 9(1 - c) + 27a^2d$
12	5	$b^2 - 3ac \neq 0,$ $(\frac{3a(c-1)-b^2}{9a^2})^3 \neq -(\frac{2b^3+9b(1-c)+27a^2d}{54a^3})^2,$ $2(b^2 - 3ac)^{\frac{3}{2}} + 9c\sqrt{b^2 - 3ac} =$ $= 2b^3 + 9(1 - c) + 27a^2d$
5	3	$b^2 - 3ac \neq 0, 3a(c - 1) - b^2 = 0,$ $2b^3 + 9b(1 - c) + 27a^2d = 0$
9	4	$b^2 - 3ac \neq 0,$ $(\frac{3a(c-1)-b^2}{9a^2})^3 = -(\frac{2b^3+9b(1-c)+27a^2d}{54a^3})^2,$ $ac - 3b^2 \neq 4a$
8	3	$b^2 - 3ac \neq 0,$ $(\frac{3a(c-1)-b^2}{9a^2})^3 = -(\frac{2b^3+9b(1-c)+27a^2d}{54a^3})^2,$ $ac - 3b^2 = 4a$

ТАБЛ. 3.2. Залежність типу графу від коефіцієнтів кубічного поліному.

## ЛІТЕРАТУРА

- [1] *Khovanskii A.G., Zdravkovska S.* Branched covers of  $S^2$  and braid groups // J. of Knot and its Ramification. — 1996. — V. 5, № 1. — P. 55-75.
- [2] *Shabat G., Zvonkin A.* Plane trees and algebraic numbers // Contemporary Mathematics. — 1994. — V. 178. — P. 233-275.
- [3] *Sheil - Small T.* Complex polynomials. — Cambridge University Press, 2002. — 428 p.
- [4] *Zdravkovska S.* Topological classification of polynomial maps // Uspekhi Mat.Nauk. — 1970. — V. 25, № 1. — P.179-180.
- [5] *Mohamed E.M., Hanusse N., Zipperer J., Zvonkin A.* Cacti, braids and complex polynomials. — Published in Séminaire Lotharingien de Combinatoire, 1997 — 36 p.
- [6] *Будницька Т.В.* Топологічна класифікація афінних відображень з  $\mathbb{C}$  в  $\mathbb{C}$  // Вісник КНУ. Серія: Математика. Механіка. — 2009. — № 21. — С. 28-32.
- [7] *Ландо С.К.* Разветвленные накрытия двумерной сферы и теория пересечений в пространствах мероморфных функций на алгебраических кривых // Усп. мат. наук. — 2002. — Т. 57, вып. 3(345) — С. 29-98.

Юрчук І.А.

Національний авіаційний університет

Інститут математики НАН України

iyurch@ukr.net

## О метрической эквивалентности функций, заданных на плоскости де Ситтера

*Коновенко Н. Г.*

У цій роботі наведено необхідні та достатні умови метричної еквівалентності функцій, які задані на площині де Сіттера.

В этой работе приведены необходимые и достаточные условия метрической эквивалентности функций, заданных на плоскости де Ситтера.

In this paper we find necessary and sufficient conditions for functions to be equivalent with respect to the isometry group of the de Sitter plane.

### 1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В этой работе приведены необходимые и достаточные условия метрической эквивалентности функций, заданных на плоскости де Ситтера. Аналогичные результаты для случая плоскости Лобачевского были получены в работе [3].

В качестве плоскости де Ситтера  $\mathbb{S}_2$  рассматриваем верхнюю полуплоскость  $\mathbb{R}_+^2$  снабженную метрикой:

$$\Theta = \frac{dx^2 - dy^2}{y^2}.$$

Структурной алгеброй для геометрии де Ситтера является алгебра Ли инфинитезимальных изометрий. Эта алгебра изоморфна алгебре Ли  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$  и порождена векторными полями

$$A = \partial_x, \quad B = (x^2 + y^2)\partial_x + 2xy\partial_y, \quad H = 2x\partial_x + 2y\partial_y,$$

которые удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[H, A] = -2A, \quad [H, B] = 2B, \quad [A, B] = H.$$

Отметим, что действие алгебры Ли  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$  на плоскости де Ситтера  $\mathbb{S}_2$  является симплектическим относительно 2-формы

$$\Omega = \frac{dx \wedge dy}{y^2}.$$

Скажем, что две гладкие функции  $f_1$  и  $f_2$ , заданные в некоторой области плоскости де Ситтера, *метрически эквивалентны*, если найдется такая сохраняющая ориентацию изометрия  $g$ , что  $f_2 = f_1 \circ g^{-1}$ , в области определения.

Описание классов метрически эквивалентных функций проведём в два этапа. Вначале найдём условия метрической эквивалентности функций на формальном уровне (то есть на уровне  $\infty$ -джетов функций). Это достигается описанием алгебры  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ -дифференциальных инвариантов на плоскости де Ситтера (см. [1]). После этого сводим задачу метрической эквивалентности к проблеме разрешимости системы дифференциальных уравнений конечного типа, откуда получим условия метрической эквивалентности для класса *регулярных* функций.

## 2. АЛГЕБРА МЕТРИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИНВАРИАНТОВ

Обозначим через  $J^k(\mathbb{S}_2)$  многообразие  $k$ -джетов функций, заданных на плоскости де Ситтера  $\mathbb{S}_2$ .

Каждая изометрия  $g$  продолжается (см. [2]) до диффеоморфизма

$$g^{(k)} : J^k(\mathbb{S}_2) \rightarrow J^k(\mathbb{S}_2)$$

пространства  $k$ -джетов.

Аналогично, каждая инфинитезимальная изометрия

$$X \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$$

продолжается до векторного поля  $X^{(k)}$  на многообразии  $k$ -джетов (см. [2]).

Гладкую функцию  $I$ , заданную на многообразии  $J^k(\mathbb{S}_2)$ , называем метрическим дифференциальным инвариантом порядка  $\leq k$ , если

$$I = I \circ g^{(k)},$$

для всех изометрий  $g$ , сохраняющих ориентацию.

Последнее условие эквивалентно тому, что

$$A^{(k)}(I) = B^{(k)}(I) = H^{(k)}(I) = 0.$$

Соответственно, полную производную (см. [2])

$$\nabla \in C^\infty(J^\infty(\mathbb{S}_2)) \otimes D(\mathbb{S}_2)$$

назовем инвариантным метрическим дифференцированием, если  $\nabla$  коммутирует с продолженным действием группы изометрий или, что эквивалентно,

$$[\nabla, A^{(\infty)}] = [\nabla, B^{(\infty)}] = [\nabla, H^{(\infty)}] = 0.$$

Отметим, что в случае плоскости де Ситтера наличие инвариантной метрики и инвариантной симплектической структуры позволяет сопоставить каждому метрическому дифференциальному инварианту  $I$  два инвариантных дифференцирования.

Инвариантное дифференцирование, отвечающее градиенту  $I$  относительно метрики  $\Theta$ , будем обозначать через  $\nabla_I$ , а инвариантное дифференцирование, которое соответствует гамильтоновому полю с гамильтонианом  $I$  относительно инвариантной симплектической формы  $\Omega$ , обозначаем через  $\gamma_I$ .

Более формально, конструкция этих дифференцирований выглядит следующим образом.

Пусть  $f \in C^\infty(\mathbb{S}_2)$  — гладкая функция на плоскости де Ситтера, а  $S_f^k \subset J^k(\mathbb{S}_2)$  — график ее  $k$ -джета.

Пусть  $I_f$  — значения дифференциального инварианта  $I$  на функции  $f$ , то есть

$$I_f = I|_{S_f^k} \in C^\infty(\mathbb{S}_2).$$

Пусть также  $\nabla_{I,f}$  — ограничение полного дифференцирования  $\nabla_I$  на  $S_f^\infty$ . Тогда  $\nabla_{I,f}$  совпадает с градиентом функции  $I_f$  относительно метрики  $\Theta$ , или

$$\nabla_I] \Theta = \widehat{d}I,$$

где  $\widehat{d}: C^\infty(\mathbb{S}_2) \rightarrow \Omega^1(J^\infty\mathbb{S}_2)$  — оператор полного дифференцирования [2].

Аналогично, определим дифференцирование  $\gamma_I$  формулой

$$\gamma_I] \Omega = \widehat{d}I.$$

Метрическая инвариантность указанных дифференцирований непосредственно вытекает из метрической инвариантности формы  $\Omega$ .

Координатное представление этих дифференцирований выглядит следующим образом.

Пусть  $(x, y, u, u_x, \dots, u_\sigma, \dots)$  — канонические координаты в пространстве джетов. Тогда, упомянутые выше дифференцирования имеют следующий вид:

$$\nabla_I = y^2 \left( \frac{dI}{dx} \frac{d}{dx} - \frac{dI}{dy} \frac{d}{dy} \right), \quad \gamma_I = y^2 \left( \frac{dI}{dy} \frac{d}{dx} - \frac{dI}{dx} \frac{d}{dy} \right),$$

где через  $\frac{d}{dx}$  и  $\frac{d}{dy}$  обозначены соответственно полные производные относительно  $x$  и  $y$ .

Используя инвариантные дифференцирования  $\gamma_I$  определим скобки на алгебре дифференциальных инвариантов:

$$[I, J] = \gamma_I(J),$$

где  $I$  и  $J$  — метрические дифференциальные инварианты.

Отметим, что скобка  $[I, J]$  также является метрическим дифференциальным инвариантом.

Из приведенных рассуждений непосредственно вытекает следующий результат.

**Теорема 1.** *Алгебра метрических дифференциальных инвариантов на плоскости де Ситтера является пуассоновой алгеброй относительно скобок:*

$$[I, J] = y^2 \left( \frac{dI}{dy} \frac{dJ}{dx} - \frac{dJ}{dy} \frac{dI}{dx} \right).$$

Используем теперь построенные инвариантные дифференцирования для описания алгебры метрических дифференциальных инвариантов.

Прежде всего заметим, что функция

$$u : J^0(\mathbb{S}_2) = \mathbb{S}_2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

является метрическим дифференциальным инвариантом порядка нуль.

Поэтому имеем два инвариантных дифференцирования:

$$\nabla_u = y^2 \left( u_x \frac{d}{dx} - u_y \frac{d}{dy} \right), \quad \gamma_u = y^2 \left( u_y \frac{d}{dx} - u_x \frac{d}{dy} \right).$$

Применяя дифференцирование  $\nabla_u$  к инварианту  $u$ , получаем метрический дифференциальный инвариант первого порядка:

$$J_1 = \nabla_u(u) = y^2 (u_x^2 - u_y^2).$$

Более того, как нетрудно видеть, метрические дифференциальные инварианты  $J_0 = u$  и  $J_1 = \nabla_u(u)$  порождают дифференциальные инварианты порядка  $\leq 1$ .

Применяя инвариантные дифференцирования  $\nabla_u$  и  $\gamma_u$  к инварианту 1-го порядка  $J_1$ , мы получаем два метрических дифференциальных инварианта 2-го порядка:

$$J_2(1) = \nabla_u(J_1), \quad J_2(2) = \gamma_u(J_1),$$

где

$$\begin{aligned} J_2(1) &= 2u_x(u_{xx}u_x - u_{xy}u_y)y^4 + 2u_y(u_{yy}u_y - u_{xy}u_x)y^4 + \\ &\quad + 2y^3u_y(u_y^2 - u_x^2), \\ J_2(2) &= 2u_xu_yy^4(u_{xx} + u_{yy}) - 2u_{xy}y^4(u_x^2 + u_y^2) + \\ &\quad + 2u_xy^3(u_y^2 - u_x^2). \end{aligned}$$

Из соображений размерности следует, что должен существовать еще один дифференциальный инвариант 2-го порядка, функционально независимый относительно  $J_2(1)$  и  $J_2(2)$ .

Для того чтобы найти этот инвариант заметим, что оператор Лапласа  $\Delta = -y^2(\partial_x^2 - \partial_y^2)$  является инвариантным относительно группы изометрий, поэтому дифференциальный оператор в полных производных:

$$\widehat{\Delta} = -y^2 \left( \frac{d^2}{dx^2} - \frac{d^2}{dy^2} \right)$$

коммутирует с продолженным действием группы изометрий.

В частности, этот оператор также переводит метрические дифференциальные инварианты в себя. Поэтому функция

$$J_2(3) = \widehat{\Delta}(u) = -y^2(u_{xx} - u_{yy})$$



является метрическим дифференциальным инвариантом второго порядка, а дифференциальные инварианты

$$J_0, J_1, J_2(1), J_2(2), J_2(3)$$

порождают все дифференциальные инварианты до порядка 2 включительно. Подсчет размерностей показывает, что справедлив следующий результат.

**Теорема 2.** Алгебра метрических дифференциальных инвариантов на плоскости де Ситтера порождена базисными инвариантами  $J_0 = u$ , и  $J_2(3) = -y^2(u_{xx} - u_{yy})$ , а также всеми их инвариантными производными вдоль  $\nabla_u$  и  $\gamma_u$ .

Эти образующие удовлетворяют двум дифференциальным сизигиям:

$$\begin{aligned} \nabla_u(J_2(2)) - \gamma_u(J_2(1)) + J_2(3)J_2(2) &= 0, \\ \nabla_u(J_2(1)) - \gamma_u(J_2(2)) + 2J_1\nabla_u(J_2(3)) + 3J_2(3)J_2(1) - \\ - 2J_1J_2^2(3) + 2J_1^{-1}(J_2^2(2) - J_2^2(1)) - 2J_1^2 &= 0. \end{aligned}$$

### 3. ИЗОМЕТРИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ФУНКЦИЙ

Гладкую функцию  $f \in C^\infty(\mathbb{S}_2)$ , заданную в некоторой области плоскости де Ситтера, будем называть *регулярной*, если значения  $J_{0,f}$ ,  $J_{1,f}$  дифференциальных инвариантов  $J_0$  и  $J_1$  на этой функции независимы:

$$dJ_{0,f} \wedge dJ_{1,f} \neq 0$$

в этой области.

В противном случае, то есть если  $dJ_{0,f} \wedge dJ_{1,f} \equiv 0$ , функция  $f$  называется *сингулярной*.

Иначе говоря, функция  $f$  — сингулярна, если она является решением дифференциального уравнения

$$f_x^2 - f_y^2 = y^{-2}\varphi(f)$$

для некоторой функции  $\varphi$ .

Если функция  $f$  регулярна, то значения инвариантов второго порядка являются функциями  $J_{0,f}$  и  $J_{1,f}$ . Таким образом, функция  $f$  удовлетворяет системе дифференциальных уравнений 2-го порядка:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} J_2(1) &= 2a(J_0, J_1)J_1^2, \\ J_2(2) &= 2b(J_0, J_1)J_1^2, \\ J_2(3) &= c(y, J_0, J_1)J_1^2y^{-2}. \end{aligned}$$

Выделяя вторые производные  $u$  из этой системы уравнений, мы приходим к эквивалентной системе уравнений

$$(3.2) \quad \begin{aligned} u_{xx} &= -u_x^2u_y^2c + u_x^2a - 2bu_yu_x + au_y^2 - \frac{u_y}{y} + u_y^4c, \\ u_{xy} &= -u_x^2b + 2au_yu_x - \frac{u_x}{y} + u_xcu_y^3 - u_y^2b - u_x^3cu_y, \\ u_{yy} &= -cu_x^4 + u_x^2u_y^2c + u_x^2a - 2bu_yu_x + au_y^2 - \frac{u_y}{y}. \end{aligned}$$

Последняя система является системой конечного типа, а размерность пространства решений не превосходит 3. При этом размерность равна 3, если эта система является системой фробениусова типа.

В случае, когда регулярная функция  $f$  удовлетворяет системе (3.2), действие группы изометрий эффективно и из соображений размерности следует, что это действие транзитивно. Иначе говоря, в этом случае любые два решения переводятся друг в друга изометрией плоскости Лобачевского. Суммируя сказанное, приходим к следующему результату.

**Теорема 3.** (1) Класс метрической эквивалентности регулярных функций на плоскости де Ситтера определяется функциями  $a, b, c$ , задающими зависимость метрических инвариантов 2-го порядка  $J_2(1), J_2(2), J_2(3)$  через инварианты  $J_0, J_1$ .

(2) Функции  $a, b, c$ , задающие класс метрической эквивалентности, не произвольны, а удовлетворяют 2-м сизигиям, которые гарантируют, что система дифференциальных уравнений (3.2) является системой фробениу-сова типа.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Клейн Ф. Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований. // В кн.: Об основаниях геометрии. — 1872. — С. 399–434.
- [2] Красильщик И. С., Лычагин В. В., Виноградов А. В. Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. // М.: Наука, 1986.
- [3] Коновенко Н. Г., Лычагин В. В. О метрической эквивалентности функций, заданных на плоскости Лобачевского. // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2009. — Т. 151, кн. 4. — С. 54–59.

Коновенко Н. Г.

Одесская национальная академия пищевых технологий

`konovenko@ukr.net`

## On the extrinsic geometry of contact structures

*Vladimir Krouglov*

In the paper we prove, that extrinsic curvature does not impose additional restrictions on the topology of a contact structure, except the obvious ones.

### 1. INTRODUCTION

One of the natural characteristics of the plane distribution on a Riemannian manifold is its second fundamental form. It is known, a foliation on a closed three manifold is taut if the trace of the second fundamental form (i.e. the mean curvature) vanishes with respect to some Riemannian metric. It can be shown [3], that vanishing of the second fundamental form of a distribution with respect to some metric yields topological restrictions on the ambient space. In the recent work by Patrick Massot [9] it was established that all totally geodesic contact structures on three manifolds are tight. In contrast with foliations, every contact structure is a minimal distribution. Therefore it is an interesting question how one can relax the condition of a contact structure being totally geodesic to keep the topological restrictions on a contact structure.

In the present paper we study contact structures on 3-manifolds which have the restrictions on the determinant of the second fundamental form (i.e. the extrinsic curvature). There are three natural classes of plane distributions with the restrictions on the extrinsic curvature. The definition is due to A. Borisenko.

**Definition 1.** *The distribution of planes  $\xi$  on a three manifold is called:*

- (1) *parabolic, if there is a Riemannian metric on  $M$  such that the extrinsic curvature of  $\xi$  is equal to zero.*
- (2) *strong saddle (or hyperbolic), if there is a Riemannian metric on  $M$  such that the extrinsic curvature of  $\xi$  is strictly less than zero.*
- (3) *elliptic, if there is a Riemannian metric on  $M$  such that the extrinsic curvature of  $\xi$  is everywhere positive.*

The main result of this paper is the following:

**Theorem 1.** *Let  $\xi$  be a transversally orientable contact structure on a closed orientable three manifold  $M$ . Then,*

- (1)  *$\xi$  is parabolic.*
- (2)  *$\xi$  is hyperbolic if its Euler class vanishes.*
- (3) *There are no elliptic plane distributions on closed three manifolds.*

**Remark 1.** *In [6] and [7] we studied the problem of existence of foliations with the restrictions on the extrinsic curvature of the leaves. The main result in [7] is obtained in the present paper from some different point of view.*

This paper is organized as follows. In Section 2 we recall basic definitions and results in the geometry of plane distributions. Notions and results from the contact topology and Giroux correspondence between contact structures and open book decompositions are reviewed in Section 3. Section 4 is devoted to the proof of the fact, that every foliation by the fibers of fibration over the circle is parabolic. We also define a special parabolic foliation associated with the open book decomposition of  $M$ . In Section 5 we give the proof of the main theorem.

---

 2. BASIC DEFINITIONS AND NOTATIONS

Throughout this paper  $M$  will be a closed orientable 3-manifold. A distribution on  $M$  is a two dimensional subbundle of the tangent bundle of  $M$ . That is, at each point  $p$  in  $M$  there is a plane  $\xi_p$  in the tangent space  $T_pM$ . A distribution is called integrable, if there is a foliation on  $M$  which is tangent to it. The following theorem of Frobenius gives necessary and sufficient conditions for  $\xi$  to be integrable.

