ПРО ОБЕРНЕНУ ЗАДАЧУ ТРЬОХ СПЕКТРІВ І ТЕОРЕМУ АМБАРЦУМЯНА

А.А. Чернишенко[1]

[1]Південноукраїнський національний педагогічний університет ім. К.Д. Ушинського, Одеса, Україна

nastya.chernyshenko12@gmail.com

Єдиний випадок, коли спектр самоспряженої задачі Штурма–Ліувілля на скінченному інтервалі однозначно визначає потенціал, це випадок Амбарцумяна [1]

Теорема 1. [1] *Нехай власні значення спектральної задачі*

$$-y'' + q(x)y = zy, \quad y'(0) = y'(a) = 0$$

з дійсним $q \in C[0,a]$ *є* $\{\frac{\pi^2 k^2}{a^2}\}_{k=0}^{\infty}$, *де* $k = 0, 1, 2, \ldots$. *Тоді* $q(x) \equiv 0$.

У всіх інших самоспряжених випадках (інші крайові умови або інший спектр) потрібно знати два спектри крайових задач, щоб знайти потенціал [2].

Розглянемо спектральну задачу

$$-y'' + q(x)y = zy, \quad y'(0) = y(a) = 0, \tag{1}$$

де $q \in L_2(0,a)$ є дійсним.

Так звана обернена задача за трьома спектрами [4], [3] полягає у відновленні потенціалу $q(x)$ на $[0,a]$, використовуючи спектр задачі (1) та спектри задач

$$-y'' + q(x)y = zy, \quad x \in [0, \frac{a}{2}], \quad y'(0) = y'(\frac{a}{2}) = 0, \tag{2}$$

і

$$-y'' + q(x)y = zy, \quad x \in [\frac{a}{2}, a], \quad y'(\frac{a}{2}) = y(a) = 0 \tag{3}$$

на інтервалах $[0, \frac{a}{2}]$ і $[\frac{a}{2}, a]$ відповідно. Це приводить нас до функціонального рівняння

$$c(\lambda, a) = c(\lambda, \frac{a}{2})\tilde{c}_2(\lambda, a) + \tilde{s}_2(\lambda, a)c'(\lambda, \frac{a}{2}), \tag{4}$$

де $\lambda = \sqrt{z}$ і ми позначили через $c(\lambda, x)$ розв'язок рівняння Штурма–Ліувілля (1), яке задовольняє умови $c(\lambda, 0) = 1$, $c'(\lambda, 0) = 0$, через $\tilde{c}_2(\lambda, x)$ розв'язок рівняння (1), який задовольняє умови $\tilde{c}_2(\lambda, \frac{a}{2}) = 1$ та $\tilde{c}_2'(\lambda, \frac{a}{2}) = 0$, а через $\tilde{s}_2(\lambda, x)$ розв'язок (1), який задовольняє умови $\tilde{s}_2(\lambda, \frac{a}{2}) = 0$ і $\tilde{s}_2'(\lambda, \frac{a}{2}) = 1$.

Основними результатами в нашій роботі є наступні теореми, які отримані з використанням формули (4).

Теорема 2. *Нехай три послідовності дійсних і чисто уявних чисел* $\{\lambda_k\}_{-\infty, k\neq 0}^{\infty}$, $\{\zeta_k\}_{-\infty, k\neq 0}^{\infty}$, $\{\kappa_k\}_{-\infty, k\neq 0}^{\infty}$,
($\lambda_{-k} = -\lambda_k$, $\zeta_{-k} = -\zeta_k$, $\kappa_{-k} = -\kappa_k$, $\lambda_k^2 < \lambda_{k'}^2$, $(\zeta_k)^2 < (\zeta_{k'})^2$, $(\kappa_k)^2 < (\kappa_{k'})^2$ *для* $k < k'$) *мають асимптотики*

$$\lambda_k = \frac{\pi k}{a} + \frac{A_0}{\pi k} + \frac{\beta_k}{k}, \quad \zeta_k = \frac{2\pi k}{a} + \frac{A_1}{\pi k} + \frac{\beta_k}{k}, \quad \kappa_k = \frac{\pi(2k-1)}{a} + \frac{A_2}{\pi k} + \frac{\beta_k}{k},$$

де $A_0 = A_1 + A_2$, *послідовності* $\{\beta_k\}_{-\infty,k\equiv 0}^{\infty}$ *різні, але належать* l_2. *Нехай елементи* $\{\lambda_k\}_{-\infty,k\neq 0}^{\infty}$ *чергуються з елементами об'єднання*
$\{\theta_k\}_{-\infty,k\neq 0}^{\infty} \overset{def}{=} \{\zeta_k\}_{-\infty,k\neq 0}^{\infty} \cup \{\kappa_k\}_{-\infty,k\neq 0}^{\infty}$ *у строгому сенсі:*

$$-\infty < \lambda_1^2 < \theta_1^2 < \lambda_2^2 < \theta_2^2 < \dots$$

Тоді існує єдиний дійсний потенціал $q(x) \in L_2(0, a)$, *який породжує задачу* (1) *зі спектром* $\{\lambda_k\}_{-\infty,k\neq 0}^{\infty}$, *задачу* (3) *зі спектром* $\{\kappa_k\}_{-\infty,k\neq 0}^{\infty}$ *та задачу* (2) *для якої* $\{\zeta_k\}_{-\infty,k\neq 0}^{\infty}$ *— власні значення.*

Теорема 3. *Нехай* $\{\lambda_k\}_{-\infty,k\neq 0}^{\infty}$ *— спектр задачі* (1), $\{\kappa_k\}_{-\infty,k\neq 0}^{\infty}$ *— спектр задачі* (3) *і нехай* $A_0 = A_2$. *Нехай найменше власне значення* ζ_0 *задачі* (2) *дорівнює 0.*

Тоді дані $\{\lambda_k\}_{-\infty,k\neq 0}^{\infty}$, $\{\kappa_k\}_{-\infty,k\neq 0}^{\infty}$ *та* ζ_0 *цієї теореми однозначно визначають потенціал* $q(x)$ *на сегменті* $[0, a]$, *а на сегменті* $[0, a/2]$ *виконується* $q(x) \overset{a.e.}{=} 0$.

Остання теорема описує аналог випадку Амбарцумяна. Ми бачимо, що у цьому випадку для однозначного визначення потенціалу вистачає двох спектрів та одного власного значення третього спектру.

Доповідь базується на результатах викладених в статті [5].

1. Ambarzumian V. A. Über eine range der Eigenwerttheorie. Z. Phys., 1929, 53, 690 – 695.
2. Borg G. Uniqueness theorems in the spectral theory of $y'' + (\lambda - q(x))y = 0$. Proc. 11th Scandinavian Congress of Mathematicians, Johan Grundt Tanums Forlag Oslo, 1952, 276 – 287.
3. Gesztesy B., Simon B. Inverse spectral analysis with partial information on the potential. II. Case of discrete spectrum. Trans. Am. Math. Soc., 1999, 352, No. 6, 2765 – 2787.
4. Pivovarchik V. An inverse Sturm–Liouville problem by three spectra. Integr. Eqn. Oper. Theory, 1999, 34, 234 – 243.
5. Chernyshenko A., Pivovarchik V. On Three Spectra Problem and Ambarzumian's Theorem. Mediterr. J. Math., 2023, 20:129.