**Theorem 2.** *Let  $\xi$  be a distribution on  $M$ . Then  $\xi$  is integrable if and only if for any two sections  $S$  and  $T$  of  $\xi$  its Lie bracket belongs to  $\xi$ .*

**Definition 2.** *A distribution  $\xi$  is called a contact structure if for any linearly independent sections  $S$  and  $T$  of  $\xi$  and for any  $p \in M$  the Lie bracket  $[S, T]$  at  $p$  does not belong to  $\xi_p$ .*

A distribution  $\xi$  is called transversally oriented if there is a globally defined 1-form  $\alpha$ , such that

$$\xi = \text{Ker}(\alpha).$$

This is equivalent to say that there exists a globally defined vector field  $n$  which is transverse to  $\xi$ . It is an easy consequence of Frobenius Theorem that  $\xi$  is a contact structure if and only if

$$\alpha \wedge d\alpha \neq 0$$

The Euler class  $e(\xi) \in H^2(M, \mathbb{Z})$  of a plane distribution is the Euler class of the bundle  $\xi \rightarrow M$ . It is known that if  $\xi$  is a 2-dimensional plane distribution on  $M$  with vanishing Euler class then  $\xi$  is trivial.

Assume that  $M$  is a Riemannian manifold with the metric  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  and the Levi-Civita connection  $\nabla$ . Let  $n$  be a local unit vector field orthogonal to  $\xi$ . We are now going to define

the second fundamental form of  $\xi$ . The definition is due to Reinhart [10].

**Definition 3.** *The second fundamental form of  $\xi$  is a symmetric bilinear form, which is defined in the following way:*

$$B(S, T) = \frac{1}{2} \langle \nabla_S T + \nabla_T S, n \rangle$$

for all sections  $S$  and  $T$  of  $\xi$ .

**Remark 2.** *If  $\xi$  is integrable, then  $B$  restricted to the leaf of  $\xi$  agrees with the second fundamental form of the leaf.*

Assume that  $S$  and  $T$  are two linearly independent sections of  $\xi$ .

**Definition 4.** *A mean curvature function  $H$  of a plane distribution is a trace of the second fundamental form. If  $S$  and  $T$  are orthonormal, it may be written as*

$$H = \langle \nabla_S S, n \rangle + \langle \nabla_T T, n \rangle$$

**Definition 5.** *We call the function*

$$K_e(\xi) = \frac{B(S, S)B(T, T) - B(S, T)^2}{\langle S, S \rangle \langle T, T \rangle - \langle S, T \rangle^2}$$

an extrinsic curvature of  $\xi$ .

It is easy to verify that  $K_e(\xi)$  depends only on  $\xi$ , not on the actual choice of  $S$ ,  $T$  and  $n$ .

### 3. OPEN BOOK DECOMPOSITIONS AND CONTACT STRUCTURES

Consider an oriented link  $L$  in an oriented three manifold  $M$ . Assume that a complement  $M \setminus L$  fibers over the circle with the projection map

$$\pi : M \setminus L \rightarrow S^1$$

and that  $\pi^{-1}(t) = \Sigma_t^2$  is an interior of a compact surface bounded by  $L$ . Pair  $(\pi, L)$  is called an open book decomposition of  $M$ .

Two open book decompositions  $(L, \pi)$  and  $(L', \pi')$  are called isomorphic if there is a diffeomorphism  $f : M \rightarrow M$  such that  $\pi' \circ f = \pi$ .

There is an alternative description of open book decompositions through the mapping cylinders. Assume that  $\Sigma^2$  is a compact surface (with boundary) and consider a mapping cylinder

$$\Sigma^2 \times_{\phi} S^1 = \Sigma^2 \times [0, 1] / (x, 0) \sim (\phi x, 1),$$

where  $\phi$  is some diffeomorphism of  $\Sigma^2$  which is an identity in the neighborhood of  $\partial\Sigma^2$ . Since  $\phi$  is an identity map in the neighborhood of the boundary the boundary of  $\Sigma^2 \times_{\phi} S^1$  is a union of  $r$  tori where  $r$  is a number of connected components of the boundary  $\partial\Sigma^2$ .

We may now glue  $r$  solid tori  $D^2 \times S^1$  to  $\Sigma^2 \times_{\phi} S^1$  in such a way that  $\partial D^2$  is glued to  $S^1 = [0, 1] / \sim$  and  $S^1$  factor in the solid torus  $D^2 \times S^1$  corresponds to the boundary component of  $\Sigma^2$ . As a result we obtain closed manifold

$$M = (\Sigma^2 \times_{\phi} S^1) \cup \left( \bigcup_r D^2 \times S^1 \right).$$

This manifold has a canonical presentation as an open book decomposition such that  $L$  is a union of  $r$  core curves of

$$D^2 \times S^1$$

that we glued to  $\Sigma^2 \times_{\phi} S^1$  to obtain  $M$ .

**Definition 6.** We say that contact structure  $\xi$  is supported by the open book decomposition  $(L, \pi)$  of  $M$  if there is a one-form  $\alpha$  associated with  $\xi$  such that  $\alpha(L) > 0$  and  $d\alpha|_{\Sigma^2}^2$  on each page  $\Sigma^2 = \pi^{-1}(t)$ .



In [11] Thurston and Winkelhemper have shown that each open book decomposition on a closed three manifold supports some contact structure. It is surprising that converse also holds.

**Theorem 3** (Giroux, [5]). *Every contact structure  $\xi$  on a closed orientable three manifold  $M$  is supported by some open book decomposition.*

Using this result Etnyre in [4] proved the following result:

**Theorem 4.** *Every contact structure on a closed orientable three manifold is a  $C^\infty$ -deformation of  $C^\infty$ -foliation.*

Consider the diffeomorphism  $\phi$  of a compact surface  $\Sigma^2$  that is an identity in the neighborhood of  $\partial\Sigma^2$  (or an arbitrary diffeomorphism if  $\Sigma^2$  is closed). Throughout the paper  $\mathcal{F}_\phi$  will denote the foliation of the mapping cylinder  $\Sigma^2 \times_\phi S^1$  by the surfaces  $\Sigma^2 \times \{t\}$  for all  $t \in S^1$ .

#### 4. PARABOLIC FOLIATIONS

In [7] we showed that each closed orientable three manifold admits a parabolic foliation (i.e. the foliation by parabolic surfaces with respect to some metric). We established this result using Dehn surgeries on knots in  $S^3$ . In the present section we will show how one can obtain this result using open book decompositions. We will also show that every foliation by the fibers of fibration over the circle is parabolic.

**4.1. Local models of parabolic foliations.** The following lemma was proved in [7]. This lemma allows one to glue two parabolic foliations together along the common boundary leaf preserving parabolicity of glued foliation.

**Lemma 1.** *Let  $\Sigma^2$  be a compact parallelizable surface (possibly with the boundary). Consider two metrics  $G$  and  $H$  on  $\Sigma^2$  that coincide in some neighborhood of the boundary. Let  $\mathcal{F}$  be a foliation of  $M = \Sigma^2 \times [0, 1]$  by the surfaces  $\Sigma^2 \times \{t\}$ . Then, there is a metric  $g$  on  $M$  such that*

- (1) *In some tubular neighborhood of  $\Sigma^2 \times \{0\}$ ,*

$$g = dt^2 + G(p)$$

*for all  $p \in \Sigma^2$ .*

- (2) *in some tubular neighborhood of  $\Sigma^2 \times \{1\}$ ,*

$$g = dt^2 + H(p)$$

*for all  $p \in \Sigma^2$ .*

- (3)  *$\mathcal{F}$  is a parabolic foliation on  $\Sigma^2 \times [0, 1]$  with respect to  $g$ .*

- (4) *There is a neighborhood  $U$  of the boundary  $\partial\Sigma^2$  such that for all  $t \in [0, 1]$ ,*

$$g(p, t)|_{U \times \{t\}} = G(p)$$

The next lemma shows that a Reeb foliation inside a solid torus is parabolic. The result is due to Bolotov [1].

**Lemma 2.** *There is a foliation  $\mathcal{F}$  and a metric  $g$  on  $D^2 \times S^1$  such that:*

- (1)  *$\mathcal{F}$  is parabolic with respect to  $g$ .*  
 (2) *The foliation*

$$\mathcal{F}|_{D^2(\frac{1}{3}) \times S^1}$$

*is a foliation by the totally geodesic disks  $D^2(\frac{1}{3}) \times \{t\}$  and the foliation*

$$\mathcal{F}|_{([\frac{2}{3}, 1] \times S^1) \times S^1}$$

*is a foliation by the totally geodesic tori  $\{r\} \times S^1 \times S^1$ .*

**4.2. Parabolic fibrations.** Let  $(M^3, \pi)$  be a fibration over the circle with a closed fiber  $\Sigma^2$  and let  $\mathcal{F}_\phi$  be the foliation by the fibers of  $\pi$ . We have the following

**Proposition 1.** *The foliation  $\mathcal{F}_\phi$  is parabolic.*

*Proof.* Consider the presentation of  $M$  as a mapping cylinder of some  $\phi : \Sigma^2 \rightarrow \Sigma^2$ . We may assume that  $\phi$  is a composition of Dehn twists  $\alpha_i$  along some closed curves  $\gamma_i$  in  $\Sigma^2$  and that support of each  $\alpha_i$  is contained in some annulus  $c_i$  for each  $i$ .

First, consider the case when  $\phi$  is a Dehn twist by itself. Pick an arbitrary metric  $G$  on  $\Sigma^2$ . On a manifold

$$N = \Sigma^2 \times [0, 1]$$

consider a direct product metric  $G + dt^2$ . It is obvious that a foliation of  $N$  by the surfaces  $\Sigma^2 \times \{t\}$  is parabolic with respect to this metric.

Denote by  $H$  the pullback metric  $\phi^*G$ . Since the support of  $\phi$  is contained in some annulus  $c$ , from Lemma 4.1 we may obtain that on  $c \times [0, 1]$  there is a metric  $g$  such that

$$g|_{c \times \{0\}} = dt^2 + G|_c, \quad g|_{c \times \{1\}} = dt^2 + H|_c$$

and foliation by  $c \times \{t\}$  is parabolic. From condition 4) of Lemma 4.1 this metric is glued smoothly with the direct product metric  $G + dt^2$  on the complement  $(\Sigma^2 \setminus c) \times [0, 1]$ . Consequently, on  $L = \Sigma^2 \times [0, 1]$  there is a metric (which will also be denoted by  $g$ ) that a foliation by surfaces  $\Sigma^2 \times \{t\}$  is parabolic with respect to it. We are left to consider the union

$$M = N \cup_\phi L$$

and glue the remaining boundary components of  $M$  by the identity map. It is clear that since  $g$  is a direct product metric in the one-sided neighborhoods of the boundary of  $L$  (and  $\frac{\partial}{\partial t}$  is a unit normal vector field), it is glued correctly with the

direct product metric on  $N$  and therefore define a smooth metric on  $M$ . The foliation  $\mathcal{F}_\phi$  is parabolic with respect to the introduced metric.

Assume now that

$$\phi = \alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \dots \circ \alpha_n.$$

Pick an arbitrary metric  $G$  on  $\Sigma^2$  and for each  $i$  consider the manifold  $N_i = \Sigma^2 \times [0, 1]$  with the direct product metric

$$G + dt^2.$$

For each  $N_i$  consider the corresponding  $L_i$  that is obtained as on the previous step. In the (one-sided) neighborhood of the boundary components of  $\partial(N_i \cup_{\alpha_i} L_i)$  the metric is a direct product metric  $G + dt^2$ . We are left to consider the union

$$M = (N_1 \cup_{\alpha_1} L_1) \cup_{id} (N_2 \cup_{\alpha_2} L_2) \cup_{id} \dots \cup_{id} (N_n \cup_{\alpha_n} L_n)$$

and glue the remaining boundary components by the identity map. This finishes the proof of proposition.  $\square$

**Corollary 1.** *Let  $\Sigma^2$  be a compact orientable surface with boundary and assume that  $\phi$  is a diffeomorphism of  $\Sigma^2$  which is an identity map in the neighborhood of the boundary  $\partial\Sigma^2$ . On the mapping cylinder  $\Sigma^2 \times_\phi S^1$  the foliation by surfaces  $\Sigma^2 \times \{t\}$  is parabolic.*

*Proof.* Same as Proposition 1.  $\square$

**4.3. Parabolic foliations associated with the open book decomposition.** Assume that  $(L, \pi)$  is an open book decomposition of the closed oriented three manifold  $M$ . In this section we will define a special parabolic foliation on  $M$  associated with this open book decomposition. We will define this foliation replacing the neighborhoods of the binding by a foliation which was defined in Lemma 2 and twisting the pages of the open book around the boundary leaf.

Denote by  $N$  the tubular neighborhood of one component of the binding (construction for other components of the binding would be the same). On  $N$  define the coordinates  $(r, \phi, t)$  in such a way that pages of the open book correspond to the constant  $\phi$ -annuli and the component of the binding corresponds to a curve  $r = 0$ . Assume that

$$N = \{(r, \phi, t) : r \leq 1 + 2\varepsilon\}$$

for some small fixed  $\varepsilon$ .

Define a foliation and the metric on

$$N_1 = \{(r, \phi, t) : r \leq 1\}$$

as in Lemma 2.

Consider the following function  $f(r)$  on  $[1, 1 + 2\varepsilon]$ :

- (1)  $f(r) = 0$ , for all  $r \in [1, 1 + \frac{\varepsilon}{2}]$
- (2)  $f(r) = 1$ , for all  $r \in [1 + \varepsilon, 1 + 2\varepsilon]$
- (3)  $f$  is a strictly increasing function on  $[1 + \frac{\varepsilon}{2}, 1 + \varepsilon]$

On  $[1, 1 + 2\varepsilon] \times T^2$  define a foliation using a one-form:

$$\alpha = f(r)d\phi + (1 - f(r))dr$$

This foliation when restricted to  $[1 + \varepsilon, 1 + 2\varepsilon] \times T^2$  is a foliation by the constant  $\phi$ -annuli and is therefore smoothly glued to a foliation of  $M \setminus N$  by the fibers of  $\pi$ .

In the neighborhood of the boundary  $\partial N_1$  the metric

$$g = dr^2 + d\phi^2 + dt^2.$$

Extend this metric to  $N_{1+3\varepsilon}$ . The foliation in  $[1, 1 + 2\varepsilon] \times T^2$  is parabolic with respect to this metric, since in each point of  $[1, 1 + 2\varepsilon] \times T^2$  the plane tangent to the leaf contains principal geodesic direction  $\frac{\partial}{\partial t}$ . Moreover, this metric induces some metric in the neighborhood of one component of the boundary of  $\Sigma^2 \times_\phi S^1$ . Making such extensions for each component of the binding we will obtain some metric that is defined in the

neighborhood of the boundary  $\partial(\Sigma^2 \times_\phi S^1)$ . Note, that this metric is direct product metric in this neighborhood of the boundary. It induces some metric in the neighborhood of  $\partial\Sigma^2 \times \{0\}$ . Arbitrarily extend it to the whole leaf  $\Sigma^2 \times \{0\}$ . Using the same construction as in Lemma 1 we may define a metric on a mapping cylinder in such a way that a foliation by the fibers of  $\pi$  is parabolic. Therefore we defined a metric on  $\Sigma^2 \times_\phi S^1 \cup (\bigcup_i^r N_{1+2\varepsilon}(i))$ , where  $r$  is a number of components of the binding in the open book decomposition and the foliation  $\mathcal{F}_\phi$  which is parabolic with respect to it.

## 5. EXTRINSIC GEOMETRY OF CONTACT STRUCTURES

In this section we will give the proof of Theorem 1.2.

**Lemma 3.** *The function of the mean curvature of any transversally orientable distribution  $\xi$  on a closed orientable three manifold is a divergence.*

*Proof.* Let  $(X, Y)$  be two (local) orthonormal sections of  $\xi$  and  $n$  be a unit normal vector field. From the definition of the mean curvature function we have

$$H = \text{tr}(B) = \langle \nabla_X X, n \rangle + \langle \nabla_Y Y, n \rangle$$

Using the fact that  $n$  is orthogonal to  $\xi$  we obtain that

$$H = -\langle \nabla_X n, X \rangle - \langle \nabla_Y n, Y \rangle = \text{div}(-n)$$

since  $\langle \nabla_n n, n \rangle = 0$ . □

**Corollary 2.** *On a closed orientable three manifold there are no transversally orientable elliptic distributions.*

*Proof.* From the Stokes theorem

$$\int_M H = \int_M \text{div}(-n) = 0$$

If a distribution is elliptic, then  $K_e > 0$ . Therefore principal curvature functions have to be either both positive or negative. Consequently,  $\int_M H \neq 0$ . A contradiction.  $\square$

**Lemma 4.** *Transversally orientable contact structure  $\xi$  on a closed orientable three manifold is strong saddle if  $e(\xi) = 0$*

*Proof.* See Corollary 3.6 in [8] for details.  $\square$

We are left to prove that every transversally orientable contact structure on  $M$  is parabolic. The following lemma allows to carry the information about the extrinsic geometry from one distribution to another.

**Lemma 5.** [2] *Assume that on a Riemannian manifold  $M$  given two distributions  $\xi$  and  $\eta$ . Denote by  $B_\xi$  the second fundamental form of  $\xi$ . Assume that a normal vector field to  $\xi$  is transverse to  $\eta$ . For all  $X \in \xi$ , denote by  $PX$  an orthogonal projection of vector  $X$  on  $\eta$ . Then, there is a metric on  $M$  such that a second fundamental form of  $\eta$  satisfies*

$$B_\eta(PX, PY) = B_\xi(X, Y), \text{ for all } X, Y \in \xi.$$

*In particular, if  $\xi$  is parabolic, so is  $\eta$ .*

**Lemma 6.** *Every transversally orientable contact structure  $\xi$  on a closed orientable three manifold  $M$  is parabolic.*

*Proof:* We will follow the construction in [4] to define a family of contact one-forms that approximate a parabolic foliation associated with the open book decomposition.

For  $\xi$  consider the corresponding open book decomposition  $(\Sigma^2, \phi)$ . It is obvious that foliation associated with this open book decomposition differs from the one defined in [4] (cf. Proof of Theorem 1 there) everywhere except some  $\delta$ -neighborhood of the leaf  $\{r = 1\}$ . It is easy to verify that a family of one-forms, defined in [4] is an approximation of our

foliation. So, there is a family of one-forms  $\alpha_t, t > 0$  which is a deformation of  $\mathcal{F}_\phi$  and has support  $(\Sigma^2, \phi)$ . In particular,  $\xi_t = \text{Ker}(\alpha_t)$  are isotopic to  $\xi$ .

Let  $g$  denotes a Riemannian metric on  $M$  such that  $\mathcal{F}_\phi$  is parabolic. It is obvious that we may find such  $t > 0$  that  $\xi_t$  will be transverse to a normal vector field to  $\mathcal{F}_\phi$ . Using Lemma 5.5 we see that there is a Riemannian metric on  $M$  such that  $\xi_t$  is parabolic (for  $t$  sufficiently small). But  $\xi_t$  is contactomorphic to  $\xi$  and therefore  $\xi$  is a parabolic contact structure with respect to a pullback metric. This finishes the proof of the theorem.

#### REFERENCES

- [1] *Bolotov D. V.* Hyperfoliations on compact three-manifolds with the restrictions on the extrinsic curvature of the leaves // *Math. Notes.* — 1998. — V. 63, № 5. — P. 651–659.
- [2] *Bolotov D.V.* Extrinsic geometry of foliations on 3-manifolds. // *Foliations 2005*, 109–120, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2006.
- [3] *Carriere Y.* Flots riemanniens // *Asterisque.* — 1982. — V. 116. — P. 31–52.
- [4] *Etnyre J. B.* Contact structures on 3-manifolds are deformations of foliations, preprint [arXiv:math/0607825](https://arxiv.org/abs/math/0607825)
- [5] *Giroux E.* Geometrie de contact: de la dimension trois vers les dimensions superieures. // In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Vol II(Beijing, 2002), P. 405–414, Beijing, 2002. Higher Ed. Press
- [6] *Krouglov V.* On the curvature of contact structures and foliations, // *Notices of Ukrainian Academy of Sciences.* — 2008. — V. 7. — P. 15–19.
- [7] *Krouglov V.* Parabolic foliations on three-manifolds, // *Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom.* — 2009. — V. 5, no. 2. — P. 170–191, 213, [arXiv:0811.2915](https://arxiv.org/abs/0811.2915)
- [8] *Krouglov V.* The curvature of contact structures on 3-manifolds, // *Algebraic and Geometric Topology.* — 2008. — V. 8. — P. 1567–1579. — [arXiv:0802.0950](https://arxiv.org/abs/0802.0950).



- [9] *Massot P.* Geodesible contact structures on 3-manifolds, // Geometry and Topology. — 2008. — V. 12. — P. 1729–1776.
- [10] *Reinhart B.* The second fundamental form of a plane field // J. Diff. Geom. — 1977. — V. 12, № 4. — P. 619–627.
- [11] *Thurston W., Winkelnkemper H.* On the existence of contact forms // Proc. Amer. Math. Soc. — 1975. — V. 52 — P. 345–347.

Vladimir Krouglov

Topology dept., Institute of Mathematics of NAS of Ukraine,  
Tereshchenkivska st. 3, Kyiv, 01601 Ukraine

`vkrouglov@gmail.com`

## О гауссовой кривизне гармонических функций

*Каве Эфтехаринасаб*

It is proved that the fundamental group of the space of harmonic polynomials of degree  $n \geq 2$  with the same Gaussian curvature is not trivial. Furthermore, we give an example of topologically nonequivalent conjugate harmonic functions having the same Gaussian curvature.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В работе изучается гауссова кривизна графиков гармонических функций. В частности, доказано, что существуют топологически неэквивалентные сопряженные гармонические функции с одинаковой гауссовой кривизной их графиков, а также, что фундаментальная группа пространства гармонических полиномов степени  $n \geq 2$ , графики которых имеют одну и ту же гауссову кривизну, ненулевая.

### 2. ГАУССОВА КРИВИЗНА И ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Пусть  $w = u(x, y)$  — гармоническая функция от действительных переменных  $(x, y)$ , заданная в односвязной области  $D$ . Обозначим через  $K = K(x, y)$  — гауссову кривизну ее графика. Известно, что  $K = K(x, y)$  можно вычислить

с помощью формулы

$$K(x, y) = \frac{u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^2}.$$

Положим  $z = x + iy$  и представим  $w = u(x, y)$  как

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(z) = \frac{1}{2}(f(z) + \overline{f(z)})$$

для некоторой голоморфной функции  $f(z)$  комплексной переменной  $z$ . Следуя классическим обозначениям

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

и правилам

$$\frac{\partial f}{\partial z} = f'(z), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0, \quad \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} = \overline{f'(z)},$$

с помощью несложных вычислений можно получить следующую формулу для гауссовой кривизны графика функции  $w = u(x, y)$

$$(2.1) \quad K(x, y) = \frac{|f''(z)|^2}{-(1 + |f'(z)|^2)^2}.$$

Напомним, что критическая точка  $z$  гладкой функции  $w = g(x_1, x_2)$  называется *невыврожденной*, если матрица гессе  $\left( \frac{\partial^2 g(z)}{\partial x_i \partial x_j} \right)$  — невырожденная. В противном случае критическая точка называется *вырожденной*.

Имеет место следующий факт:

**Лемма 1.** *Гауссова кривизна графика гармонической функции  $w = u(x, y)$ , заданной в односвязной области, всегда неположительна и обращается в ноль в изолированных точках, среди которых могут быть только вырожденные критические точки функции  $w = u(x, y)$ .*

*Доказательство.* Пусть  $f(x + iy)$  — голоморфная функция, и  $w = u(x, y)$  — ее действительная часть. Гауссова кривизна графика гармонической функции  $w = u(x, y)$ , заданной в односвязной области обращается в ноль, когда  $f''(x + iy) = 0$ . Поскольку функция  $f(x + iy)$  голоморфная, то функция  $f''(x + iy)$  — также голоморфная. Нули голоморфной функции всегда изолированные. Далее, критические точки функции  $f(x + iy)$  и функции  $w = u(x, y)$  совпадают. Если среди нулей функции  $f''(x + iy) = 0$  есть критические точки функции  $f(x + iy)$ , то очевидно, что они будут и критическими точками функции  $w = u(x, y)$ .

Из равенства  $K(x, y) = \frac{u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^2} = 0$  следует, что  $u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = 0$ , т.е. эти критические точки вырожденные.  $\square$

**Замечание 1.** Если  $w = u(x, y)$  — гармонический полином степени  $n > 2$ , то очевидно, что мощность множество точек  $\Gamma$ , где гауссова кривизна графика  $w = u(x, y)$  равна нулю, не превышает  $n - 2$ . По теореме Гаусса-Люка, [1], точки из множества  $\Gamma$  принадлежат выпуклому многоугольнику  $\Delta$ , содержащему нули голоморфной функции  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ . Если кратность нулей функции  $f(x + iy)$  не превышает 2, то точки из  $\Gamma$  лежат внутри выпуклого многоугольника  $\delta \subset \Delta$ , содержащего нули функции  $f'(x + iy)$ .

**Замечание 2.** Голоморфную функцию  $f(x + iy)$  можно представить в виде  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ . Поскольку  $v(x, y)$  — гармоническая функция, то несложно показать, что гауссова кривизна графиков функций  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  одинаковая см. по этому поводу работу [2].

Напомним, что гладкие функции

$$w = q(x, y), \quad v = r(x, y),$$

заданные в области  $D$ , называются топологически эквивалентными, если существуют такие гомеоморфизмы

$$k : D \rightarrow D, \quad l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

что имеет место равенство  $q \circ k = r \circ l$ .

**Предложение 1.** *Существуют топологически неэквивалентные сопряженные гармонические функции, у которых гауссова кривизна графиков одинаковая.*

*Доказательство.* Рассмотрим сопряженные гармонические функции

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2 - 3x, \quad v(x, y) = -y^3 + 3x^2y - 3y.$$

Они имеют по две невырожденные критические точки, координаты которых  $(\pm 1, 0)$ . Для функции  $u(x, y)$  эти критические точки лежат на разных линиях уровня, а для функции  $v(x, y)$  критические точки лежат на одной линии уровня. Следовательно, функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  топологически неэквивалентные, хотя функция гауссовой кривизны у них в силу замечания 2 одна и та же.  $\square$

**Замечание 3.** *Графики функций  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  не изометричны, у них разные первые квадратичные формы.*

Заметим, что полиномы  $P = x^2 + y^2$  и  $Q = x^4 + y^4$  топологически эквивалентные.

В. В. Шарко доказал, что гармонические полиномы разных степеней от двух действительных переменных всегда топологически неэквивалентные. Для каждого  $n$  существует конечное число топологически неэквивалентных гармонических полиномов  $P(x, y)$  степени  $n$ .

### 3. О ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ

**Лемма 2.** Гауссова кривизна графиков гармонических полиномов  $w = (x, y)$  и  $w' = v(x, y)$  разных степеней всегда разная.

*Доказательство.* Пусть  $P(z)$  и  $Q(z)$  — комплексные полиномы степеней  $n$  и  $m$  соответственно, у которых действительные части есть полиномы  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$ . По условию леммы  $n \neq m$ . Поведение функций  $|P(z)|$  и  $|Q(z)|$  при  $z \rightarrow \infty$  определяется мономы  $|z^n|$  и  $|z^m|$  соответственно. Применяв этот факт для формулы 2.1, несложно получить, что

$$\frac{|P''(z)|^2}{-(1 + |P'(z)|^2)^2} \neq \frac{|Q''(z)|^2}{-(1 + |Q'(z)|^2)^2}.$$

Следовательно, гауссова кривизна полиномов  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  разная.  $\square$

**Теорема 1.** Предположим, что  $P(z)$  и  $Q(z)$  — комплексные полиномы. Тогда тождество

$$\frac{|P''(z)|^2}{-(1 + |P'(z)|^2)^2} = \frac{|Q''(z)|^2}{-(1 + |Q'(z)|^2)^2}$$

возможно в том и только в том случае, когда

$$P(z) = kQ(z) + const,$$

где  $|k| = 1$ .

*Доказательство. Достаточность.* Если

$$P(z) = kQ(z) + const,$$

то непосредственно из формулы 2.1 вытекает справедливость заключения теоремы.

*Необходимость.* Нам достаточно доказать, что совпадают функции  $\frac{|P''(z)|}{1 + |P'(z)|^2}$  и  $\frac{|Q''(z)|}{1 + |Q'(z)|^2}$ . Для этого положим  $P'(z) = n(z)$ , где очевидно  $n(z)$  — полином. Пусть  $\gamma(t)$  — путь в области однолиственности функции  $n(z)$  с началом в точке  $z_0$  и концом в точке  $z$ . Рассмотрим интеграл

$$\int_{\gamma(t)} \frac{|n'(z)||d(z)|}{1 + |n(z)|^2}.$$

Имеем

$$\int_{\gamma(t)} \frac{|n'(z)||d(z)|}{1 + |n(z)|^2} = \int_{\gamma(t)} \frac{d(|n(z)|)}{1 + |n(z)|^2} = \arctan |n(z)| + const.$$

Аналогичным образом, положив  $Q'(z) = m(z)$  и проведя такие же рассуждения получим

$$\int_{\gamma(t)} \frac{|m'(z)||d(z)|}{1 + |m(z)|^2} = \int_{\gamma(t)} \frac{d(|m(z)|)}{1 + |m(z)|^2} = \arctan |m(z)| + const.$$

Таким образом  $\arctg|n(z)| = \arctan |m(z)| + const$  и следовательно  $|n(z)| = |m(z)| + const$ . Теперь несложно показать, что  $P(z) = kQ(z) + const$ , где  $|k| = 1$ .  $\square$

**Замечание 4.** Для произвольных голоморфных функций  $f(z)$  и  $g(z)$ , заданных в односвязной области  $D$  теорема 1 неверна, см. [2]. Но она, по-видимому, верна для целых функций.

Пусть  $w = P(x, y)$  и  $w' = Q(x, y)$  — сопряженные гармонические полиномы. Очевидно, что если параметр  $t$  принадлежит единичной окружности на комплексной плоскости, то однопараметрическое семейство полиномов

$$\cos(t) u(x, y) - \sin(t) v(x, y)$$

образует петлю в пространстве гармонических полиномов, графики которых имеют одну и ту же гауссову кривизну. Легко видеть, что этой петле принадлежат функции  $w = \pm P(x, y)$ ,  $w' = \pm Q(x, y)$ . Таким образом, из леммы 1 и теоремы 1 вытекает следующий факт:

**Предложение 2.** *Фундаментальная группа пространства гармонических полиномов степени  $n \geq 2$ , графики которых имеют одну и ту же гауссову кривизну, ненулевая.*

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Marden M.* The Geometry of the Zeros of a Polynomial in a Complex Variable // *Mathematical Surveys*, American Mathematical Society. — N. Y. — 1949. — No. 3. — ix+183 Pp.
- [2] *Shomberg J.* A note on surfaces with radially symmetric nonpositive Gaussian curvature // *Mathematica Bohemica*. — 2005. — V. 130, no. 2. — P. 167–176.

Каве Эфтехаринасаб  
Институт математики НАН Украины, Киев  
kaveh@imath.kiev.ua



515.162.2 + 517.57

## О поведении $F$ -функций на замыкании множества своих $S$ -отделенных точек<sup>4</sup>

*Полулях Е. А.*

We present an example of Peano-interior function  $f$  defined on the square  $M = [0, 1] \times [0, 1]$  such that the set  $\overline{D(S, \partial M)}$  of all  $S$ -separated points of  $\partial M$  has connected closure  $\overline{D(S, \partial M)}$ , and  $f$  is not constant on this closure.

### 1. ВВЕДЕНИЕ.

Пусть  $M$  — двумерная ориентируемая поверхность с краем  $\partial M$ . Обозначим  $\overset{\circ}{M} = M \setminus \partial M$ .

Пусть  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  — некоторая функция и  $x \in A \subset M$ . Введем следующие обозначения для множеств уровня  $f$ :

$$M^x = M_{f(x)} = \{y \in M \mid f(y) = f(x)\},$$
$$A^x = A_{f(x)} = A \cap M^x.$$

**Определение 1.** Функция  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  называется  $F$ -функцией, если

- (i)  $f$  непрерывна;
- (ii)  $f$  открыта на  $\overset{\circ}{M}$ ;
- (iii) для каждого  $x \in \overset{\circ}{M}$  множество  $M^x$  локально-связно в точке  $x$ .

---

<sup>4</sup> Работа написана при частичной поддержке гранта Государственного комитета по вопросам науки, инноваций и информатизации, № М/150–2009.

$F$ -функции ввел У. Фокс в работе [1] как обобщение псевдо-гармонических функций. Там он их называет *Peano-interior functions*.

В работе [2] Фокс строит продолжение  $F$ -функции, заданной на поверхности  $M$ , до  $F$ -функции, заданной на большей поверхности  $C(M) \supset M$ , и локально постоянной на крае  $\partial C(M)$ . Он дает следующее определение.

**Определение 2.** *Функция  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  называется **отделенной сверху от  $M$**  в точке  $x \in \partial M$ , или  **$S$ -отделенной** в точке  $x$ , если существует окрестность  $U$  точки  $x$  в  $M$ , такая что  $f(y) < f(x)$  для всех  $y \in U \cap M$ .*

Пусть  $J$  — компонента края поверхности  $M$ . Обозначим через  $D(S, J)$  множество всех  $S$ -отделенных точек, лежащих в  $J$ . Из непрерывности  $f$  следует, что она постоянна на каждой компоненте связности множества  $D(S, J)$ .

Вообще говоря, множество  $D(S, J)$  не является ни открытым ни замкнутым подмножеством  $J$ . С целью уменьшить количество компонент связности, Фокс в [2] предлагает рассматривать замкнутое множество  $\overline{D(S, J)}$  вместо  $D(S, J)$ . Его метод построения продолжения  $F$ -функции работает, если эта функция постоянна на каждой компоненте множества  $\overline{D(S, J)}$ .

В то же время, в [2] Фокс формулирует как нерешенную проблему следующий вопрос: *всегда ли  $F$ -функция  $f$  постоянна на компонентах связности множества  $\overline{D(S, J)}$ ?*

Ниже мы строим пример  $F$ -функции, заданной на квадрате  $M = [0, 1] \times [0, 1]$ , который дает на этот вопрос отрицательный ответ. Тем самым будет доказано следующее утверждение.

**Теорема 1.** *Пусть  $M = [0, 1] \times [0, 1]$ . Существует  $F$ -функция  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , такая что множество  $\overline{D(S, \partial M)}$*

связно и

$$f(\overline{D(S, J)}) = [0, 1].$$

## 2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ.

Напомним некоторые определения и конструкции.

Пусть  $\Gamma \subset [0, 1]$  — стандартное множество Кантора и  $g_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  — Канторова лестница — непрерывная непостоянная неубывающая функция на отрезке, локально постоянная на множестве  $[0, 1] \setminus \Gamma$ .

Введем следующие обозначения.

Пусть  $i \in \mathbb{N}$ ,  $k \in \{1, \dots, 2^{i-1}\}$ . Существует единственное разложение числа  $(2k-1)/2^i$  в сумму вида

$$\frac{2k-1}{2^i} = \sum_{s=1}^i \frac{\beta_s}{2^s} = \sum_{s=1}^{i-1} \frac{\beta_s}{2^s} + \frac{1}{2^i},$$

где  $\beta_s \in \{0, 1\}$ ,  $s \in \{1, \dots, i\}$ . Заметим, что  $\beta_i = 1$ , так как число  $(2k-1)$  нечетное.

Обозначим

$$r_{2k-1}^i = \sum_{s=1}^i \frac{2\beta_s}{3^s} = \sum_{s=1}^{i-1} \frac{2\beta_s}{3^s} + \frac{2}{3^i}, \quad l_{2k-1}^i = \sum_{s=1}^{i-1} \frac{2\beta_s}{3^s} + \frac{1}{3^i},$$

$$I_{2k-1}^i = (l_{2k-1}^i, r_{2k-1}^i).$$

В частности,

$$I_1^1 = (1/3, 2/3), \quad I_1^2 = (1/9, 2/9), \quad I_3^2 = (7/9, 8/9), \dots$$

По определению,

$$\Gamma = [0, 1] \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}, k \in \{1, \dots, 2^{i-1}\}} I_{2k-1}^i.$$

Напомним, что на множестве  $[0, 1] \setminus \Gamma$  функция  $g_0$  определяется при помощи соотношений

$$g_0(x) = \frac{2k-1}{2^i}, \text{ если } x \in I_{2k-1}^i,$$

а на  $\Gamma$  эта функция однозначно продолжается по непрерывности.

3. ПОСТРОЕНИЕ  $F$ -ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ НА КВАДРАТЕ, КОТОРАЯ НЕ ЯВЛЯЕТСЯ ПОСТОЯННОЙ НА КОМПОНЕНТАХ СВЯЗНОСТИ ЗАМЫКАНИЯ СВОЕГО МНОЖЕСТВА  $S$ -ОТДЕЛЕННЫХ ТОЧЕК.

Пусть  $M = [0, 1] \times [0, 1]$ . Рассмотрим функцию

$$f_0 : \partial M \rightarrow \mathbb{R},$$

определенную следующим образом:

$$f_0(x, y) = \begin{cases} g_0(x), & \text{если } y = 0, \\ x, & \text{если } y = 1 \text{ или } x \in \{0, 1\}. \end{cases}$$

Эта функция линейна на верхнем основании квадрата, является лестницей Кантора на нижнем основании и постоянна на каждой из боковых сторон. Ясно, что  $f_0$  непрерывна на  $\partial M = (\{0, 1\} \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times \{0, 1\})$ .

Обозначим через

$$\hat{a}_{2k-1}^i = (r_{2k-1}^i, 0) \in M$$

правый конец интервала  $I_{2k-1}^i \times \{0\}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ ,  $k \in \{1, \dots, 2^{i-1}\}$ , и пусть

$$B^i = [0, 1] \times [1/2^i, 1/2^{i-1}], \quad i \in \mathbb{N}.$$

Тогда, очевидно, что  $M = ([0, 1] \times \{0\}) \cup \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B^i$ .

Будем последовательно продолжать функцию  $f_0$  по индукции на полосы  $B^i$ .

Обозначим

$$D_i = \partial M \cup \bigcup_{s \in \{1, \dots, i\}} B^s, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Условимся для любых точек  $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^2$  обозначать через  $[z_1, z_2]$  прямолинейный отрезок, соединяющий эти точки.

**База индукции.** Пусть  $i = 1$ .

Рассмотрим точки  $a_0^1 = (0, 1)$ ,  $a_2^1 = (1, 1)$ . Пусть также  $a_1^1 = (1/2, 1)$  — середина отрезка  $[a_0^1, a_2^1]$ . Рассмотрим отрезок  $J_1^1 = [a_1^1, \hat{a}_1^1]$ .

Обозначим  $b_0^1 = (0, 1/2)$ ,  $b_2^1 = (1, 1/2)$ . Пусть  $b_1^1$  — точка пересечения отрезков  $[b_0^1, b_2^1]$  и  $J_1^1$ , а  $S_1^1$  и  $S_2^1$  — четырехугольники с вершинами  $(a_0^1, a_1^1, b_1^1, b_0^1)$  и  $(a_1^1, a_2^1, b_2^1, a_1^1)$ , соответственно.

Определим функцию  $f_1 : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$  следующим образом.

Пусть  $f_1(z) = f_0(z)$ , если  $z \in \partial M$ . Тогда  $f_1(a_1^1) = 1/2$ . Положим  $f_1(z) = g_0(\hat{a}_1^1) = 1/2$ , если  $z \in B^1 \cap D^1$ . Тогда  $f_1(b_1^1) = 1/2$ .

Пусть  $[\alpha_{m-1}^1, \alpha_m^1]$  — пересечение горизонтального отрезка  $[0, 1] \times \{y\}$ ,  $y \in [1/2, 1]$ , с трапецией  $S_m^1$ ,  $m = 1, 2$ . В точках  $\alpha_k^1(y) \in (\{0\} \times [0, 1]) \cup J_1^1 \cup (\{1\} \times [0, 1])$  функция  $f_1$  уже определена,  $f_1(\alpha_k^1(y)) = k/2$ ,  $k = 0, 1, 2$ . Продолжим  $f_1$  линейно на отрезок  $[\alpha_{m-1}^1(y), \alpha_m^1(y)]$ ,  $m = 1, 2$ .

Легко видеть, что  $f_1(x, 1) = f_0(x, 1)$ ,  $x \in [0, 1]$ .

Из построения также ясно, что ограничение  $f|_{S_m^1}$  непрерывно для  $m = 1, 2$ . Кроме того, функция  $f_1|_{\partial M} = f_0|_{\partial M}$  тоже непрерывна. Так как множества  $S_1^1$ ,  $S_2^1$  и  $\partial M$  образуют конечное замкнутое покрытие пространства  $D^1$ , то функция  $f_1$  непрерывна на  $D^1$  (см. [3]).

**Шаг индукции.** Пусть  $i > 1$ .

Обозначим через  $p_1, p_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  координатные проекции  $p_1(x, y) = x$ ,  $p_2(x, y) = y$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Предположим, что уже построен набор попарно не пересекающихся отрезков

$$J_{2k-1}^s = [a_{2k-1}^s, \hat{a}_{2k-1}^s], \quad s \in \{1, \dots, i-1\}, \quad k \in \{1, \dots, 2^{s-1}\},$$

таких что  $p_1(a_{2k-1}^s) \in (0, 1)$ ,  $p_2(a_{2k-1}^s) = 1/2^{s-1}$  для всех  $s$  и  $k$ .

Пусть уже также построена также непрерывная функция  $f_{i-1} : D^{i-1} \rightarrow \mathbb{R}$ , удовлетворяющая следующим условиям:

- $f_{i-1}|_{\partial M} = f_0$ ;
- $f_{i-1}(\cdot, y) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  монотонно возрастает от 0 до 1 при каждом фиксированном  $y \in [1/2^{i-1}, 1]$ ;
- $J_{2k-1}^s \cap D^{i-1} \subset f_{i-1}^{-1}((2k-1)/2^s)$ ,  $s \in \{1, \dots, i-1\}$ ,  $k \in \{1, \dots, 2^{s-1}\}$  (в частности,  $f_{i-1}(\hat{a}_{2k-1}^s) = g_0(\hat{a}_{2k-1}^s)$ ).

Пусть  $k = (2m-1)2^{i-s-1} \in \{1, \dots, 2^{i-1}\}$ . Обозначим через  $b_k^{i-1}$  точку пересечения отрезков  $[0, 1] \times \{1/2^{i-1}\}$  и  $J_{2m-1}^s$ . Отметим, что  $(2m-1)/2^s = k/2^{i-1}$ . Пусть также  $b_0^{i-1} = (0, 1/2^{i-1})$ ,  $b_{2^{i-1}}^{i-1} = (1, 1/2^{i-1})$ . Из свойств функции  $f_{i-1}$  следует, что

$$f_{i-1}(b_k^{i-1}) = \frac{k}{2^{i-1}}, \quad k \in \{0, 1, \dots, 2^{i-1}\}.$$

Предположим, что, в дополнение к предыдущим свойствам, функция  $f_{i-1}$  удовлетворяет еще такому условию:

- функция  $f_{i-1}$  линейна на каждом отрезке  $[b_{k-1}^{i-1}, b_k^{i-1}]$ ,  $k \in \{1, \dots, 2^{i-1}\}$ .

Наша цель — построить набор попарно не пересекающихся отрезков  $J_{2k-1}^i = [a_{2k-1}^i, \hat{a}_{2k-1}^i]$ ,  $k \in \{1, \dots, 2^{i-1}\}$  и непрерывную функцию  $f_i : D^i \rightarrow \mathbb{R}$  такие, чтобы

$$\text{а) } f_i|_{D^{i-1}} = f_{i-1};$$

б) набор отрезков  $J_{2k-1}^s$ ,  $s \in \{1, \dots, i\}$ ,  $k \in \{1, \dots, 2^{s-1}\}$ , и функция  $f_i$  удовлетворяли условиям, которые аналогичны нашим предположениям, перечисленным выше.

Обозначим  $a_{2k}^i = b_k^{i-1}$ ,  $k \in \{0, \dots, 2^{i-1}\}$ . Пусть  $a_{2k-1}^i$  — середина отрезка  $[a_{2k-2}^i, a_{2k}^i] = [b_{k-1}^{i-1}, b_k^{i-1}]$ ,  $k \in \{1, \dots, 2^{i-1}\}$ . Из линейности функции  $f_{i-1}$  на этих отрезках следует, что

$$(3.1) \quad f_{i-1}(a_k^i) = \frac{k}{2^i}, \quad k \in \{0, 1, \dots, 2^i\}.$$

Пусть  $k = (2m-1)2^{i-s} \in \{1, \dots, 2^i - 1\}$ . Обозначим

$$\hat{a}_k^i = \hat{a}_{2m-1}^s.$$

Ясно, что  $g_0(\hat{a}_k^i) = g_0(\hat{a}_{2m-1}^s) = (2m-1)/2^s = k/2^i$ .

Обозначим  $J_k^i = [a_k^i, \hat{a}_k^i]$ ,  $k \in \{1, \dots, 2^i - 1\}$ . Из построения легко видеть, что если число  $k = (2m-1)2^{i-s}$  четное, то  $J_k^i \subset J_{2m-1}^s$ . Поэтому

$$(3.2) \quad ([0, 1] \times [0, \frac{1}{2^{i-1}}]) \cap \left( \bigcup_{s=1}^{i-1} \bigcup_{m=1}^{2^{s-1}} J_{2m-1}^s \right) = \bigcup_{k=1}^{2^i-1} J_k^i.$$

Функции  $g_0, f_{i-1}(\cdot, 1/2^{i-1}) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  монотонно неубывают по построению. При этом выполнены равенства

$$\begin{aligned} 0 < f_{i-1}(a_1^i) < \dots < f_{i-1}(a_{2^{i-1}}^i) < 1, \\ 0 < g_0(\hat{a}_1^i) < \dots < g_0(\hat{a}_{2^{i-1}}^i) < 1. \end{aligned}$$

Поэтому, как легко сообразить, отрезки

$$J_k^i, \quad k \in \{1, \dots, 2^i - 1\},$$

попарно не пересекаются.

Следовательно, (см. равенство (3.2)), отрезки из набора  $J_{2k-1}^s$ ,  $s \in \{1, \dots, i\}$ ,  $k \in \{1, \dots, 2^{s-1}\}$ , попарно не пересекаются.

Положим  $f_i|_{D^{i-1}} = f_{i-1} : D^{i-1} \rightarrow \mathbb{R}$ , в частности

$$f_i(z) = \begin{cases} 0, & \text{если } p_1(z) = 0, \\ 1, & \text{если } p_1(z) = 1. \end{cases}$$

Пусть еще  $f_i(z) = k/2^i$ , если  $z \in J_k^i \cap B^i$ ,  $k \in \{1, \dots, 2^i - 1\}$ .

Пусть  $b_0^i = (0, 1/2^i)$ ,  $b_{2^i}^i = (1, 1/2^i)$ . Обозначим через  $b_k^i$  точку пересечения отрезков  $[b_0^i, b_{2^i}^i] = [0, 1] \times \{1/2^i\}$  и  $J_k^i$ ,  $k \in \{1, \dots, 2^i - 1\}$ .

Отрезки  $J_k^i$  разбивают прямоугольник

$$B^i = [0, 1] \times [1/2^i, 1/2^{i-1}]$$

на трапеции  $S_1^i, \dots, S_{2^i}^i$  (см. Рис. 1). Вершинами четырехугольника  $S_k^i$  служат точки  $a_{k-1}^i, a_k^i, b_k^i, b_{k-1}^i$ ,  $k \in \{1, \dots, 2^i\}$  (Рис. 2).

Пусть  $[\alpha_{k-1}^i(y), \alpha_k^i(y)]$  — пересечение горизонтального отрезка  $[0, 1] \times \{y\}$ ,  $y \in [1/2^i, 1/2^{i-1}]$ , с четырехугольником  $S_k^i$ . В точках

$$\alpha_k^i(y) \in (\{0\} \times [0, 1]) \cup (\{1\} \times [0, 1]) \cup \bigcup_{m=1}^{2^i-1} J_m^i,$$

функция  $f_i$  уже определена,

$$(3.3) \quad f_i(\alpha_k^i(y)) = \frac{k}{2^i}, \quad k \in \{1, \dots, 2^i\}.$$

Также функция  $f_i$  определена и линейна по нашим предыдущим предположениям на верхней стороне  $[a_{k-1}^i, a_k^i]$  каждой трапеции  $S_k^i$ ,  $k \in \{1, \dots, 2^i\}$ . Продолжим  $f_i$  линейно на отрезки

$$[\alpha_{k-1}^i(y), \alpha_k^i(y)], \quad y \in [1/2^i, 1/2^{i-1}], \quad k \in \{1, \dots, 2^i\}.$$

Отметим отдельно, что, в частности,  $f_i$  линейна на каждом отрезке  $[b_{k-1}^i, b_k^i]$ .



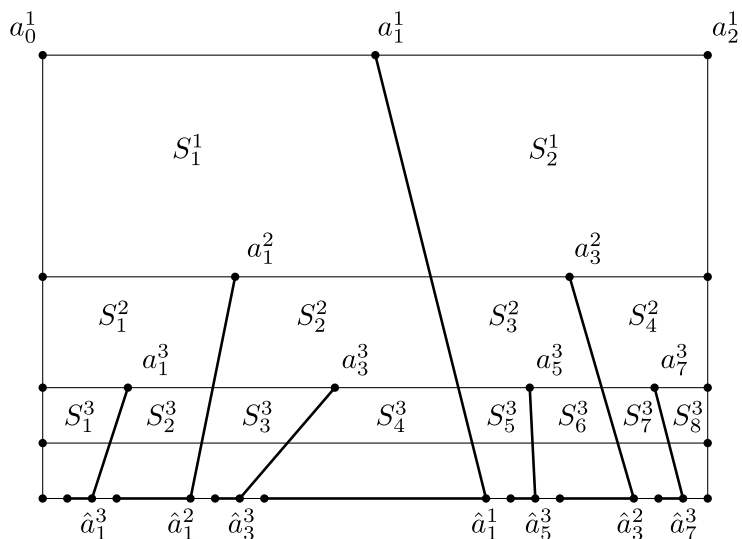


Рис. 1. Множества  $J_{2m-1}^s$  и четырехугольники  $S_k^i$ , на которые они делят полосы  $B^i$ .

Легко видеть, что  $f_i$  непрерывна на каждом  $S_k^i$ . Также непрерывна по нашему предположению и функция

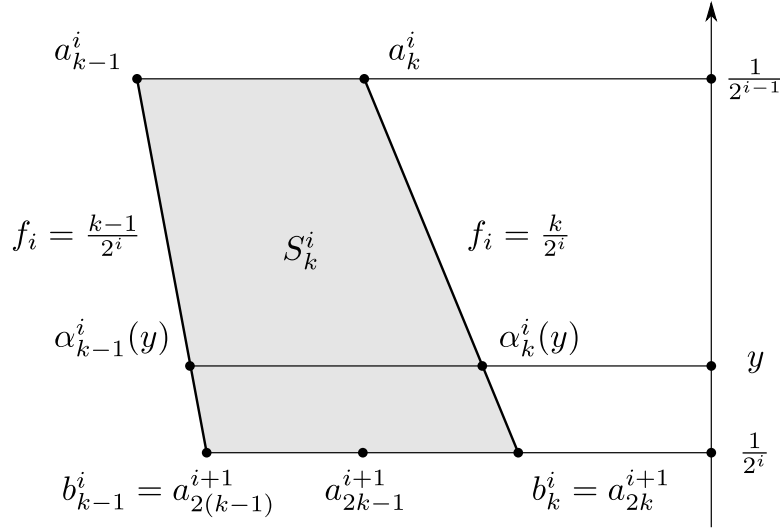
$$f_i|_{D^{i-1}} = f_{i-1}.$$

Так как множества  $D^{i-1}, S_k^i, k \in \{1, \dots, 2^i\}$ , образуют конечное замкнутое покрытие пространства  $D^i$ , то функция  $f_i$  непрерывна на  $D^i$ .

Ясно, что  $f_i|_{\partial M} = f_{i-1}|_{\partial M}$ , так как  $\partial M \subset D^{i-1}$ . Поэтому  $f_i|_{\partial M} = f_0$ .

По построению  $f_i$  монотонно возрастает от  $(k-1)/2^i$  до  $k/2^i$  на каждом из отрезков

$$[\alpha_{k-1}^i(y), \alpha_k^i(y)], \quad y \in [1/2^i, 1/2^{i-1}],$$

Рис. 2. Четырехугольник  $S_k^i$ .

см. (3.3). Объединяя это с нашими предыдущими предположениями относительно функции  $f_{i-1}$  заключаем, что функция  $f_i(\cdot, y) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  монотонно возрастает от 0 до 1 при каждом фиксированном  $y \in [1/2^i, 1]$ .

Для каждого  $k \in \{1, \dots, 2^i - 1\}$  существует единственное разложение  $k = (2m - 1)2^{i-s}$ . По построению

$$J_k^i \cap B^i = J_{2m-1}^s \cap B^i.$$

Следовательно,

$$J_{2m-1}^s \cap B^i \subset f_i^{-1}\left(\frac{k}{2^i}\right) = f_i^{-1}\left(\frac{2m-1}{2^s}\right),$$

$$s \in \{1, \dots, i\}, \quad m \in \{1, \dots, 2^{s-1}\}.$$

Из предыдущих предположений теперь видно, что

$$J_{2m-1}^s \cap D^i \subset f_i^{-1}\left(\frac{2m-1}{2^s}\right), \quad s \in \{1, \dots, i\}, \quad m \in \{1, \dots, 2^{s-1}\}.$$

В частности,  $f_i(\hat{a}_{2^{k-1}}^s) = g_0(\hat{a}_{2^{k-1}}^s)$ .

Повторим приведенное построение для каждого  $i \in \mathbb{N}$ . Получим набор непрерывных функций  $f_i : D^i \rightarrow \mathbb{R}$ , таких что  $f_i|_{D^s} = f_s$  при  $s < i$ .

Очевидно,  $M = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} D^i$ , поэтому определена функция

$$f : M \rightarrow \mathbb{R},$$

$$f(z) = f_i(z), \quad \text{если } z \in D^i.$$

Так как для каждого  $z$ , такого что  $p_2(z) > 0$ , существует  $s \in \mathbb{N}$ , для которого  $z \in \text{Int}D^s$  в пространстве  $M$ , то функция  $f$  непрерывна на множестве  $[0, 1] \times (0, 1]$ . Непрерывность  $f$  на нижнем основании квадрата мы проверим ниже.

Параллельно с функциями  $f_i$  мы построили набор точек  $a_{2^{k-1}}^i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ ,  $k \in \{1, \dots, 2^{i-1}\}$ , которые удовлетворяют условиям  $p_1(a_{2^{k-1}}^i) \in (0, 1)$ ,  $p_2(a_{2^{k-1}}^i) = 1/2^{i-1}$ . Также мы построили набор попарно непересекающихся отрезков

$$J_{2^{k-1}}^i = [a_{2^{k-1}}^i, \hat{a}_{2^{k-1}}^i],$$

таких что

$$J_{2^{k-1}}^i \subset f^{-1}\left(\frac{2k-1}{2^i}\right), \quad i \in \mathbb{N}, \quad k \in \{1, \dots, 2^{i-1}\}.$$

По построению для любого фиксированного  $y \in (0, 1]$  функция  $f(\cdot, y) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  монотонно возрастает от 0 до 1 на отрезке  $[0, 1]$ .

Фиксируем  $s \in \mathbb{N}$  и  $m \in \{1, \dots, 2^{s-1}\}$ . Рассмотрим отрезок  $J_{2^{m-1}}^s = [a_{2^{m-1}}^s, \hat{a}_{2^{m-1}}^s]$  и прямоугольники

$$R^s = [0, 1] \times \left[0, \frac{1}{2^{s-1}}\right], \quad R_0^s = [0, 1] \times \left(0, \frac{1}{2^{s-1}}\right).$$

Пусть  $\alpha_{2^{m-1}}^s(y)$  — точка пересечения отрезков  $J_{2^{m-1}}^s$  и  $[0, 1] \times \{y\}$ ,  $y \in [0, 1/2^{s-1}]$ .

Отрезок  $J_{2m-1}^s$  разбивает полосу  $R_0^s$  на две части

$$(3.4) \quad \begin{aligned} Q_{2m-1}^s(-) &= \{z \in R_0^s \mid p_1(z) < p_1(\alpha_{2m-1}^s(p_2(z)))\}, \\ Q_{2m-1}^s(+) &= \{z \in R_0^s \mid p_1(\alpha_{2m-1}^s(p_2(z))) < p_1(z)\}, \end{aligned}$$

лежащие левее и правее этого отрезка, соответственно. По построению

$$(3.5) \quad f(Q_{2m-1}^s(-)) \subset [0, \frac{2m-1}{2^s}) \quad f(Q_{2m-1}^s(+)) \subset (\frac{2m-1}{2^s}, 1].$$

Докажем, что  $f$  непрерывна во всех точках  $z \in [0, 1] \times \{0\}$ .

Пусть сначала  $z \in (0, 1) \times \{0\}$ . Тогда

$$f(z) = g_0(z) = \alpha \in (0, 1).$$

Фиксируем  $\varepsilon > 0$ . Так как числа  $(2k-1)/2^i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ ,  $k \in \{1, \dots, 2^{i-1}\}$ , все разные и при фиксированном  $i \in \mathbb{N}$  разбивают  $[0, 1]$  на отрезки длины  $1/2^i$ , то существуют  $s \in \mathbb{N}$  и  $m \in \{1, \dots, 2^{s-1}\}$ , для которых

$$\alpha - \varepsilon < \frac{2m-1}{2^s} < \alpha < \frac{2m+1}{2^s} < \alpha + \varepsilon.$$

Непересекающиеся отрезки  $J_{2m-1}^s$  и  $J_{2m+1}^s$  разбивают прямоугольник  $R^s$  на три части. Рассмотрим множество

$$T = \{z \in R^s \mid p_1(\alpha_{2m-1}^s(p_2(z))) < p_1(z) < p_1(\alpha_{2m+1}^s(p_2(z)))\}$$

точек  $R^s$ , лежащих между отрезками  $J_{2m-1}^s$  и  $J_{2m+1}^s$ . Оно представляет собой трапецию с вершинами  $a_{2m-1}^s$ ,  $a_{2m+1}^s$ ,  $\hat{a}_{2m+1}^s$ ,  $\hat{a}_{2m-1}^s$ .

По построению точка  $z$  лежит на нижнем основании этой трапеции, причем  $z \notin \{\hat{a}_{2m-1}^s, \hat{a}_{2m+1}^s\}$ . Следовательно найдется окрестность  $U$  точки  $z$  в пространстве  $M$ , лежащая в  $T$ .

Функция  $f|_{[0,1] \times \{0\}} = g_0$  монотонно неубывает, поэтому

$$f(U \cap ([0, 1] \times \{0\})) \subseteq [f(\hat{a}_{2m-1}^s), f(\hat{a}_{2m+1}^s)] = [\frac{2m-1}{2^s}, \frac{2m+1}{2^s}].$$

Объединяя это замечание и соотношения (3.4) и (3.5) заключаем, что

$$f(U) \subset f(T) = \left[\frac{2m-1}{2^s}, \frac{2m+1}{2^s}\right] \subset (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon).$$

Так как  $\varepsilon > 0$  может быть выбрано произвольно, то функция  $f$  непрерывна в точке  $z$ .

Если  $z$  — одна из точек  $\{(0, 0), (1, 0)\}$ , то непрерывность  $f$  в точке  $z$  доказывается аналогично, с очевидными изменениями.

Итак, функция  $f$  непрерывна на  $M$ .

Найдем теперь множество  $D(S, \partial M)$   $S$ -отделенных точек и его замыкание  $\overline{D(S, \partial M)}$ .

Легко видеть (см. (3.4)), что для каждого

$$x \in [0, r_{2m-1}^s] = [0, p_1(\hat{a}_{2m-1}^s))$$

существует открытая окрестность  $U(z)$  точки  $z = (x, 0)$  в  $M$ , такая что  $U(z) \cap \overset{\circ}{M} \subset Q_{2m-1}^s$ . Следовательно, для любого  $y \in U(z) \cap \overset{\circ}{M}$  выполнено неравенство

$$f(y) < (2m - 1)/2^s.$$

Таким образом, все точки полуинтервала

$$A_{2m-1}^s = [l_{2m-1}^s, r_{2m-1}^s) \times \{0\} = (I_{2m-1}^s \times \{0\}) \setminus \{\hat{a}_{2m-1}^s\}$$

являются  $S$ -отделенными, так как принадлежат по построению множеству уровня  $f^{-1}((2m - 1)/2^s)$ . Точка  $\hat{a}_{2m-1}^s$  не является  $S$ -отделенной, потому что для любой окрестности  $V$  этой точки

$$V \cap \overset{\circ}{M} \cap f^{-1}\left(\frac{2m-1}{2^s}\right) \supset V \cap \overset{\circ}{M} \cap J_{2m-1}^s \neq \emptyset.$$

Заметим еще, что все точки множества

$$\{1\} \times [0, 1] = f^{-1}(1)$$

также являются  $S$ -отделенными.

В работе [2] доказано следующее простое утверждение: если точка  $z \in \partial M$  является  $S$ -отделенной, то  $z$  является точкой локального максимума функции  $f|_{\partial M}$ . Из этого следует, что для нашего примера

$$D(S, \partial M) = (\{1\} \times [0, 1]) \cup \bigcup_{i \in \mathbb{N}, k \in \{1, \dots, 2^{i-1}\}} A_{2k-1}^i.$$

В то же время легко видеть, что

$$\overline{D(S, \partial M)} = ([0, 1] \times \{0\}) \cup (\{1\} \times [0, 1]).$$

Это множество связное и  $f|_{\overline{D(S, \partial M)}} \neq \text{Const}$ .

Для завершения построения примера нам остается проверить, что  $f$  является  $F$ -функцией.

Непрерывность  $f$  мы уже доказали.

Проверим, что  $f$  открыта на  $\overset{\circ}{M} = (0, 1) \times (0, 1)$ .

Пусть  $z = (x, y) \in \overset{\circ}{M}$ . По построению функция

$$f(\cdot, y) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

строго монотонна, поэтому для любого достаточно малого  $\varepsilon > 0$  справедливы неравенства

$$f(x - \varepsilon, y) < f(z) < f(x + \varepsilon, y)$$

и образ множества

$$I_\varepsilon(z) = \{w \in M \mid x - \varepsilon < p_1(w) < x + \varepsilon, p_2(w) = y\}$$

содержится в интервале  $(f(x - \varepsilon, y), f(x + \varepsilon, y)) \ni f(z)$ . Так как функция  $f$  непрерывна, то она принимает на интервале  $I_\varepsilon(z)$  все промежуточные значения и

$$f(I_\varepsilon(z)) = (f(x - \varepsilon, y), f(x + \varepsilon, y)).$$

Ясно, что для каждой окрестности  $U$  точки  $z$  найдется  $\varepsilon > 0$ , такое что  $I_\varepsilon(z) \subset U$ . Поэтому  $f(U)$  содержит вместе

с точкой  $f(z)$  и ее открытую окрестность

$$(f(x - \varepsilon, y), f(x + \varepsilon, y)).$$

Таким образом, отображение  $f$  открыто в точке  $z \in \overset{\circ}{M}$ . Из произвола в выборе  $z$  заключаем, что  $f$  открыто на  $\overset{\circ}{M}$ .

Докажем теперь локальную связность множеств уровня  $f$  в точках множества  $\overset{\circ}{M}$ .

Пусть  $z = (x, y) \in \overset{\circ}{M}$ . Тогда существует  $i \in \mathbb{N}$ , такое что

$$z \in (0, 1) \times (\frac{1}{2^i}, 1) \subset \bigcup_{s=1}^i B^s.$$

По построению для каждого  $s \in \mathbb{N}$  множество

$$M^z \cap B^s = f^{-1}(f(z)) \cap B^s$$

представляет собой прямолинейный отрезок, такой что

$$p_2(M^z \cap B^s) = [1/2^s, 1/2^{s-1}].$$

Поэтому множество

$$M^z \cap \left( \bigcup_{s=1}^i B^s \right)$$

является конечной ломанной линией и локально-связно. А так как  $(0, 1) \times (1/2^i, 1)$  — открытое подмножество  $\bigcup_{s=1}^i B^s$  в пространстве  $M$ , то  $M^z$  локально-связно в каждой точке множества  $(0, 1) \times (1/2^i, 1)$ . В частности, и в точке  $z$ .

Из произвола в выборе  $z \in \overset{\circ}{M}$  следует, что каждое множество уровня функции  $f$  локально-связно в точках  $\overset{\circ}{M}$ .

Таким образом, функция  $f$  является  $F$ -функцией.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Fox W. C.* The critical points of Peano-interior functions defined on 2-manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. — 1956. — V. 83. — P. 338–370.
- [2] *Fox W. C.* Sufficient conditions that a Peano-interior function have an extension with constant boundary values // Trans. Amer. Math. Soc. — 1959. — V. 90. — P. 255–271.
- [3] *Рохлин В. А., Фукс Д. Б.* Начальный курс топологии. Геометрические главы — М.: Наука. — 1977. — 488 С.

Полулях Е. А.  
Институт математики НАНУ  
polulyah@imath.kiev.ua



UDC 539.12

## Stringy Approach to the Minimal Supersymmetric Standard Model

*Yu.M. Malyuta, T.V. Obikhod*

Superstring theory is applied to construct the Minimal Supersymmetric Standard Model. The mass spectrum, partial widths and production cross sections of superpartners are calculated. This approach gives concrete predictions for superpartner searches at the LHC.

### 1. INTRODUCTION

The purpose of the present work is to construct the Minimal Supersymmetric Standard Model [1] from superstring theory [2]. This aim is achieved by using the notion of derived category [3]. Such approach allows to determine the mass spectrum, partial widths and production cross sections of superpartners.

These predictions are important from experimental point of view as they are connected with searches for new physics at the LHC.

### 2. DERIVED CATEGORY

Derived categories are the mathematical foundation of superstring theory. We consider the derived category over the abelian category of McKay quivers. Objects of this category are McKay quivers [3]. (numbers  $a, b, c$  denote orbifold charges [4]), morphisms of this category are  $\text{Ext}^i$  groups [4].

$$\begin{array}{c} b \\ \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ \circ \quad \quad \quad \circ \\ \leftarrow \quad \rightarrow \\ \circ \quad \quad \quad \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ a \quad \quad \quad c \end{array} \quad \text{Ext}^i \left( \begin{array}{c} b \\ \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ \circ \quad \quad \quad \circ \\ \leftarrow \quad \rightarrow \\ \circ \quad \quad \quad \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ a \quad \quad \quad c \end{array} , \begin{array}{c} b' \\ \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ \circ \quad \quad \quad \circ \\ \leftarrow \quad \rightarrow \\ \circ \quad \quad \quad \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ a' \quad \quad \quad c' \end{array} \right)$$

In this approach D-branes are described by quivers, and superstrings are described by  $\text{Ext}^i$  groups. The interaction between D-branes mediated by the superstring is described by the following diagram

$$\begin{array}{c} b \\ \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ \circ \quad \quad \quad \circ \\ \leftarrow \quad \rightarrow \\ \circ \quad \quad \quad \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ a \quad \quad \quad c \\ \downarrow \text{Ext}^i(Q, Q') \\ b' \\ \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ \circ \quad \quad \quad \circ \\ \leftarrow \quad \rightarrow \\ \circ \quad \quad \quad \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ a' \quad \quad \quad c' \end{array}$$

### 3. PARTICLE CONTENT

It was shown in [5] that the moduli space of the superstring has the form

$$\begin{aligned} \text{Ext}^0(Q, Q') &= \mathbb{C}^{aa' + bb' + cc'} \\ \text{Ext}^1(Q, Q') &= \mathbb{C}^{3ab' + 3bc' + 3ca'} \end{aligned} \quad (1)$$

Substituting in (1) orbifold charges

$$a = b = c = a' = b' = c' = 4$$

and using the Langlands hypothesis [6], we obtain the realization of (1) in terms of  $SU(5)$  multiplets

$$3 \times (24 + 5_H + \bar{5}_H + 5_M + \bar{5}_M + 10_M + \bar{10}_M) .$$

This result determines the particle content of the MSSM.

#### 4. SUPERPOTENTIAL

The gauge invariant MSSM superpotential takes the form

$$W_{SU(5)} = \lambda_{ij}^d \cdot \bar{5}_H \times \bar{5}_M^{(i)} \times 10_M^{(j)} + \lambda_{ij}^u \cdot 5_H \times 10_M^{(i)} \times 10_M^{(j)} + \mu \cdot 5_H \times \bar{5}_H, \quad (2)$$

where  $5_H$  and  $\bar{5}_H$  are Higgs multiplets,  $\bar{5}_M^{(i)}$  and  $10_M^{(j)}$  are multiplets of quark and lepton superpartners,  $\lambda_{ij}^d$ ,  $\lambda_{ij}^u$  are Yukawa coupling constants and  $\mu$  is the Higgs mixing parameter.

#### 5. MASS SPECTRUM

The analysis of Yukawa coupling constants, based on observational hints and theoretical considerations, allows to restrict the parameter space in (2) to five free parameters [7]:

$$M_0 = 0.01 \text{ GeV}, \quad M_{1/2} = 600 \text{ GeV}, \quad A_0 = 0, \quad \tan\beta = 35, \quad \text{sgn}(\mu) = +1. \quad (3)$$

Using this restricted parameter set it is possible to calculate the mass spectrum of superpartners by application of the computer program SOFTSUSY [8]. This MSSM spectrum is shown in Table 1.

Table 1

	GeV		GeV		GeV
$\tilde{u}_R$	1187			$\tilde{g}$	1354
$\tilde{u}_L$	1232	$\tilde{\nu}_e$	391	$\tilde{\chi}_1^0$	249
$\tilde{d}_R$	1182	$\tilde{e}_R$	224	$\tilde{\chi}_2^0$	471
$\tilde{d}_L$	1235	$\tilde{e}_L$	398	$\tilde{\chi}_3^0$	727
$\tilde{c}_R$	1187			$\tilde{\chi}_4^0$	738
$\tilde{c}_L$	1232	$\tilde{\nu}_\mu$	391	$\tilde{\chi}_1^\pm$	470
$\tilde{s}_R$	1182	$\tilde{\mu}_R$	224	$\tilde{\chi}_2^\pm$	738

$\tilde{s}_L$	1235	$\tilde{\mu}_L$	398		
$\tilde{t}_1$	958			$h^0$	116
$\tilde{t}_2$	1155	$\tilde{\nu}_\tau$	379	$A^0$	671
$\tilde{b}_1$	1095	$\tilde{\tau}_1$	127	$H^0$	671
$\tilde{b}_2$	1148	$\tilde{\tau}_2$	408	$H^\pm$	676

## 6. PARTIAL WIDTHS

Using the parameter set (3) it is possible to calculate partial widths of superpartners by application of the computer program SDECAY [9]. These partial widths are shown in Tables 2, 3, 4, 5.

Table 2

	channel	BR	channel	BR
$\tilde{\nu}_e$	$\tilde{\chi}_1^0 \nu_e$	1.000		
$\tilde{e}_L$	$\tilde{\chi}_1^0 e$	1.000		
$\tilde{\nu}_\mu$	$\tilde{\chi}_1^0 \nu_\mu$	1.000		
$\tilde{\mu}_L$	$\tilde{\chi}_1^0 \mu$	1.000		
$\tilde{\nu}_\tau$	$\tilde{\chi}_1^0 \nu_\tau$	0.072	$\tilde{\tau}_1 W^+$	0.928
$\tilde{\tau}_2$	$\tilde{\chi}_1^0 \tau$	0.107	$\tilde{\tau}_1 Z$	0.527
	$\tilde{\tau}_1 h^0$	0.365		
$\tilde{u}_R$	$\tilde{\chi}_1^0 u$	0.997	$\tilde{\chi}_4^0 u$	0.002
$\tilde{u}_L$	$\tilde{\chi}_1^0 u$	0.013	$\tilde{\chi}_1^+ d$	0.646
	$\tilde{\chi}_2^0 u$	0.320	$\tilde{\chi}_2^+ d$	0.012
	$\tilde{\chi}_4^0 u$	0.008		
$\tilde{d}_R$	$\tilde{\chi}_1^0 d$	0.997	$\tilde{\chi}_4^0 d$	0.002
$\tilde{d}_L$	$\tilde{\chi}_1^0 d$	0.016	$\tilde{\chi}_1^- u$	0.628
	$\tilde{\chi}_2^0 d$	0.317	$\tilde{\chi}_2^- u$	0.027
	$\tilde{\chi}_4^0 d$	0.011		
$\tilde{c}_R$	$\tilde{\chi}_1^0 c$	0.997	$\tilde{\chi}_4^0 c$	0.002
$\tilde{c}_L$	$\tilde{\chi}_1^0 c$	0.013	$\tilde{\chi}_1^+ s$	0.646
	$\tilde{\chi}_2^0 c$	0.320	$\tilde{\chi}_2^0 s$	0.012
	$\tilde{\chi}_4^0 c$	0.008		
$\tilde{s}_R$	$\tilde{\chi}_1^0 s$	0.997	$\tilde{\chi}_4^0 s$	0.002

$\tilde{s}_L$	$\tilde{\chi}_1^0 s$	0.016	$\tilde{\chi}_1^- c$	0.628
	$\tilde{\chi}_2^0 s$	0.317	$\tilde{\chi}_2^- c$	0.027
	$\tilde{\chi}_4^0 s$	0.011		
$\tilde{t}_1$	$\tilde{\chi}_1^0 t$	0.216	$\tilde{\chi}_4^0 t$	0.032
	$\tilde{\chi}_2^0 t$	0.105	$\tilde{\chi}_1^+ b$	0.249
	$\tilde{\chi}_3^0 t$	0.171	$\tilde{\chi}_2^+ b$	0.227

Table 3

	channel	BR	channel	BR
$\tilde{t}_2$	$\tilde{\chi}_1^0 t$	0.025	$\tilde{\chi}_1^+ b$	0.247
	$\tilde{\chi}_2^0 t$	0.111	$\tilde{\chi}_2^+ b$	0.165
	$\tilde{\chi}_3^0 t$	0.114	$\tilde{t}_1 h^0$	0.045
	$\tilde{\chi}_4^0 t$	0.213	$\tilde{t}_1 Z$	0.080
$\tilde{b}_1$	$\tilde{\chi}_1^0 b$	0.055	$\tilde{\chi}_1^- t$	0.390
	$\tilde{\chi}_2^0 b$	0.220	$\tilde{\chi}_2^- t$	0.183
	$\tilde{\chi}_3^0 b$	0.063	$\tilde{t}_1 W^-$	0.047
	$\tilde{\chi}_4^0 b$	0.041		
$\tilde{b}_2$	$\tilde{\chi}_1^0 b$	0.023	$\tilde{\chi}_1^- t$	0.161
	$\tilde{\chi}_2^0 b$	0.091	$\tilde{\chi}_2^- t$	0.425
	$\tilde{\chi}_3^0 b$	0.079	$\tilde{t}_1 W^-$	0.125
	$\tilde{\chi}_4^0 b$	0.095		
$\tilde{g}$	$\tilde{d}_L d^*$	0.019	$\tilde{c}_L c^*$	0.020
	$\tilde{d}_L^* d$	0.019	$\tilde{c}_L^* c$	0.020
	$\tilde{d}_R d^*$	0.038	$\tilde{c}_R c^*$	0.036
	$\tilde{d}_R^* d$	0.038	$\tilde{c}_R^* c$	0.036
	$\tilde{u}_L u^*$	0.020	$\tilde{b}_1 b^*$	0.078
	$\tilde{u}_L^* u$	0.020	$\tilde{b}_1^* b$	0.078
	$\tilde{u}_R u^*$	0.036	$\tilde{b}_2 b^*$	0.054
	$\tilde{u}_R^* u$	0.036	$\tilde{b}_2^* b$	0.054
	$\tilde{s}_L s^*$	0.019	$\tilde{t}_1 t^*$	0.097
	$\tilde{s}_L^* s$	0.019	$\tilde{t}_1^* t$	0.097
	$\tilde{s}_R s^*$	0.038	$\tilde{t}_2 t^*$	0.043
	$\tilde{s}_R^* s$	0.038	$\tilde{t}_2^* t$	0.043

Table 4

	channel	BR	channel	BR
$A^0$	$bb^*$	0.858	$\tilde{\tau}_1^- \tilde{\tau}_2^+$	0.004
	$\tau^+ \tau^-$	0.130	$\tilde{\tau}_1^+ \tilde{\tau}_2^-$	0.004
	$tt^*$	0.002		
$H^0$	$bb^*$	0.859	$\tilde{\tau}_1^- \tilde{\tau}_1^+$	0.003
	$\tau^+ \tau^-$	0.130	$\tilde{\tau}_1^- \tilde{\tau}_2^+$	0.002
	$tt^*$	0.002	$\tilde{\tau}_1^+ \tilde{\tau}_2^-$	0.002
$H^+$	$cb^*$	0.001	$tb^*$	0.818
	$\tau^+ \nu_\tau$	0.169	$\tilde{\tau}_1^+ \tilde{\nu}_\tau$	0.010
$\tilde{\chi}_1^0$	$\tilde{e}_R^- e^+$	0.032	$\tilde{\mu}_R^+ \mu^-$	0.032
	$\tilde{e}_R^+ e^-$	0.032	$\tilde{\tau}_1^- \tau^+$	0.436
	$\tilde{\mu}_R^- \mu^+$	0.032	$\tilde{\tau}_1^+ \tau^-$	0.436
$\tilde{\chi}_2^0$	$\tilde{\chi}_1^0 Z$	0.001	$\tilde{\tau}_2^- \tau^+$	0.037
	$\tilde{\chi}_1^0 h^0$	0.010	$\tilde{\tau}_2^+ \tau^-$	0.037
	$\tilde{e}_L^- e^+$	0.056	$\tilde{\nu}_e \nu_e^*$	0.064
	$\tilde{e}_L^+ e^-$	0.056	$\tilde{\nu}_e^* \nu_e$	0.064
	$\tilde{\mu}_L^- \mu^+$	0.056	$\tilde{\nu}_\mu \nu_\mu^*$	0.064
	$\tilde{\mu}_L^+ \mu^-$	0.056	$\tilde{\nu}_\mu^* \nu_\mu$	0.064
	$\tilde{\tau}_1^- \tau^+$	0.135	$\tilde{\nu}_\tau \nu_\tau^*$	0.081
	$\tilde{\tau}_1^+ \tau^-$	0.135	$\tilde{\nu}_\tau^* \nu_\tau$	0.081
$\tilde{\chi}_3^0$	$\tilde{\chi}_1^0 Z$	0.080	$\tilde{\chi}_2^0 h^0$	0.007
	$\tilde{\chi}_2^0 Z$	0.193	$\tilde{\tau}_1^- \tau^+$	0.088
	$\tilde{\chi}_1^+ W^-$	0.211	$\tilde{\tau}_1^+ \tau^-$	0.088
	$\tilde{\chi}_1^- W^+$	0.211	$\tilde{\tau}_2^- \tau^+$	0.051
	$\tilde{\chi}_1^0 h^0$	0.016	$\tilde{\tau}_2^+ \tau^-$	0.051

Table 5

	channel	BR	channel	BR
$\tilde{\chi}_4^0$	$\tilde{\chi}_1^0 Z$	0.016	$\tilde{\mu}_R^- \mu^+$	0.001
	$\tilde{\chi}_2^0 Z$	0.009	$\tilde{\mu}_R^+ \mu^-$	0.001
	$\tilde{\chi}_1^+ W^-$	0.208	$\tilde{\tau}_1^- \tau^+$	0.061
	$\tilde{\chi}_1^- W^+$	0.208	$\tilde{\tau}_1^+ \tau^-$	0.061
	$\tilde{\chi}_1^0 h^0$	0.069	$\tilde{\tau}_2^- \tau^+$	0.058
	$\tilde{\chi}_2^0 h^0$	0.171	$\tilde{\tau}_2^+ \tau^-$	0.058

	$\tilde{e}_L^- e^+$	0.005	$\tilde{\nu}_e \nu_e^*$	0.009
	$\tilde{e}_L^+ e^-$	0.005	$\tilde{\nu}_e^* \nu_e$	0.009
	$\tilde{e}_R^- e^+$	0.001	$\tilde{\nu}_\mu \nu_\mu^*$	0.009
	$\tilde{e}_R^+ e^-$	0.001	$\tilde{\nu}_\mu^* \nu_\mu$	0.009
	$\tilde{\mu}_L^- \mu^+$	0.005	$\tilde{\nu}_\tau \nu_\tau^*$	0.010
	$\tilde{\mu}_L^+ \mu^-$	0.005	$\tilde{\nu}_\tau^* \nu_\tau$	0.010
$\tilde{\chi}_1^+$	$\tilde{\nu}_e e^+$	0.135	$\tilde{\mu}_L^+ \nu_\mu$	0.108
	$\tilde{\nu}_\mu \mu^+$	0.135	$\tilde{\tau}_1^+ \nu_\tau$	0.261
	$\tilde{\nu}_\tau \tau^+$	0.176	$\tilde{\tau}_2^+ \nu_\tau$	0.067
	$\tilde{e}_L^+ \nu_e$	0.108	$\tilde{\chi}_1^0 W^+$	0.010
$\tilde{\chi}_2^+$	$\tilde{\nu}_e e^+$	0.009	$\tilde{\tau}_2^+ \nu_\tau$	0.051
	$\tilde{\nu}_\mu \mu^+$	0.009	$\tilde{\chi}_1^+ Z$	0.206
	$\tilde{\nu}_\tau \tau^+$	0.105	$\tilde{\chi}_1^0 W^+$	0.079
	$\tilde{e}_L^+ \nu_e$	0.020	$\tilde{\chi}_2^0 W^+$	0.214
	$\tilde{\mu}_L^+ \nu_\mu$	0.020	$\tilde{\chi}_1^+ h^0$	0.183
	$\tilde{\tau}_1^+ \nu_\tau$	0.104		

## 7. CROSS SECTIONS

Using the parameter set (3) it is possible to calculate production cross sections of superpartners by application of the computer program PYTHIA [10]. These cross sections at center-of-mass energy  $\sqrt{s} = 14$  TeV are shown in Table 6.

Table 6

channel	cross section
$gg \rightarrow \tilde{g}\tilde{g}$	$\sigma_{\tilde{g}\tilde{g}} = 0.307$ pb
$gu \rightarrow \tilde{g}\tilde{u}$	$\sigma_{\tilde{g}\tilde{u}} = 0.891$ pb
$du \rightarrow \tilde{d}\tilde{u}$	$\sigma_{\tilde{d}\tilde{u}} = 0.466$ pb
$\bar{u}u \rightarrow \tilde{\chi}_1^+ \tilde{\chi}_1^-$	$\sigma_{\tilde{\chi}_1^+ \tilde{\chi}_1^-} = 0.157$ pb
$\bar{d}u \rightarrow \tilde{\chi}_1^+ \tilde{\chi}_2^0$	$\sigma_{\tilde{\chi}_1^+ \tilde{\chi}_2^0} = 0.208$ pb

## 8. COMPARISON WITH EXPERIMENTS

Comparison of the predicted MSSM spectrum with experimental data obtained at the LEP and TEVATRON [11] (see

Table 7) shows, that the calculated masses exceed the lower limits on masses reached at colliders.

New searches for superpartners will be made at the LHC

particle	Condition	Lower limit (GeV/c <sup>2</sup> )	Source
$\tilde{\chi}_1^\pm$	gaugino $M_{\tilde{\nu}} > 200 \text{ GeV}/c^2$	103	LEP 2
	$M_{\tilde{\nu}} > M_{\tilde{\chi}_2^\pm}$	85	LEP 2
	any $M_{\tilde{\nu}}$	45	Z width
	Higgsino $M_2 < 1 \text{ TeV}/c^2$	99	LEP 2
	GMSB	150	DØ isolated photons
	RPV $LL\bar{E}$ worst case	87	LEP 2
	$LQ\bar{D}$ $m_0 > 500 \text{ GeV}/c^2$	88	LEP 2
$\tilde{\chi}_1^0$	indirect any $\tan\beta$ , $M_{\tilde{\nu}} > 500 \text{ GeV}/c^2$	39	LEP 2
	any $\tan\beta$ , any $m_0$	36	LEP 2
	any $\tan\beta$ , any $m_0$ , SUGRA Higgs	59	LEP 2 combined
	GMSB	93	LEP 2 combined
	RPV $LL\bar{E}$ worst case	23	LEP 2
$\tilde{e}_R$	$e\tilde{\chi}_1^0$ $\Delta M > 10 \text{ GeV}/c^2$	99	LEP 2 combined
$\tilde{\mu}_R$	$\mu\tilde{\chi}_1^0$ $\Delta M > 10 \text{ GeV}/c^2$	95	LEP 2 combined
$\tilde{\tau}_R$	$\tau\tilde{\chi}_1^0$ $M_{\tilde{\chi}_1^0} < 20 \text{ GeV}/c^2$	80	LEP 2 combined
$\tilde{\nu}$		43	Z width
$\tilde{\mu}_R, \tilde{\tau}_R$	stable	86	LEP 2 combined
$\tilde{t}_1$	$c\tilde{\chi}_1^0$ any $\theta_{\text{mix}}$ , $\Delta M > 10 \text{ GeV}/c^2$	95	LEP 2 combined
	any $\theta_{\text{mix}}$ , $M_{\tilde{\chi}_1^0} \sim \frac{1}{2}M_{\tilde{t}}$	115	CDF
	any $\theta_{\text{mix}}$ and any $\Delta M$	59	ALEPH
	$b\tilde{t}$ any $\theta_{\text{mix}}$ , $\Delta M > 7 \text{ GeV}/c^2$	96	LEP 2 combined
$\tilde{g}$	any $M_{\tilde{q}}$	195	CDF jets+ $\cancel{E}_T$
$\tilde{q}$	$M_{\tilde{q}} = M_{\tilde{g}}$	300	CDF jets+ $\cancel{E}_T$

## REFERENCES

- [1] Haber H. E. *Introductory low-energy supersymmetry* // arXiv:hep-ph/9306207.
- [2] Vafa C. et al. *Stringy reflections on LHC* // <http://www.claymath.org/workshops/lhc>.
- [3] Aspinwall P.S. *D-branes on Calabi-Yau manifolds* // arXiv:hep-th/0403166.
- [4] Douglas M. R., Fiol B., Römelsberger C. *The spectrum of BPS branes on a noncompact Calabi-Yau* // arXiv:hep-th/0003263.



- 
- [5] Katz S., Pantev T., Sharpe E. *D-branes, orbifolds, and Ext groups* // arXiv:hep-th/0212218.
  - [6] Schmid W. *Homogeneous complex manifolds and representations of semisimple Lie groups* // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. — 1968. — V. 69. — P. 56–59.
  - [7] Heckman J. J., Vafa C. *F-theory, GUTs, and the weak scale* // arXiv:hep-th/0809.1098.
  - [8] Allanach B. C. *SOFTSUSY2.0: a program for calculating supersymmetric spectra* // Comput. Phys. Commun. — 2002. — V. 143. — P. 305–331.
  - [9] Muhlleitner M., Djouadi A., Mambrini Y. *SDECAY: a fortran code for the decays of the supersymmetric particles in the MSSM* // Comput. Phys. Commun. — 2005. — V. 168. — P. 46–70.
  - [10] Sjöstrand T., Mrenna S., Skands P. *PYTHIA 6.4 Physics and Manual* // JHEP. — 2006. — V. 5. — P. 1–26.
  - [11] M. Schmitt *Supersymmetry, Part II (Experiment)* // Phys. Lett. — 2004. — V. B592. — P. 1014–1023.

Yu.M. Malyuta, T.V. Obikhod  
Institute for Nuclear Research, NAS of Ukraine, Kyiv  
obikhod@kinr.kiev.ua

## $S^1$ -функції Ботта и несингулярные потoki Морса-Смейла на многообразиях

*В. В. Шарко*

Вивчаються  $S^1$ -функції Морса-Ботта на гладких многовидах. Використовуючи  $S^1$ -функції Морса-Ботта, як функції Ляпунова для несингулярних потоків Морса-Смейла на многовидах знайдено критерії відсутності у них закручених замкнених орбіт.

Investigate  $S^1$ -Morse-Bott functions on smooth manifolds. Using  $S^1$ -Morse-Bott functions as Lyapunov functions for non-singular Morse-Smale flows on manifolds were found criteria absence they of twisted closed orbits.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Обозначим через  $\mathfrak{X}^r(M^n)$  пространство  $C^r$ -векторных полей на гладком замкнутом многообразии  $M^n$ . Пространство  $\mathfrak{X}^r(M^n)$  содержит открытое множество, состоящее из векторных полей Морса-Смейла. Как известно, инвариантные множества потоков, порожденных векторными полями Морса-Смейла, состоят из гиперболических точек и замкнутых орбит. Окрестности замкнутых орбит бывают двух типов: закрученными и незакрученными (см. определения в разделе 4).

В этой работе мы рассматриваем вопрос, **когда у несингулярного векторного поля Морса-Смейла все замкнутые орбиты являются незакрученными.**

Для этого исследуются, так называемые,  $S^1$ -функцией Ботта на многообразии  $M^n$ , т.е. функции, у которых критические точки образуют невырожденные окружности.

Рассмотрение таких функций обусловлено тем обстоятельством, что для любого несингулярного векторного поля Морса-Смейла всегда существует функция Ляпунова, которая является  $S^1$ -функцией Ботта.

С  $S^1$ -функциями Ботта на многообразии  $M^n$  тесно связан более гибкий объект — разложение многообразия  $M^n$  на круглые ручки. В свою очередь, для исследования разложения многообразия  $M^n$  на круглые ручки используется диаграмма, т.е. некоторый граф, который несет информацию о круглых ручках.

Предложение 4.2 дает локальный критерий, когда все орбиты несингулярного векторного поля Морса-Смейла на произвольном замкнутом многообразии будут незакрученными.

В предложении 4.3 приведен другой критерий отсутствия у векторного поля Морса-Смейла на замкнутом односвязном многообразии  $M^n$  незакрученных орбит ( $n > 5$ ).

## 2. $S^1$ -ФУНКЦИИ БОТТА

Пусть  $M^n$  — гладкое многообразие,  $f : M^n \rightarrow [0, 1]$  — гладкая функция и  $x \in M^n$  — ее критическая точка. Рассмотрим гессиан  $\Gamma_x(f) : T_x \times T_x \rightarrow \mathbf{R}$  в этой точке. Напомним, что индексом гессиана называется максимальная размерность подпространства  $T_x$  на котором  $\Gamma_x(f)$  отрицательно определен. Индекс  $\Gamma_x(f)$  называется индексом критической точки  $x$ , а коранг  $\Gamma_x(f)$  — её корангом. Предположим, что множество критических точек функции  $f$  образует несвязное объединение гладких подмногообразий  $K_j^i$  размерностей не превышающей  $n-1$ . Связное критическое подмногообразие  $K_{j_0}^{i_0}$  называется **невырожденным**,

если гессиан невырожден на подпространствах нормальным к  $K_{j_0}^{i_0}$  (т.е. имеет коранг равный  $n - i_0$ ) в каждой точке  $x \in K_{j_0}^{i_0}$ .

**Определение 1.** Функция  $f : M^n \rightarrow [0, 1]$  называется функцией Ботта, если все ее критические точки образуют невырожденные критические гладкие подмногообразия непересекающиеся с краем  $M^n$ .

Рассмотрим один важный случай функций Ботта.

**Определение 2.** Функция  $f : M^n \rightarrow [0, 1]$  называется  $S^1$ -функцией Ботта, если все ее критические точки образуют невырожденные критические окружности.

Заметим, что  $S^1$ -функции Ботта существуют не на всяком гладком многообразии [12].  $S^1$ -функции Ботта изучали и использовали многие авторы [1-7, 9, 11, 14]. Следующую теорему можно найти в [8, 11].

**Теорема 1.** Пусть  $M^n$  — гладкое замкнутое многообразие,  $f : M^n \rightarrow [0, 1]$  —  $S^1$ -функция Ботта и  $\gamma \subset M^n$  — ее критическая окружность. Существует система координат в окрестности  $\gamma$  одного из двух типов:

1) тривиальная  $\nu : S^1 \times D^{n-1}(\varepsilon) \rightarrow M^n$ , где  $D^{n-1}(\varepsilon)$  — диск радиуса  $\varepsilon$ ,  $\nu(S^1 \times 0) = \gamma$  и

$$f(\nu(\theta, x)) = -x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_{n-1}^2,$$

для  $(\theta, x) \in S^1 \times D^{n-1}(\varepsilon)$ ,

2) скрученная  $\tau : ([0, 1] \times D^{n-1}(\varepsilon) / \sim) \rightarrow M^n$ , где  $\tau$  — гладкое вложение, такое, что  $(\tau([0, 1]) \times 0 / \sim) = \gamma$  и

$$f(\tau(t, x)) = -x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_{n-1}^2,$$

для  $(t, x) \in (\tau : [0, 1] \times D^{n-1}(\varepsilon) / \sim)$ . Здесь пространство  $[0, 1] \times D^{n-1}(\varepsilon) / \sim$  диффеоморфно  $S^1 \times D^{n-1}(\varepsilon)$  с помощью

отождествления  $0 \times D^{n-1}(\varepsilon)$  и  $1 \times D^{n-1}(\varepsilon)$  посредством отображения

$$(0, x_1, \dots, x_\lambda, x_{\lambda+1}, \dots, x_{n-1}) \leftrightarrow (1, -x_1, \dots, x_\lambda, -x_{\lambda+1}, \dots, x_{n-1}).$$

Число  $\lambda$  называется **индексом** критической окрестности  $\gamma$ .

Пусть  $M^n$  — гладкое многообразие и  $f : M^n \rightarrow [0, n]$  —  $S^1$ -функция Ботта. Говорят, что  $f$  — **правильная**  $S^1$ -функция Ботта, если подмногообразие  $M_i(f) = f^{-1}[0, i + \frac{1}{2}]$  содержит все замкнутые орбиты индексов  $\lambda \leq i$ . Каждая правильная  $S^1$ -функция Ботта определяет фильтрацию многообразия  $M^n$

$$M_0(f) \subset M_1(f) \subset \dots \subset M_{n-1}(f) \subset M^n.$$

Известно, [11], что существование на многообразии правильных  $S^1$ -функций Ботта эквивалентно разложению этого многообразия на круглые ручки. Напомним необходимые определения.

**Определение 3.**  $n$ -мерной круглой ручкой  $R_\lambda$  индекса  $\lambda$  называется

$$R_\lambda = S^1 \times D^\lambda \times D^{n-\lambda-1},$$

где  $D^i$  — диск размерности  $i$ .

Скрученной (*twisted*)  $n$ -мерной круглой ручкой  $TR_\lambda$  индекса  $\lambda$  ( $0 < \lambda < n - 1$ ) называется фактор-пространство

$$TR_\lambda = [0, 1] \times D^\lambda \times D^{n-\lambda-1} / \sim,$$

где отождествление задается посредством отображения:

$$(0, x_1, \dots, x_\lambda, x_{\lambda+1}, \dots, x_{n-1}) \leftrightarrow (1, -x_1, \dots, x_\lambda, -x_{\lambda+1}, \dots, x_{n-1}).$$

По-видимому, Терстон, [15], первым отметил, что существование на многообразии  $S^1$ -функций Ботта эквивалентно разложению этого многообразия на круглые ручки. Опишем этот факт подробнее.

**Определение 4.** Говорят, что многообразие  $M_\lambda^n$  получено из гладкого многообразия  $M^n$  с помощью приклейки круглой ручки индекса  $\lambda$ , если

$$M_\lambda^n = M^n \bigcup_{\varphi} S^1 \times D^\lambda \times D^{n-\lambda-1},$$

где  $\varphi : S^1 \times \partial D^\lambda \times D^{n-\lambda-1} \longrightarrow \partial M^n$  — гладкое вложение.

Многообразие  $M_\lambda^n$  получено из гладкого многообразия  $M^n$  с помощью приклеивания скрученной круглой ручки индекса  $\lambda$ , если

$$M_\lambda^n = M^n \bigcup_{\varphi} [0, 1] \times D^\lambda \times D^{n-\lambda-1} / \sim,$$

где  $\varphi : [0, 1] \times \partial D^\lambda \times D^{n-\lambda-1} / \sim \longrightarrow \partial M^n$  — гладкое вложение.

**Определение 5.** Разложением гладкого многообразия  $M^n$  на круглые ручки называется фильтрация

$$\partial M^n \times [0, 1] = M_0^n(R) \subset M_1^n(R) \subset \dots \subset M_{n-1}^n(R) = M^n,$$

где многообразие  $M_i^n(R)$  получено из многообразия  $M_{i-1}^n(R)$  с помощью приклеивания круглых и скрученных круглых ручек индекса  $i$ . В случае, когда  $M^n$  — замкнутое многообразие фильтрация начинается с круглых ручек индекса 0.

Напомним связь между  $S^1$ -функциями Ботта и разложением на круглые ручки, [11].

**Теорема 2.** Пусть  $M^n$  — гладкое замкнутое многообразие. Следующие два условия эквивалентны:

1) тривиальная  $\nu : S^1 \times D^{n-1}(\varepsilon) \rightarrow M^n$ , где  $D^{n-1}(\varepsilon)$  — диск радиуса  $\varepsilon$ ,  $\nu(S^1 \times 0) = \gamma$  и

$$f(\nu(\theta, x)) = -x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_{n-1}^2,$$

для  $(\theta, x) \in S^1 \times D^{n-1}(\varepsilon)$ ,

2) скрученная  $\tau : ([0, 1] \times D^{n-1}(\varepsilon) / \sim) \rightarrow M^n$ , где  $\tau$  — гладкое вложение, такое, что  $(\tau([0, 1]) \times 0 / \sim) = \gamma$  и

$$f(\tau(t, x)) = -x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_{n-1}^2,$$

для  $(t, x) \in (\tau : [0, 1] \times D^{n-1}(\varepsilon) / \sim)$ . Здесь фактор-пространство  $[0, 1] \times D^{n-1}(\varepsilon) / \sim$  диффеоморфно  $S^1 \times D^{n-1}(\varepsilon)$  с помощью отождествления  $0 \times D^{n-1}(\varepsilon)$  и  $1 \times D^{n-1}(\varepsilon)$  посредством отображения

$$(0, x_1, \dots, x_\lambda, x_{\lambda+1}, \dots, x_{n-1}) \leftrightarrow (1, -x_1, \dots, x_\lambda, -x_{\lambda+1}, \dots, x_{n-1}).$$

Таким образом каждая правильная  $S^1$ -функция Ботта на многообразии  $M^n$ , порождает разложение  $M^n$  на круглые ручки и наоборот.

Д. Азимову принадлежит следующий результат [5]

**Теорема 3.** Пусть  $M^n$  — гладкое замкнутое многообразие ( $n > 3$ ) и эйлерова характеристика  $\chi(M^n) = 0$ . Тогда  $M^n$  допускает разложение на круглые ручки.

Для 3-многообразий ситуация значительно сложнее — существуют замкнутые трехмерные многообразия не допускающие разложение на круглые ручки, [1, 12].

Поскольку нас интересуют условия, когда  $S^1$ -функция Ботта на многообразии  $M^n$  обладает тем свойством, что все ее критические окружности имеют тривиальные системы координат, напомним необходимые факты, [4].

По определению  $n$ -мерной **ручкой**  $H_\lambda$  индекса  $\lambda$  называется произведение

$$H_\lambda = D^\lambda \times D^{n-\lambda}.$$

Говорят, что гладкое многообразие  $M_\lambda^n$  получено из гладкого многообразия  $M^n$  с помощью приклеивания ручки

индекса  $\lambda$ , если

$$M_\lambda^n = M^n \bigcup_{\varphi} D^\lambda \times D^{n-\lambda},$$

где  $\varphi : \partial D^\lambda \times D^{n-\lambda} \longrightarrow \partial M^n$  — гладкое вложение.  $\partial D^\lambda \times 0$  ( $D^\lambda \times 0$ ) называется средней сферой (диском), а  $\partial D^{n-\lambda} \times 0$  ( $D^{n-\lambda} \times 0$ ) — косредней сферой (диском) ручки  $D^\lambda \times D^{n-\lambda}$ .

Разложение гладкого многообразия  $M^n$  на ручки называется фильтрация

$$\partial M^n \times [0, 1] = M_0^n \subset M_1^n \subset \dots \subset M_n^n = M^n,$$

где многообразия  $M_i^n$  получено из многообразия  $M_{i-1}^n$  с помощью приклеивания ручек индекса  $i$ . В случае, когда  $M^n$  — замкнутое многообразие фильтрация начинается с ручек индекса 0.

Между разложением многообразия на круглые ручки и обычные ручки существует тесная связь, в [5] доказана следующая лемма

**Лемма 1.** Пусть  $M^n = M_1^n + H_\lambda + H_{\lambda+1}$  — гладкое многообразие полученное из многообразия с краем  $M_1^n$  с помощью приклеивания ручек индексов  $\lambda$  и  $\lambda + 1$ , которые не пересекаются ( $n > 2$ ). Тогда, если  $\lambda > 0$ , многообразие  $M^n$  представимо в виде  $M^n = M_1^n + R_\lambda$ , где  $R_\lambda$  обозначает круглую ручку индекса  $\lambda$ .

Имеет место утверждение.

**Лемма 2.** Пусть  $M^n$  — гладкое многообразие ( $n > 2$ ), получено из многообразия с краем  $M_1^n$  с помощью приклеивания круглой (или скрученной круглой) ручки индекса  $\lambda > 0$ . Тогда многообразие  $M^n$  представимо в виде  $M^n = M_1^n + H_\lambda + H_{\lambda+1}$ .

Если приклеивалась круглая ручка  $R_\lambda$ , то индекс пересечения  $H_\lambda$  и  $H_{\lambda+1}$  будет равен 0.



Если приклеивалась скрученная ручка  $TR_\lambda$ , то индекс пересечения  $H_\lambda$  и  $H_{\lambda+1}$  будет равен  $\pm 2$ .

*Доказательство.* Случай, когда приклеивается круглая ручка доказан в [4] (лемма VIII.2). Если к многообразию  $M_1^n$  приклеивается скрученная ручка  $TR_\lambda$ , то рассуждения, фактически, аналогичные. Пусть

$$\varphi : [0, 1] \times \partial D^\lambda \times D^{n-\lambda-1} / \sim \longrightarrow \partial M_1^n$$

приклеивающее отображение.

Представим  $\varphi([0, 1] \times 0 \times 0 / \sim)$  — в виде суммы двух отрезков  $I_1$  и  $I_2$  таких, что

$$I_1 \cap I_2 = \partial I_1 = \partial I_2, \quad I_1 \cup I_2 = \varphi([0, 1] \times 0 \times 0 / \sim).$$

Рассмотрим подмногообразие  $H_\lambda = I_1 \times D^\lambda \times D^{n-\lambda-1}$ , очевидно его можно считать ручкой индекса  $\lambda$ , которая приклеивается к  $\partial M_1^n$  по множеству  $\partial D^\lambda \times D^{n-\lambda-1} \times I_1$  с помощью ограничения отображения  $\varphi$ . Очевидно, что многообразии

$$H_{\lambda+1} = \overline{TR_\lambda \setminus (I_1 \times D^\lambda \times D^{n-\lambda-1})} = I_2 \times D^\lambda \times D^{n-\lambda-1}$$

является ручкой индекса  $\lambda + 1$ , которая приклеивается к  $\partial(M_1^n \cup H_\lambda)$  по множеству  $(\partial I_2 \times D^\lambda \cup I_2 \times \partial D^\lambda) \times D^{n-\lambda-1}$ . По построению индекс пересечения этих двух ручек равен  $\pm 2$ .  $\square$

Справедлива следующая лемма.

**Лемма 3.** Пусть  $M^n$  — гладкое замкнутое многообразие,  $f : M^n \rightarrow [0, 1]$  —  $S^1$ -функция Ботта,  $c$  — ее критическое значение и пусть  $\varepsilon > 0$ , такое, что на отрезке  $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$  других критических значений нет. Предположим, что на поверхности уровня  $f^{-1}(c)$  лежат критические окружности  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$  индексов  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  с тривиальными системами координат и критические окружности  $\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_l$

индексов  $\mu_1, \dots, \mu_l$  со скрученными системами координат. Тогда группы гомологий

$$H_*(f^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon], f^{-1}(c - \varepsilon), \mathbf{Z})$$

порождены в точности ручками, которые соответствуют критическим окружностям

$$\gamma_1, \dots, \gamma_k, \tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_l.$$

А именно: каждая окружность  $\gamma_i$  порождает две подгруппы изоморфные  $\mathbf{Z}$ , одна выделяется прямым слагаемым в группе гомологий

$$H_{\lambda_i}(f^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon], f^{-1}(c - \varepsilon), \mathbf{Z}),$$

а другая — в группе гомологий

$$H_{\lambda_i+1}(f^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon], f^{-1}(c - \varepsilon), \mathbf{Z}).$$

Каждая окружность  $\tilde{\gamma}_j$  порождает подгруппу  $\mathbf{Z}_2$ , выделяющуюся прямым слагаемым в группе

$$H_{\mu_j}(f^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon], f^{-1}(c - \varepsilon), \mathbf{Z}).$$

*Доказательство.* Рассмотрим ассоциированные с функцией  $f$  разложение многообразия  $(f^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon])$  на круглые и скрученные круглые ручки. Поскольку критические окружности лежат на одном уровне разложение на круглые и скрученные круглые ручки можно выбрать так, чтобы эти ручки не пересекались между собой. Если заменить круглые ручки обычными ручками, то из предыдущей леммы следует, что каждая скрученная круглая ручка индекса  $\lambda$  порождает в гомологиях подгруппу изоморфную  $\mathbf{Z}_2$  в размерности  $\lambda$ , а каждая круглая ручка индекса  $\lambda$  порождает в гомологиях две подгруппы изоморфные  $\mathbf{Z}$  в размерностях  $\lambda$  и  $\lambda + 1$ .  $\square$

**Следствие 1.** Пусть  $M^n$  — гладкое замкнутое многообразие,  $f : M^n \rightarrow [0, 1]$  —  $S^1$ -функция Ботта,  $c_1, \dots, c_k$  — ее критические значения и пусть  $\varepsilon_i > 0 (1 \leq i \leq k)$ , такие, что на отрезке  $[c_i - \varepsilon_i, c_i + \varepsilon_i]$  других критических значений нет. Тогда на поверхности уровня  $f^{-1}(c_i)$  лежат только критические окружности с тривиальными системами координат тогда и только тогда, когда ненулевые группы гомологий

$$H_*(f^{-1}[c_i - \varepsilon_i, c_i + \varepsilon_i], f^{-1}(c_i - \varepsilon_i), \mathbf{Z})$$

— свободные абелевы группы.

Таким образом мы имеем гомологический критерий, когда у  $S^1$ -функции Ботта отсутствуют критические окружности со скрученными системами координат. В следующей главе мы укажем еще один класс  $S^1$ -функций Ботта, у которых отсутствуют критические окружности со скрученными системами координат.

### 3. ДИАГРАММЫ $S^1$ -ФУНКЦИЙ БОТТА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

В этой главе для изучения  $S^1$ -функций Ботта мы напомним определение **разбиений диаграмм**, [4]. Разбиения диаграмм хорошо отражают архитектуру  $S^1$ -функций Ботта, особенно для односвязных многообразий.

Рассмотрим разложение замкнутого гладкого многообразия  $M^n$  на ручки

$$M_0^n \subset M_1^n \subset \dots \subset M_n^n = M^n,$$

где многообразие  $M_i^n$  получено из многообразия  $M_{i-1}^n$  с помощью приклейки ручек индекса  $i$ . Положим

$$C_i = H_i(M_i^n, M_{i-1}^n, \mathbf{Z}) \approx \underbrace{\mathbf{Z} \oplus \dots \oplus \mathbf{Z}}_{k_i},$$

где  $k_i$  — число ручек индекса  $i$ . Средние диски ручек индекса  $i$  задают базис группы гомологий  $H_i(M_i^n, M_{i-1}^n, \mathbf{Z})$ .

Используя точную гомологическую последовательность тройки  $M_{i-1}^n \subset M_i^n \subset M_{i+1}^n$  можно построить цепной комплекс свободных абелевых групп:

$$(C, \partial) : C_0 \leftarrow \dots \leftarrow C_{i-1} \xleftarrow{\partial_i} C_i \xleftarrow{\partial_{i+1}} C_{i+1} \leftarrow \dots \leftarrow C_n,$$

гомологии, которого совпадают с гомологиями многообразия  $M^n$ .

Предположим, что многообразие  $M^n$  — ориентированное. Выбор ориентации позволяет ориентировать средние и косредние сферы ручек, что позволяет определять гомологические индексы пересечений средних и косредних сфер ручек индексов  $\lambda$  и  $\lambda + 1$  в подмногообразии  $\partial M_\lambda^n$ . Таким образом гомоморфизм  $\partial_\lambda$  задается матрицей гомологических индексов пересечений средних и косредних сфер соответствующих ручек в подмногообразии  $\partial M_\lambda^n$ .

Если каждой ручке поставить в соответствие вершину, а ребрами соединить те вершины, для которых соответствующие ручки имеют ненулевой индекс пересечения, то мы получим некоторый граф. Однако строения этого графа будет сложным и его можно упростить.

Известно, [4], что с помощью операции сложения ручек все матрицы гомоморфизмов  $\partial_i$  ( $0 \leq i \leq n$ ) можно сделать диагональными принадлежащими одному из следующих 7 видов:

- 1)  $(0)$  — нулевой,
- 2)  $(E)$  — единичной,
- 3)  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}$ , где  $|a_{ii}| > 1$  и  $|a_{ii}|$  делит  $|a_{i+1i+1}|$  ( $1 \leq i < k - 1$ ),
- 4)  $(0) \oplus (E)$ ,

- 5)  $(0) \oplus (A)$ ,
- 6)  $(E) \oplus (A)$ ,
- 7)  $(0) \oplus (E) \oplus (A)$ .

Предположим, что  $M^n$  — односвязно,  $n > 5$  и отсутствуют ручки индексов 1 и  $n - 1$ . Тогда можно добиться, чтобы гомологические индексы пересечений соответствующих средних и косредних сфер совпадали с их геометрическими индексами пересечений.

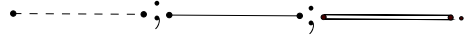
Таким образом пара соседних ручек индексов  $\lambda$  и  $\lambda + 1$  может либо не пересекаться, либо иметь индексы пересечения  $\pm 1$ ,  $\pm 2$  или  $\pm m$ , где  $|m| > 2$ . Поскольку эйлерова характеристика замкнутого гладкого многообразия  $M^n$ , которое допускает разложение на круглые ручки равна нулю, то для разложение  $M^n$  на ручки можно ввести следующий объект — **диаграмму**. Диаграмма представляет собой несвязный граф, вершины, которого соответствуют ручкам, а ребра соединяют вершины в том и только том случае, если индекс пересечения соответствующих ручек ненулевой. Более точно,

**Определение 6.**  $\Omega_n$  называется **диаграммой длины  $n$** , если на плоскости задана  $n + 1$  совокупность точек

$$a_0^1, \dots, a_{k_0}^1; a_1^1, \dots, a_{k_1}^1; \dots; a_1^n, \dots, a_{k_n}^n,$$

которые удовлетворяют следующим условиям:

- 1) для некоторых  $i$  множество  $(a_1^i, \dots, a_{k_i}^i)$  может быть пустым,
- 2)  $k_0 - k_1 + k_2 - \dots + (-1)^n k_n = 0$ ,
- 3) точка из множества  $(a_1^i, \dots, a_{k_i}^i)$  ( $1 < i < n - 1$ ) может быть соединена либо только с одной точкой из множества  $(a_1^{i-1}, \dots, a_{k_{i-1}}^{i-1})$  либо только с одной точкой из  $(a_1^{i+1}, \dots, a_{k_{i+1}}^{i+1})$  одним из трех способов:

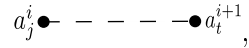


Совокупность точек  $a_1^0, \dots, a_{k_0}^1; \dots; a_1^i, \dots, a_{k_i}^i$  будем называть  $i$ -м **остовом диаграммы**  $\Omega_n$ .

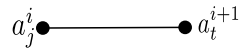
Точка, которая на диаграмме не соединена с какой либо другой точкой, называется **свободной**. Если в диаграмме имеется фрагмент



то  $a_j^i$  называется **полусвободной** точкой (индекс пересечения соответствующих ручек равен  $\pm 2$ ). Если существует фрагмент



то  $a_j^i$  называется **зависимой** точкой (индекс пересечения соответствующих ручек равен  $\pm m$ ). Фрагмент

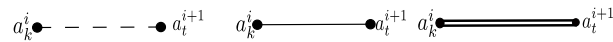
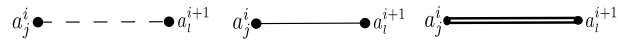


называется **вставкой в размерности  $i$**  (индекс пересечения соответствующих ручек равен  $\pm 1$ ).

**Определение 7.** Пара точек из размерности  $i$  и  $i+1$  называется **независимой в размерности  $i$** , если между ними нет соединений или если они образуют фрагмент.



В дальнейшем будем разбивать диаграмму на непересекающиеся пары независимых точек. Сделаем одно ограничение для фрагментов диаграммы вида



Запрещается одновременно разбивать любой из фрагментов на пары вида  $(a_j^i, a_t^{i+1}), (a_k^i, a_l^{i+1})$ .

**Определение 8.** Если диаграмму  $\Omega_n$  можно представить в виде объединения непересекающихся независимых пар точек, то будем считать, что она **допускает разбиение**. Пары точек  $(a_j^i, a_k^{i+1})$  этого разбиения назовем **вершинами разбиения в размерности  $i$** .

В дальнейшем фиксированное разбиение диаграммы  $\Omega_n$  будем обозначать через  $\Omega_n(\sigma)$ . Может оказаться, что диаграмма  $\Omega_n$  не допускает разбиения, поскольку в некоторых размерностях не будет хватать точек для образования независимых пар.

**Определение 9.** *Стабилизацией* диаграммы  $\Omega_n$  в размерности  $i$  называется диаграмма вида  $\Omega_n^{S(i)} = \Omega_n \cup_i A_i$ , где  $A_i$  — новые вставки в размерности  $i$ .

Следующий факт доказан в [4].

**Лемма 4.** Для каждой диаграммы  $\Omega_n$  существует ее стабилизация в размерностях  $i_1, \dots, i_s$ , обозначим её через  $\Omega_n^{S(i_1, \dots, i_s)}$ , которая допускает разбиение  $\Omega_n^{S(i_1, \dots, i_s)}(\sigma)$ .

**Определение 10.** Число  $\chi_i(\Omega_n) = k_i - k_{i-1} + \dots + (-1)^{i+1} k_0$  называется  *$i$ -той эйлеровой характеристикой* диаграммы  $\Omega_n$ .

Очевидно, что вставка в размерности  $i$  увеличивает  $i$ -ю эйлерову характеристику  $\Omega_n^{S(i)}$  на единицу и не меняет значений остальных  $j$ -х эйлеровых характеристик

$$\chi_j(\Omega_n^{S(i)}) = \chi_j(\Omega_n)$$

для  $j \neq i$ .

**Лемма 5.** [4] Если диаграмма  $\Omega_n$  допускает разбиение, то число вершин разбиения  $\Omega_n(\sigma)$  в каждой размерности одно и то же для всех ее возможных разбиений.

**Определение 11.** Пусть диаграмма  $\Omega_n$  допускает разбиение. Тогда  *$i$ -тым числом Морса*  $M_i(\Omega_n)$  называется число вершин разбиения.

В силу леммы это число не зависит от выбора конкретного разбиения диаграммы  $\Omega_n$ .

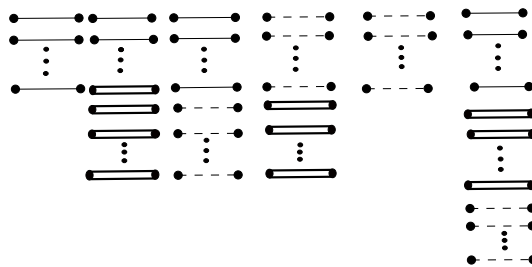
**Определение 12.** Для диаграммы  $\Omega_n$  её  *$i$ -тым числом Морса* называется минимум  $i$ -тых чисел Морса, взятый по всем стабилизациям диаграммы  $\Omega_n$ , которые допускают разбиение.

В этом определении диаграмма  $\Omega_n$  не обязательно является разбиением. Выясним, когда для разбиения диаграммы  $\Omega_n$  на пары независимых вершин необходимо делать вставки. Оказывается, имеется два качественно различных случая.

**Определение 13.** Размерность  $\lambda$  у диаграммы  $\Omega_n$  называется *особой*, если

$$\chi_{\lambda-1}(\Omega_n) = \chi_{\lambda+1}(\Omega_n) = 0, \quad \chi_{\lambda}(\Omega_n) = k > 0,$$

а диаграмма  $\Omega_n$  в размерностях  $\lambda$  и  $\lambda+1$  имеет вид одного из следующих шести вариантов.



В процессе разбиения диаграммы  $\Omega_n$  на пары независимых точек в этой ситуации необходимо делать одну вставку в размерности  $\lambda - 1$  или в размерности  $\lambda + 1$ , что приводит к неоднозначности. В итоге будет разным число пар



в размерности  $\lambda - 1$  или в размерности  $\lambda + 1$ , в зависимости от того, в какой размерности сделана вставка. Имеет место лемма, [4].

**Лемма 6.** *Диаграмма  $\Omega_n$  является разбиением тогда и только тогда, когда у нее нет отрицательных  $i$ -тых эйлеровых характеристик и особых размерностей. Число Морса диаграммы  $\Omega_n$ , которая допускает разбиение, равно  $M_i(\Omega_n) = \chi_i(\Omega_n)$ .*

**Определение 14.** *Стабилизация диаграммы  $\Omega_n$  называется экономной, если*

- 1) в случае, когда  $\chi_i(\Omega_n) = k < 0$ , сделано  $k$  вставок в размерности  $i$ ,
- 2)  $i$  — особая размерность, то сделана одна вставка или в размерности  $i - 1$ , или в размерности  $i + 1$ .

В дальнейшем разбиение диаграммы на независимые пары точек будем производить, двигаясь с левого конца направо, если это необходимо. Положим  $\rho(N) = \frac{1}{2}(N + |N|)$ .

**Теорема 4.** [4]. *Пусть  $\Omega_n$  — произвольная диаграмма. Тогда*

$$M_i(\Omega_n) = \rho(\chi_i(\Omega_n)).$$

Если  $\Omega_n^S$  — стабилизация диаграммы  $\Omega_n$ , то  $M_i(\Omega_n^S) \geq M_i(\Omega)$

**Определение 15.** *Базой диаграммы  $\Omega_n$  называется диаграмма  $\bar{\Omega}_n$  полученная из  $\Omega_n$  отбрасыванием всех вставок.*

**Определение 16.** *Диаграмма  $\Omega_n$  называется точной, если существует стабилизация  $\Omega_n$ , а именно  $\Omega_n^{S(*)}$  допускающая разбиение с  $i$ -ым числом Морса, равным  $M_i(\Omega_n)$  для всех  $i$  одновременно.*

**Теорема 5.** [4]. *Для того чтобы диаграмма  $\Omega_n$  была точной необходимо и достаточно, чтобы у нее не было особых размерностей.*

Опишем как по разложению гладкого замкнутого многообразия  $M^n$  на круглые ручки построить диаграмму  $\Omega_n$ . Пусть

$$M_0^n(R) \subset M_1^n(R) \subset \dots \subset M_{n-1}^n(R) = M^n,$$

разложение  $M^n$  на круглые ручки. На основании леммы 2.2 заменим каждую круглую ручку индекса  $\lambda$  на две обычные ручки индексов  $\lambda$  и  $\lambda + 1$ . В итоге мы получим разложение многообразия  $M^n$  на ручки:

$$M_0^n \subset M_1^n \subset \dots \subset M_n^n = M^n.$$

Используя, это разложение  $M^n$  на ручки, построим цепной комплекс свободных абелевых групп:

$$(C, \partial) : C_0 \leftarrow \dots \leftarrow C_{i-1} \xleftarrow{\partial_i} C_i \xleftarrow{\partial_{i+1}} C_{i+1} \leftarrow \dots \leftarrow C_n.$$

Приведя матрицы дифференциалов  $\partial_i$  к диагональному виду, построим диаграмму  $\Omega_n$ . Имеет место следующий факт:

**Предложение 1.** *Пусть*

$$M_0^n(R) \subset M_1^n(R) \subset \dots \subset M_{n-1}^n(R) = M^n,$$

*разложение многообразия  $M^n$  на круглые ручки,  $\Omega_n$  — диаграмма, ассоциированная с этим разложением. Предположим, что у диаграммы  $\Omega_n$  отсутствуют полусвободные вершины. Если диаграмма  $\Omega_n$  является экономной стабилизацией своей базы  $\bar{\Omega}_n$ , то у исходного разложения на круглые ручки отсутствовали скрученные круглые ручки.*

*Доказательство.* Действительно, в этом случае диаграммы  $\Omega_n$  не позволяет из вставок соорудить скрученную круглую ручку. Все точки из вставок задействованы для образования вершин с другими точками диаграммы. И по условию отсутствуют полусвободные вершины.  $\square$

**Замечание 1.** Несложно построить пример разложения многообразия  $M^n$  на круглые ручки, среди которых будут скрученные круглые ручки, но вместе с тем у ассоциированной с этим разложением диаграммы будут отсутствовать полусвободные вершины.

**Определение 17.** Пусть  $M^n$  — гладкое замкнутое многообразие. Число

$$\begin{aligned} \chi_i(M^n) = \mu(H_i(M^n, \mathbf{Z})) - \mu(H_{i-1}(M^n, \mathbf{Z})) + \dots \\ \dots + (-1)^{i+1} \mu(H_0(M^n, \mathbf{Z})) \end{aligned}$$

называется  $i$ -той эйлеровой характеристикой многообразия  $M^n$ . Здесь  $\mu(H)$  — минимальное число образующих группы  $H$ .

**Определение 18.** Размерность  $\lambda$  у замкнутого многообразия  $M^n$  называется **особой**, если  $H_\lambda(M^n, \mathbf{Z})$  — ненулевая конечная группа отличная от  $\mathbf{Z}_2 \oplus \dots \oplus \mathbf{Z}_2$  и

$$\chi_{\lambda-1}(M^n) = \chi_{\lambda+1}(M^n) = 0.$$

**Определение 19.** Пусть  $M^n$  — гладкое замкнутое многообразие. Разложение на круглые ручки называется **квази-минимальным**, если выполняется одна из двух возможностей:

1) число круглых ручек индекса  $i$  равно  $\rho(\chi_i(M^n)) + \varepsilon_i$ , где  $\varepsilon_i = 0$ , если размерность  $i + 1$  — неособая и  $\varepsilon_i = 1$ , если размерности  $i + 1$  — особая,

2) количество круглых ручек индекса  $i$  равно  $\rho(\chi_i(M^n))$ , и если размерность  $i + 1$  — особая, то имеется только одна ручка индекса  $i + 2$ .

В обоих случаях число круглых ручек индекса  $i + 1$  равно  $\rho(\chi_{i+1}(M^n))$ .

Используя разложение многообразия на ручки и диаграммную технику, легко доказать следующий факт [4].

**Предложение 2.** Пусть  $M^n$  — гладкое замкнутое односвязное многообразие ( $n > 5$ ). Тогда  $M^n$  допускает квази-минимальное разложение на круглые ручки.

#### 4. ПОТОКИ МОРСА-СМЕЙЛА

Пусть  $M^n$  — гладкое компактное многообразие,  $X$  — гладкое векторное поле на  $M^n$ . Предположим, что  $X$  является векторным полем Морса-Смейла. Напомним, что векторное поле  $X$  называется полем Морса-Смейла, если у потока  $\varphi_t$ , порожденного полем  $X$ , множество неблуждающих точек  $\Omega(X)$  состоит из конечного числа точек и окружностей (замкнутых орбит), имеющих гиперболическую структуру и их устойчивые и неустойчивые многообразия пересекаются трансверсально.

Замкнутая орбита  $\gamma$  называется **гиперболической**, если касательное расслоение  $TM^n$ , будучи ограниченным на  $\gamma$ , имеет вид

$$TM_\gamma^n = E^c \oplus E_\gamma^u \oplus E_\gamma^s,$$

где  $E^c$ , порождено векторным полем  $X$ , а подрасслоения  $E_\gamma^s$  и  $E_\gamma^u$  инвариантны относительно  $D\varphi_t$ . Кроме того, существуют константы  $C > 0$  и  $\lambda > 0$  такие, что

$$\|D\varphi_t(\xi)\| \geq Ce^{\lambda t}\|\xi\|, \xi \in E_\gamma^s, t \geq 0$$

и

$$\|D\varphi_t(\eta)\| \leq Ce^{-\lambda t} \|\xi\|, \eta \in E_\gamma^u, t \geq 0,$$

где  $\|\ast\|$ , берется в некоторой римановой метрике  $\rho$  на  $M^n$ .

Точка покоя  $x$  для  $\varphi_t$  называется **гиперболической**, если касательное пространство  $TM_x^n$  имеет вид

$$TM_x^n = E_x^u \oplus E_x^s,$$

и выполняются предыдущие неравенства для векторов из подпространств  $E_x^u$  и  $E_x^s$ .

**Устойчивые и неустойчивые многообразия** замкнутой гиперболической орбиты  $\gamma$  определяются посредством

$$W^s(\gamma) = x : \rho(\varphi_t x, \varphi_t y) \rightarrow 0,$$

когда  $t \rightarrow \infty$  для некоторого  $y \in \gamma$  и

$$W^u(\gamma) = x : \rho(\varphi_t x, \varphi_t y) \rightarrow 0,$$

когда  $t \rightarrow -\infty$  для некоторого  $y \in \gamma$ .

Для гиперболической точки покоя  $x$  потока  $\varphi_t$  **устойчивые и неустойчивые многообразия**  $W^s(x)$  и  $W^u(x)$  определяются аналогично.

Известно, что эти условия не зависят от выбора римановой метрики на многообразии  $M^n$ .

**Индексом** замкнутой гиперболической орбиты  $\gamma$  (гиперболической точки покоя) потока  $\varphi_t$  называется размерность слоя расслоения  $E_\gamma^u$  (размерность подпространства  $E_x^u$ ).

Замкнутая орбита  $\gamma$  называется **незакрученной** (untwisted), если ее неустойчивое многообразие  $E_\gamma^u$  — ориентируемо и называется **закрученной** (twisted) в противном случае.

Поле или поток Морса-Смейла называется **несингулярным**, если точки покоя отсутствуют. В этой работе мы

сосредоточим наше внимание на несингулярных потоках Морса-Смейла.

Предположим в дальнейшем, что  $M^n$  — ориентируемо.

**Определение 20.** Пусть  $\gamma$  — незакрученная замкнутая орбита индекса  $\lambda$  векторного поля Морса-Смейла  $X$  на многообразии  $M^n$ . Говорят, что  $\gamma$  имеет стандартную форму, если существует такая ее координатная окрестность  $U = (\theta \in S^1, x_1, \dots, x_\lambda, y_1, \dots, y_{n-\lambda-1})$ , в которой  $X$  имеет вид

$$X = \frac{\partial}{\partial \theta} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + x_\lambda \frac{\partial}{\partial x_\lambda} - y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} - \dots - y_{n-\lambda-1} \frac{\partial}{\partial y_{n-\lambda-1}}.$$

Для закрученной замкнутой орбиты индекса  $\lambda$  векторного поля Морса-Смейла на  $M^n$  также существует определение стандартной формы.

Окрестность закрученной замкнутой орбиты индекса  $\lambda$  векторного поля Морса-Смейла является двойным накрытием над предыдущей окрестностью  $U$ . Более точно, пусть  $\tilde{U} = S^1 \times D^{n-1}(\varepsilon)$ , где

$$D^{n-1}(\varepsilon) = ((\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{R}^\lambda \times \mathbf{R}^{n-\lambda-1} : |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2 \leq \varepsilon)$$

и пусть проведено отождествление  $\tilde{U}/\sim$  с помощью отображения

$$\begin{aligned} (\theta, x_1, \dots, x_\lambda, y_1, \dots, y_{n-\lambda-1}) &\leftrightarrow \\ &\leftrightarrow (\theta + \pi, -x_1, x_2, \dots, x_\lambda, -y_1, y_2, \dots, y_{n-\lambda-1}). \end{aligned}$$

Заметим, что это отождествление согласовано с сужением векторного поля  $X$  на  $\tilde{U}$  и задает новое векторное поле  $\tilde{X}$  на  $\tilde{U}/\sim$ .

**Определение 21.** Пусть  $\tilde{\gamma}$  — закрученная замкнутая орбита индекса  $\lambda$  векторного поля Морса-Смейла  $X$  на

многообразии  $M^n$ . Говорят, что орбита  $\tilde{\gamma}$  имеет **стандартную форму**, если существует такая ее координатная окрестность  $V$  и диффеоморфизм  $h : V \rightarrow \tilde{U} / \sim$ , который переводит сужение поля  $X$  на  $V$  в поле  $\tilde{X}$  на  $\tilde{U} / \sim$ .

Следующий результат по существу принадлежит Ньюхаусу и Пейксото [13] см. также [7].

**Предложение 3.** Пусть  $X_0$  — несингулярное векторное поле Морса-Смейла на многообразии  $M^n$ . Тогда существует путь  $X_t$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) в пространстве гладких векторных полей на  $M^n$ , такой что

- 1)  $X_t$  — несингулярное векторное поле Морса-Смейла на  $M^n$  для всех  $0 \leq t \leq 1$ ,
- 2) замкнутые орбиты поля  $X_1$  имеют стандартную форму и совпадают с замкнутыми орбитами поля  $X_0$ .

Пусть  $X$  — несингулярное векторное поле Морса-Смейла на многообразии  $M^n$ .

**Определение 22.** Гладкая функция  $f : M^n \rightarrow [0, n]$  называется функцией Ляпунова для поля Морса-Смейла  $X$ , если она удовлетворяет условиям:

- 1)  $X(f)_p = 0$  тогда и только тогда, когда точка  $p$  принадлежит замкнутой орбите поля  $X$ ,
- 2)  $X(f)_p < 0$  для всех точек  $p$  не принадлежащих замкнутым орбитам поля  $X$ ,
- 3)  $f$  является правильной  $S^1$ -функцией Ботта,
- 4) если замкнутая орбита  $\gamma$  — незакрученная, то  $f$  имеет тривиальную систему координат в окрестности  $\gamma$ , в противном случае  $f$  имеет скрученную систему координат в окрестности  $\gamma$ .

Очевидно, что функции Ляпунова для одного и того же несингулярного векторного поля Морса-Смейла на многообразии  $M^n$  могут быть разными.

Пусть  $f, g : M^n \rightarrow [0, n]$  функции Ляпунова для несингулярного векторного поля Морса-Смейла  $X$  на многообразии  $M^n$ . Обозначим через  $M_i(X, f) = f^{-1}[0, i + \frac{1}{2}]$ . Имеет место следующая лемма.

**Лемма 7.** Пусть  $f$  и  $g$  — две функции Ляпунова для несингулярного векторного поля Морса-Смейла  $X$  на многообразии  $M^n$ . Тогда существует такой изотопный тождественному диффеоморфизм  $h : M^n \rightarrow M^n$ , что

$$M_i(X, f) = h(M_i(X, g))$$

для всех  $0 \leq i \leq n - 1$ .

*Доказательство.* Рассмотрим ассоциированное с функциями Ляпунова  $f$  и  $g$  разложение многообразия  $M^n$  на круглые и скрученные круглые ручки. Очевидно, что типы круглых ручек для обеих разложений будут одни и те же. Без ограничения общности можно считать, что

$$M_0(X, f) = M_0(X, g).$$

Рассуждения будут носить индуктивный характер.

Предположим,  $M_{i-1}(X, f) = M_{i-1}(X, g)$ ,  $i > 0$ , и покажем, что с помощью диффеоморфизм  $h_i : M^n \rightarrow M^n$ , изотопного тождественному можно добиться, чтобы

$$M_j(X, f) = h_i(M_j(X, g)), \quad i \geq j.$$

Очевидно, что существует такое  $\varepsilon > 0$  что на промежутке  $[i - 1, i - \varepsilon]$  критических значений нет. Следовательно, многообразия

$$N_i(X, f) = f^{-1}[0, i - \varepsilon], \quad N_i(X, g) = g^{-1}[0, i - \varepsilon]$$



будут диффеоморфными. С помощью изотопии можно добиться, чтобы эти многообразия совпадали. Поскольку критические окружности у функций  $f$  и  $g$  одни и те же, то легко видеть, используя частичный порядок, который существует на замкнутых окружностях поля  $X$ , [7], что после приклеивания круглых ручек исходя из обеих функций, полученные многообразия будут диффеоморфными. Еще раз используя изотопию, можно добиться, чтобы эти многообразия совпадали. Это завершает доказательство леммы.  $\square$

Используя функцию Ляпунова для несингулярного векторного поля Морса-Смейла  $X$  на многообразии  $M^n$  и следствие 2.1 можно дать следующий локальный критерий отсутствия закрученных орбит у поля  $X$ .

**Предложение 4.** Пусть  $M^n$  — гладкое замкнутое многообразие,  $f : M^n \rightarrow [0, 1]$  — функция Ляпунова для несингулярного векторного поля Морса-Смейла  $X$  на  $M^n$ . Предположим, что  $c_1, \dots, c_k$  — критические значения функции  $f$  и пусть числа  $\varepsilon_i > 0$  такие, что на отрезке  $[c_i - \varepsilon_i, c_i + \varepsilon_i]$  других критических значений нет ( $1 \leq i \leq k$ ). Замкнутые орбиты, лежащие на поверхности уровня  $f^{-1}(c_i)$ , будут незакрученными тогда и только тогда, когда ненулевые группы гомологий  $H_*(f^{-1}[c_i - \varepsilon_i, c_i + \varepsilon_i], f^{-1}(c_i - \varepsilon_i), \mathbf{Z})$  являются свободными абелевыми группами.

**Предложение 5.** Пусть  $M^n$  — гладкое замкнутое односвязное многообразие  $n > 5$ , на котором задано несингулярное векторное поле Морса-Смейла  $X$ . Предположим, что группа  $\mathbf{Z}_2$  не является прямым слагаемым в группах гомологий  $H_*(M^n, \mathbf{Z})$ . Если  $f : M^n \rightarrow [0, 1]$  — функция Ляпунова для поля  $X$  является квазиминимальной, то все

замкнутые орбиты поля  $X$  будут незакрученными. Другими словами, если для поля  $X$  выполняется одна из двух возможностей:

1) число замкнутых орбит индекса  $i$  равно  $\rho(\chi_i(M^n)) + \varepsilon_i$ , где  $\varepsilon_i = 0$ , если размерность  $i + 1$  — неособая и  $\varepsilon_i = 1$ , если размерность  $i + 1$  — особая,

2) число замкнутых орбит индекса  $i$  равно  $\rho(\chi_i(M^n))$ , и если размерность  $i + 1$  — особая, то имеется только одна замкнутая орбита индекса  $i + 2$ .

В обоих случаях число замкнутых орбит индекса  $i + 1$  равно  $\rho(\chi_{i+1}(M^n))$ .

*Доказательство.* Следствие предложений 3.1 и 3.2.  $\square$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Матвеев С.В., Фоменко А.Т., Шарко В.В.* Круглые функции Морса и изоэнергетические поверхности интегрируемых гамильтоновых систем // Мат. сборник — 1988, — т. 135, № 3. — С. 325–345.
- [2] *Фоменко А.Т., Цишанг Х.* О топологии трехмерных многообразий, возникающих в гамильтоновой механике // Докл. АН СССР. — 1987. — т. 294, № 2. — С. 283–287.
- [3] *Фоменко А.Т., Шарко В.В.* Точные круглые функции Морса, неравенства типа Морса и интегралы гамильтоновых систем // Укр. мат. журн. — 1989. — т. 41, № 6. — С. 352–361.
- [4] *Шарко В.В.* Функции на многообразиях // Киев: Наук. думка. — 1990. — 194 с.
- [5] *Asimov D.* Round handle and non-singular Morse-Smale flows // Ann. Math. — 1975. — V. 102, no. 1. — Pp. 41–54.
- [6] *Bott R.* Lecture on Morse theory, old and new // Bull. Amer. Math. Soc. — 1982. — V. 7 no. 2. — Pp. 331–358.
- [7] *Franks J.* Morse-Smale flows and homotopy theory // Topology — 1979. — V. 18, no. 2. — Pp. 199–215.
- [8] *Franks J.* Homology and Dynamical systems // CMBS Regional Conf. Series in Math. — no. 49, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1982.

- 
- [9] *Kogan M.* Existence of perfect Morse functions on spaces with semi-free circle action // *Journal of Symplectic Geometry* — 2003. — V. 1, no. 3. — Pp. 829–850.
  - [10] *Meyer K.* Energy functions for Morse-Smale systems // *Amer. J. Math.* — 1968. — V. 90, no. 6. — Pp. 1031–1040.
  - [11] *Miyoshi S.* Foliated round surgery of codimension-one foliated manifolds // *Topology* — 1983. — V. 21, no. 3. — Pp. 245–262.
  - [12] *Morgan J. W.* Non-singular Morse-Smale flows on 3-dimensional manifolds // *Topology* — 1979. — V. 18, no.1. — Pp. 41–53.
  - [13] *Newhuse S., Peixoto M.* There is a simple arc joining any two Morse-Smale Flows // *Asterisque* — 1976. — V. 31. — Pp. 16–41.
  - [14] *Sharko V.* Morse-Bott function on on manifold with semi-free circle action // *Зб. праць Ін-ту математики НАН України* — 2009. — Т. 6, № 2. — С. 518–523.
  - [15] *Thurston W.* Existence of codimension-one foliation // *Ann. Math.* — 1976. — V. 104, no.2. — Pp. 249–268.

В. В. Шарко

Институт математики НАН України, Киев

sharko@imath.kiev.ua

*Наукове видання*

Збірник праць

Інституту математики НАН України

Т. 7 № 4

**Геометрія та топологія  
функцій на многовидах**

Комп'ютерна верстка та підготовка оригінал"-макету  
С.І. Максименко

Редактор В. Е. Гонтковська

---

Підп. до друку 14.12.2010. Формат 60 × 84/16. Папір офс.  
Офс. друк. Фіз. друк. арк. 13.0. Ум. друк. арк. 12.0.  
Зам. 145. Тираж 300 пр.

---

Ін-т математики НАН України  
01601 Київ-4, МСП, вул. Терещенківська, 3